Then $\{\Phi_n\}$ induces a map (in an evident sense) of the homology diagram of $\{\partial_n\}$ to that of $\{\bar{\partial}_n\}$.

As a second example we prove a "3-lemma", so-called by analogy with the well-known „5-lemma" of homological algebra. Indeed it is easy to prove the 5-lemma, in its strong form, from the 3-lemma and the splitting procedure described at the end of section 2.

THEOREM 3.6. *Given the commutative diagram*

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\theta"] & \cdot \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"] & \cdot \arrow[d, "\psi"] \\ \cdot \arrow[r, "\nu"'] & \cdot \arrow[r, "\eta"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

with $\mu \| \varepsilon$, $\nu \| \eta$, then

(a) *if φ is right-regular, ψ is right-regular,*

(a′) *if φ is left-regular, θ is left-regular;*

(b) *if θ is right-regular and φ is left-regular, then ψ is left-regular,*

(b′) *if ψ is left-regular and φ is right-regular, then θ is right-regular;*

(c) *if θ and ψ are right-regular, so is φ,*

(c′) *if θ and ψ are left-regular, so is φ.*

We remark that (a′), (b′), (c′) are dual to (a), (b), (c) and thus do not need separate proof. We prove (a) by remarking that $\varepsilon\psi = \varphi\eta$, which is right-regular since φ and η are right-regular; thus ψ is right-regular. To prove (b) we remark that θ is a unit by (a′); the assertion is thus equivalent to the assertion, following (3.4), that ϱ is left-regular. To prove (c) let $\varphi\xi = 0$; then $\theta\nu\xi = \mu\varphi\xi = 0$, so $\nu\xi = 0$, θ being right-regular. Thus $\xi = \eta\varkappa$, so $0 = \varphi\eta\varkappa$; but $\varphi\eta = \varepsilon\psi$ is right-regular, so $\varkappa = 0$, $\xi = 0$, and φ is right-regular.

COROLLARY 3.7. *If any two of θ, φ, ψ are units, so is the third.*

REFERENCES

[1] M. G. Barratt, *Homotopy ringoids and homotopy groups*, The Quaterly Journal of Mathematics (Oxford) (2) 5 (1955), p. 271-290.

[2] D. A. Buchsbaum, *Exact categories and duality*, Transactions of the American Mathematical Society 80 (1955), p. 1-34.

[3] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton 1956.

[4] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton 1952.

[5] P. J. Hilton and W. Ledermann, *Homology and ringoids I*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 54 (1958), p. 152-167.

[6] S. MacLane, *Duality for groups*, Bulletin of the American Mathematical Society 56 (1950), p. 485-515.

Reçu par la Rédaction le 24. 12. 1957

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

SUR LES ENSEMBLES DENSES DE PUISSANCE MINIMUM DANS LES GROUPES TOPOLOGIQUES

PAR

S. HARTMAN ET A. HULANICKI (WROCŁAW)

Dans les espaces non métrisables, même s'ils sont compacts, les deux axiomes de dénombrabilité, l'existence d'un ensemble dénombrable dense ou bien la non-existence d'un ensemble indénombrable isolé, ou encore, par exemple, la non-existence d'une famille indénombrable de voisinages disjoints présentent des propriétés essentiellement différentes. Néanmoins, quelques implications mutuelles non triviales ont lieu dans le cas d'un groupe topologique soumis, s'il y a besoin, à des conditions supplémentaires. Ainsi par exemple, selon le théorème connu de Kakutani, le premier axiome de dénombrabilité entraîne dans tout groupe topologique l'existence d'une métrique invariante; dans un groupe compact en résultent, par conséquent, toutes les autres propriétés mentionnées ci-dessus. De plus, on sait que, si l'on admet l'hypothèse du continu, un groupe compact abélien de puissance $2^{\aleph_0}$ est pourvu d'un système fondamental dénombrable, et A. Hulanicki a démontré récemment [3] que c'est encore le cas des groupes localement compacts non-abéliens.

Dans cette note, nous nous proposons d'établir les conditions qui, imposées à un groupe topologique, assurent l'existence d'un sous-ensemble dénombrable partout dense et dont le nombre cardinal est aussi petit que possible. Parallèlement, nous allons considérer l'existence de „grands" sous-groupes isolés.

LEMME 1 ([7], p. 138) (¹). *Si un sous-groupe invariant fermé H d'un groupe topologique G et le groupe quotient G/H contiennent chacun un ensemble dense dont la puissance ne surpasse pas $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, il en est de même pour le groupe G.*

LEMME 2. *Un groupe topologique contenant un sous-groupe isolé de puissance $\mathfrak{m}$ contient un système de puissance $\mathfrak{m}$ de voisinages disjoints* (²).

(¹) Ce lemme y est démontré pour $\mathfrak{m} = \aleph_0$, mais la démonstration est la même quel que soit $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

(²) Cette implication est fausse pour un espace topologique quelconque, le mot „sous-groupe" étant remplacé par „sous-ensemble"; cf., par exemple, [5], p. 133.

Démonstration. Soit G le groupe et D le sous-groupe isolé. Alors, il existe un voisinage U de l'élément neutre e de G tel que $U \cap D = (e)$. Soit W un voisinage de e pour lequel $WW^{-1} \subset U$. Le lemme sera établi quand on aura démontré que les voisinages xW $(x \in D)$ sont disjoints. Or soit $x, y \in D$, $x \neq y$. Si l'on avait $xW \cap yW \neq 0$, il y aurait deux éléments w_1 et w_2 de W pour lesquels $xw_1 = yw_2$, donc $y^{-1}x = w_2 w_1^{-1}$. Comme $y^{-1}x \in D$ et $y^{-1}x \neq e$, on aurait $WW^{-1} \cap D \neq (e)$ et par suite $U \cap D \neq (e)$, contrairement au choix de U.

Dans ce qui suit (théorèmes 1 et 2), l'hypothèse $\aleph_{a+1} = 2^{\aleph_a}$ sera admise.

Théorème 1. *Un groupe abélien compact infini G de puissance non supérieure à $2^{2^{\mathfrak{m}}}$ contient un ensemble dense de puissance au plus égale à $\mathfrak{m}$.*

Démonstration. Tout groupe abélien (discret) infini peut être plongé dans un groupe divisible (c'est-à-dire tel que l'équation $nx = a$ soit toujours résoluble, quel que soit n entier) de même puissance ([4], p. 151). Le groupe discret $\hat{G}$, dual de G, est de puissance au plus égale à $2^{\mathfrak{m}}$. Soient Γ un groupe divisible qui le contient et $\overline{\overline{\Gamma}} \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$. D'après un théorème connu de Baer ([4], p. 149), Γ est représentable comme une somme directe de groupes isomorphes à R^+ ou à C_{p^∞}, où R^+ désigne le groupe additif des nombres rationnels et C_{p^∞} le groupe quasi-cyclique suivant le nombre premier p, l'ensemble de tous ses sommandes ayant une puissance non supérieure à celle de Γ. Alors son dual $\hat{\Gamma}$ est un groupe produit (au sens cartésien) des groupes R^+ et C_{p^∞}, duals des sommandes correspondants de Γ. Le solénoïde $\hat{R}^+$ et les groupes $\hat{C}_{p^\infty}$, isomorphes aux groupes correspondants des entiers p-adiques I_p, étant métriques séparables, chacun contient un ensemble dénombrable dense. Comme il y en a au plus $2^{\mathfrak{m}}$, il s'ensuit en vertu d'un théorème de Hewitt [2] que leur produit $\hat{\Gamma}$ contient un ensemble dense de puissance au plus égale à $\mathfrak{m}$. Comme le groupe G est isomorphe au sens algébro-topologique à $\hat{\Gamma}/A_{\hat{G}}$ ($A_{\hat{G}}$ désignant l'annulateur de $\hat{G}$), il représente une image continue de $\hat{\Gamma}$. Par suite, il contient également un ensemble dense de puissance non supérieure à $\mathfrak{m}$.

Pour les groupes connexes, on peut constater plus encore: *un groupe abélien compact et connexe de puissance non supérieure à $2^{\mathfrak{c}}$ est monothétique*, c'est-à-dire contient un élément qui engendre un sous-groupe (cyclique) dense. Ce résultat, énoncé dans [1] sans démonstration, se démontre à grands traits comme il suit: le groupe dual $\hat{G}$ est sans torsion et l'on a $\overline{\overline{\hat{G}}} \leqslant \mathfrak{c}$. Par conséquent, $\hat{G}$ est isomorphe à un sous-groupe de la somme directe $\sum_{\tau \in T} R_\tau^+$ ($\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{c}$; $R_\tau^+ \cong R^+$). On en déduit que le groupe multiplicatif K des nombres complexes de valeur absolue 1 contient un sous-groupe isomorphe à $\hat{G}$. Un tel isomorphisme présente un caractère de $\hat{G}$ de valeurs distinctes. On peut l'identifier à un élément $x \in G$, tel que $\chi_1(x) \neq \chi_2(x)$, si $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$ et $\chi_1 \neq \chi_2$. Mais alors $\chi(x) \neq 1$ pour tout $\chi \not\equiv 1$, ce qui équivaut à la densité de la suite nx $(n = 1, 2, \ldots)$ dans G ([1], p. 161). A cette occasion, nous constatons qu'il y a des groupes compacts monothétiques infinis de dimension nulle. Tel est par exemple le produit (cartésien) des groupes cycliques C_p où p parcourt l'ensemble des nombres premiers.

Nous allons établir maintenant quelques relations entre les cinq propriétés suivantes, concernant un groupe topologique G et un nombre cardinal $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$:

(1) G contient un sous-groupe isolé de puissance supérieure à $\mathfrak{m}$,

(2) il existe plus de $\mathfrak{m}$ voisinages disjoints dans G,

(3) tout ensemble dense dans G est de puissance supérieure à $\mathfrak{m}$,

(4) G admet une application homomorphe continue sur un groupe discret dont la puissance surpasse $\mathfrak{m}$,

(4′) G admet une application continue sur un espace isolé dont la puissance surpasse $\mathfrak{m}$.

D'abord, on a la relation banale (4) → (4′). Evidemment, on a aussi (4′) → (2) et (2) → (3), pour des raisons purement topologiques. Le lemme 2 fournit la relation (1) → (2) pour tout groupe topologique.

Théorème 2. *Pour les groupes abéliens localement compacts dont la puissance ne surpasse pas $2^{2^{\mathfrak{m}}}$ ($\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$), les conditions (2)-(4′) sont équivalentes et la condition (1) les entraîne.*

Démonstration. Soit G un groupe satisfaisant aux hypothèses du théorème. Il ne reste qu'à établir l'implication (3) → (4). Admettons d'abord que G puisse être engendré par un voisinage de l'élément neutre, à fermeture compacte. D'après un théorème fondamental ([6], p. 274), G est alors la somme directe d'un groupe compact, d'un groupe vectoriel et d'un nombre fini de groupes cycliques. Comme le sommande compact est de puissance au plus égale à $2^{2^{\mathfrak{m}}}$, le théorème 1 montre qu'il contient un ensemble dense de puissance non supérieure à $\mathfrak{m}$. Il en est de même pour G tout entier, les autres sommandes étant séparables. Un groupe abélien localement compact contient toujours un sous-groupe ouvert H engendré par un voisinage de l'élément neutre, à fermeture compacte. Si (4) n'a pas lieu, le groupe discret G/H est de puissance au plus égale à $\mathfrak{m}$. D'après ce qui à été démontré précédemment, le groupe H contient un ensemble dense dont le nombre cardinal ne surpasse pas $\mathfrak{m}$. Ainsi, le lemme 1 montre qu'il en est de même du groupe G, donc que (3) est en défaut. De cette manière la relation (3) $\to$ (4) se trouve établie et la démonstration est achevée.

On voit bien que la relation (2) $\to$ (4), donc aussi la relation (1) $\to$ (2) $\to$ (4) $\to$ (4′), a lieu pour tout groupe abélien localement compact, indépendamment de sa puissance. En effet, le sous-groupe H, dont il est question dans la démonstration du théorème 2, contient au plus $\aleph_0$ voisinages disjoints. Si le nombre cardinal du groupe G/H n'était pas supérieur à $\mathfrak{m}$, le groupe G, en tant que réunion de classes ouvertes suivant H, ne pourrait pas contenir plus de $\mathfrak{m}$ voisinages disjoints.

L'implication (4) $\to$ (1) n'a pas lieu même si l'on a $\overline{\overline{G}} = 2^{\mathfrak{m}}$. Voici le théorème qui le prouve:

THÉORÈME 3. *Pour tout nombre cardinal $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, il existe un groupe abélien localement compact de puissance $2^{\mathfrak{m}}$ qui admet une application homomorphe continue sur un groupe discret de puissance $\mathfrak{m}$ et qui est dépourvu de sous-groupes isolés, sauf le sous-groupe trivial à un élément.*

Démonstration. Soit T un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$. Envisageons l'ensemble G de toutes les fonctions $f(t)$ définies sur T, aux valeurs appartenant au groupe compact I_2 des entiers 2-adiques et soumises à la condition $f(t) \epsilon 2I_2$, sauf pour un nombre fini de points $t \epsilon T$. L'opération $f(t)+g(t)$ étant définie pour tout $t \epsilon T$ comme addition 2-adique, G devient un groupe abélien. On a évidemment $\overline{\overline{G}} = (2^{\aleph_0})^{\mathfrak{m}} = 2^{\mathfrak{m}}$. Introduisons une topologie dans G en considérant comme voisinage de l'élément zéro un ensemble qui se compose de fonctions dont toutes les valeurs appartiennent à $2I_2$ et pour lesquelles on a $f(t_i) \epsilon 2^{k_i} I_2$ (k_i entier positif, $i = 1, 2, \ldots, n$), $\{t_i\}$ étant un système fini de points de T. Par suite, G est localement compact. C'est un groupe sans torsion, donc dépourvu de sous-groupes finis $\neq (0)$. Pour voir qu'il est dépourvu aussi de sous-groupes isolés infinis, il suffit de vérifier que tout élément f de G engendre un groupe cyclique infini dont l'élément 0 est un point-limite; en effet, $2^r f$ appartient à un voisinage quelconque de 0, si r est suffisamment élevé. L'ensemble N des fonctions f dont toutes les valeurs appartiennent à $2I_2$ est le produit cartésien de $\mathfrak{m}$ exemplaires du groupe $2I_2$. Il est ouvert dans G le groupe quotient G/N est donc discret. On voit sans peine que sa puissance est $\mathfrak{m}$: G/N est la somme directe de $\mathfrak{m}$ exemplaires du groupe cyclique C_2 vu que $I_2/2I_2 \simeq C_2$. Donc G admet une application homomorphe continue sur un groupe discret de puissance $\mathfrak{m}$ et le théorème se trouve démontré.

TRAVAUX CITÉS

[1] S. Hartman und C. Ryll-Nardzewski, *Zur Theorie der lokal-kompakten abelschen Gruppen*, Colloquium Mathematicum 4 (1956), p. 157-188.

[2] E. Hewitt, *A remark on the density characters*, Bulletin of the American Mathematical Society 52 (1946), p. 641-643.

[3] A. Hulanicki, *On locally compact topological groups of power of continuum*, Fundamenta Mathematicae 44 (1957), p. 156-158.

[4] А. Г. Курош, *Теория групп*, Москва 1953.

[5] E. Marczewski, *Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques*, Fundamenta Mathematicae 34 (1946), p. 127-143.

[6] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Москва 1954.

[7] Н. Я. Виленкин, *К теории слабо сепарабельных групп*, Математический сборник 22 (64) (1948), p. 135-177.

Reçu par la Rédaction le 15. 1. 1958