On obtient ainsi une transformation continue de l'ensemble Y en l'ensemble

$$(Y-B_{n_\varepsilon}-D)\cup C_\varepsilon\cup Q_1^*\cup Q_2^*\cup\ldots\cup Q_{n_\varepsilon}^*,$$

où $Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_{n_\varepsilon}^*$ sont certains carrés-composantes de l'ensemble D. Il est d'ailleurs évident que les diamètres de toutes les tranches de f_ε^* sont $<\varepsilon$.

Mais l'ensemble $Y-B_{n_\varepsilon}-D$ est homéomorphe à l'ensemble

$$A\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)$$

et l'ensemble $C_\varepsilon\cup Q_1^*\cup\ldots\cup Q_{n_\varepsilon}^*$ est homéomorphe à l'ensemble C. Ces ensembles étant compacts et disjoints, on en conclut qu'il existe une homéomorphie g^* transformant $f_\varepsilon^*(Y)$ en X. Or la fonction $\psi = g^*f_\varepsilon^*$ transforme Y en X et ses tranches sont de diamètre $<\varepsilon$.

Reçu par la Rédaction le 30. 1. 1957

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

SUR LES INVOLUTIONS CYCLIQUES PRIVÉES DE POINTS UNIS APPARTENANT À UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

PAR

L. GODEAUX (LIÈGE)

Nous avons, à diverses reprises, étudié les involutions cycliques, dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique. Cela nous a permis de construire, comme images de ces involutions, d'une part des surfaces dont le diviseur de Severi est quelconque (voir [1], [2] et [10]), d'autre part, des surfaces dépourvues de courbe canonique, mais ayant un système bicanonique irréductible (voir [4], [6-10] et [12]) ($p_a = p_g = 0, P_2 > 1$). C'est de ce second problème que nous voudrions nous occuper ici, en précisant et généralisant nos résultats antérieurs.

Soient F une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre p, privée de points unis, et F' une surface image de cette involution. Le problème qui se pose est de déterminer les caractères de la surface F' en partant de ceux de F. En particulier, le cas où $p = p_a+1$, p_a étant le genre arithmétique de F, est particulièrement intéressant. Sous cette hypothèse en effet, la surface F', supposée régulière, est dépourvue de courbe canonique, mais possède un système bicanonique irréductible. Dans nos travaux antérieurs, nous avions supposé la surface F régulière; ici, nous la supposons régulière ou irrégulière, ce qui nous a obligé à modifier assez profondément certaines démonstrations.

Lorsque la surface F' est de genres $p_a = p_g = 0, P_2 > 1$, on trouve sur cette surface une certaine configuration de courbes. On peut se demander si une telle configuration existe sur toute surface dépourvue de courbe canonique mais ayant un système bicanonique irréductible. Il semble probable que la réponse soit affirmative; on pourrait sans doute le démontrer en prouvant qu'il existe sur la surface une courbe six-canonique formée à la fois de deux courbes tricanoniques et de trois courbes bicanoniques.

Ajoutons que nous avons exclu de nos considérations le cas où les systèmes canonique et bicanonique de la surface F sont composés au moyen d'un faisceau. Dans cette hypothèse en effet la surface F' ne peut posséder un système bicanonique irréductible.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I d'ordre p, privée de points unis. Désignons par T la transformation birationnelle involutive de F en soi, génératrice de l'involution, et par F' une surface image de celle-ci. Nous supposerons que le genre arithmétique p_a de F est supérieur à zéro et que les systèmes canonique et bicanonique de F ne sont pas composés au moyen d'un faisceau.

Entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de F' nous avons la relation

$$p_a+1 = p(p'_a+1). \tag{1}$$

Le nombre p est donc un diviseur de p_a+1. Si $p = p_a+1$, on a $p'_a = 0$. Nous supposerons en premier lieu $p < p_a+1$. Alors on a p'_a supérieur à zéro.

Le système canonique $|L|$ de F est transformé en soi par T. Il ne peut cependant appartenir à l'involution I, car alors, il lui correspondrait sur F' le système canonique de cette surface; les genres géométriques p_g de F et p'_g de F' seraient égaux. Or, on a

$$p'_g-p'_a \leqslant p_g-p_a,$$

d'où actuellement $p'_a \geqslant p_a$, inégalité incompatible avec (1).

Le système $|L|$ contient donc un certain nombre $\nu+1$ de systèmes linéaires partiels $|L_0|, |L_1|, \ldots, |L_\nu|$ appartenant à l'involution I. Soient $|K_0|, |K_1|, \ldots, |K_\nu|$ les systèmes linéaires (complets) qui leur correspondent sur F'. L'un de ces systèmes, par exemple $|K_0|$, est nécessairement le système canonique de F'. Il a la dimension p'_g-1.

Désignons par π le genre linéaire de F, c'est-à-dire le genre des courbes L, et par π' celui de la surface F', c'est-à-dire le genre des courbes K_0. Entre une courbe K_0 et la courbe L_0 homologue, nous avons une correspondance (l, p) privée de points unis, donc par la formule de Zeuthen, on a

$$\pi-1 = p(\pi'-1). \tag{2}$$

Les courbes $L_1, L_2, \ldots, L_\nu$ ayant aussi le genre π, les courbes $K_1, K_2, \ldots, K_\nu$ ont également le genre π'.

Si $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ sont les dimensions des systèmes $|L_1|, |L_2|, \ldots, |L_\nu|$, on a, par la théorie des homographies cycliques,

$$p'_g+r_1+r_2+\ldots+r_\nu+\nu = p_g. \tag{3}$$

2. Soient $|K'_0|, |K'_1|, \ldots, |K'_\nu|$ les adjoints aux systèmes $|K_0|, |K_1|, \ldots, |K_\nu|$. Le système $|K'_0|$ est le système bicanonique $|2K_0|$ de F' et a la dimension $P'_2-1 = p'_a+\pi'-1$.

Les courbes K'_1 découpent, sur une courbe K_1, une série canonique de celle-ci, de défaut $q' = p'_g-p'_a$ d'après le théorème de Picard. D'autre part, on a $K'_1-K_1 \equiv K_0$, donc le système $|K'_1|$ a la dimension

$$p'_g-1+(\pi'-q') = p'_a+\pi'-1.$$

Les systèmes $|K'_2|, \ldots, |K'_\nu|$ ont la même dimension.

Aux systèmes linéaires $|K'_0|, |K'_1|, \ldots, |K'_\nu|$ correspondent sur F des systèmes $|(2L_0|, |(2L)_1|, \ldots, |(2L)_\nu|$ compris dans le système bicanonique $|2L|$ et appartenant à l'involution I. Supposons que $|2L|$ contienne $\mu \geqslant \nu+1$ systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I et soient $|(2L)_{\nu+1}|, \ldots, |(2L)_\mu|$ ceux de ces systèmes distincts des précédents, $r'_{\nu+1}, \ldots, r'_\mu$ leurs dimensions.

Le système bicanonique de F a la dimension $P_2-1 = p_a+\pi-1$ et, d'après la théorie des homographies cycliques, on a

$$(\nu+1)(p'_a+\pi'-1)+r'_{\nu+1}+\ldots+r'_\mu+\mu = p_a+\pi,$$

c'est-à-dire, en tenant compte des relations (1) et (2),

$$r'_{\nu+1}+\ldots+r'_\mu+\mu-\nu-1 = (p'_a+\pi')(p-\nu-1).$$

Si $\mu = \nu+1$, on en déduit $p = \nu+1$.

Supposons $\mu > \nu+1$. Au système $|(2L)_{\nu+1}|$ correspond sur F' un système $|K'_{\nu+1}|$. Le système $|K'_{\nu+1}-K_0|$ ne peut exister, car il lui correspondrait sur F un système composé avec I, appartenant au système canonique, distinct des systèmes $|L_0|, |L_1|, \ldots, |L_\nu|$. Or, les courbes $K'_{\nu+1}$ découpent sur une courbe K_0 une série comprise dans une série paracanonique, de dimension $\pi'-2$. On a donc $r'_{\nu+1} \leqslant \pi'-2$. On a de même $r'_{\nu+2} \leqslant \pi'-2$, $\ldots, r'_\mu \leqslant \pi'-2$ et par conséquent

$$r'_{\nu+1}+\ldots+r'_\mu \leqslant (\mu-\nu-1)(\pi'-2).$$

On en conclut

$$(p'_a+\pi')(p-\nu-1)-(\mu-\nu-1) \leqslant (\mu-\nu-1)(\pi'-2),$$

ce qui peut s'écrire

$$(p-\nu-1)p'_a+(p-\mu)\pi'+\mu-\nu-1 \leqslant 0.$$

Par conséquent, on a nécessairement $\mu = \nu+1 = p$.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant: *Si une surface algébrique F de genre arithmétique $p_a > 0$ et dont les systèmes canonique et bicanonique ne sont pas composés au moyen d'un faisceau contient une involution cyclique d'ordre $p < p_a+1$, privée de points unis, son système* *canonique contient p systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution. Le genre arithmétique de la surface F', image de l'involution, est positif.*

3. Revenons aux systèmes $|K_1|, |K_2|, \ldots, |K_{p-1}|$. Le système $|K_1|$ a le degré $\pi'-1$ et le genre π'; il n'est pas spécial et, d'après le théorème de Riemann-Roch, sa dimension r_1 est au moins egale à p'_a. Il en est de même des dimensions des systèmes $|K_2|, \ldots, |K_{p-1}|$ et on a donc

$$r_1+r_2+\ldots+r_{p-1} \geqslant (p-1)p'_a.$$

La formule (3) donne $p_g-p_a \geqslant (p-1)(p'_a+1)$, équivalente à la relation $p_g-p_a \geqslant p'_g-p'_a$.

Lorsque la surface F est régulière ($p_g = p_a$), il en est de même de la surface F' ($p'_g = p'_a$). La relation (3) donne

$$r_1+r_2+\ldots+r_{p-1} = (p-1)p'_a,$$

d'où $r_1 = r_2 = \ldots = r_{p-1} = p'_a$.

Si une surface régulière F de genre arithmétique $p_a > 0$ et dont les systèmes canonique et bicanonique ne sont pas composés au moyen d'un faisceau contient une involution cyclique d'ordre $p < p_a+1$, privée de points unis, son système canonique contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution. A ces systèmes correspondent sur la surface F', image de l'involution, de genre arithmétique p'_a, le système canonique et $p-1$ systèmes linéaires de dimension p'_a.

4. Nous allons maintenant nous occuper du cas $p = p_a+1$. On a alors $p'_a = 0$. Si la surface F' est irrégulière ($p'_g > 0$) et possède par conséquent des courbes canoniques, les raisonnements précédents peuvent être repris. Il n'en est pas de même si F' est régulière ($p'_a = p'_g = 0$), car dans ce cas la surface ne possède pas de courbe canonique. Dans ce qui va suivre, nous nous placerons dans cette hypothèse.

Le système canonique $|L|$ de F ne peut appartenir à l'involution I, car il lui correspondrait, sur F', un système canonique de cette surface. Le système $|L|$ contient par conséquent un certain nombre $\nu \leqslant p-1$ de systèmes linéaires partiels $|L_1|, |L_2|, \ldots, |L_\nu|$ appartenant à I. Soient $|K_1|, |K_2|, \ldots, |K_\nu|$ les systèmes linéaires qui leur correspondent sur F' et $r_1, r_2, \ldots, r$ les dimensions de ces systèmes. Ces systèmes ont tous le degré $\pi'-1$ et le genre π'.

Désignons par $|K'_1|, |K'_2|, \ldots, |K'_\nu|$ les adjoints aux systèmes $|K_1|, |K_2|, \ldots, |K_\nu|$. Puisque la surface F' est régulière, ces adjoints sont réguliers d'après le théorème de Picard et découpent respectivement sur les courbes $K_1, K_2, \ldots, K_\nu$ la série canonique complète. D'autre part,

les systèmes $|K'_1-K_1|, |K'_2-K_2|, \ldots, |K'_\nu-K_\nu|$ ne peuvent exister, donc les adjoints considérés ont tous la dimension $\pi'-1$.

Aux systèmes $|K'_1|, |K'_2|, \ldots, |K'_\nu|$ correspondent sur F des systèmes linéaires $|(2L)_1|, |(2L)_2|, \ldots, |(2L)_\nu|$ appartenant au système bicanonique $|2L|$ de F. Supposons qu'il existe encore, dans $|2L|$, $\mu-\nu$ autres systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I. Soient $|(2L)_{\nu+1}|, |(2L)_{\nu+2}|, \ldots, |(2L_\mu|$ ces systèmes, $r'_{\nu+1}, r'_{\nu+2}, \ldots, r'_\mu$ leurs dimensions. Le système bicanonique de F ayant la dimension $p_a+\pi-1$, on a, par la théorie des homographies,

$$\nu(\pi'-1)+r'_{\nu+1}+r'_{\nu+2}+\ldots+r'_\mu+\mu = p'_\mu+\pi = p\pi'.$$

Observons que si $\mu = \nu$, cette relation donne $\nu = p$, ce qui est impossible, puisque $\nu \leqslant p-1$. On a donc $\mu > \nu$.

Aux systèmes $|(2L)_{\nu+1}|, \ldots, |(2L)_\mu|$ correspondent sur F' des systèmes linéaires que nous désignerons par $|K'_{\nu+1}|, \ldots, |K'_\mu|$. Ces systèmes ont tous le degré $4(\pi'-1)$ et le genre $3\pi'-2$, donc, d'après le théorème de Riemann-Roch, leur dimension est au moins égale à $\pi'-1$.

Le système $|K'_{\nu+1}|$ découpe sur une courbe K_1 une série d'ordre $2\pi'-2$ qui ne peut appartenir à la série canonique, puisque $|K'_{\nu+1}|$ est distinct de $|K'_1|$; c'est donc une série paracanonique, de dimension au plus égale à $\pi'-2$. Il en résulte qu'il existe certainement des courbes $K'_{\nu+1}$ qui contiennent K_1 comme partie. Le système $|K'_{\nu+1}-K_1|$ ne peut être que l'un des systèmes $|K_1|, |K_2|, \ldots, |K_\nu|$.

Les systèmes $|K'_2|, \ldots, |K'_\nu|$ découpent également sur une courbe K_1 des séries paracanoniques; donc les systèmes $|K'_2-K_1|, \ldots, |K'_\nu-K_1|$ existent et coïncident, dans un certain ordre, avec $\nu-1$ des systèmes $|K_1|, |K_2|, \ldots, |K_\nu|$. Celui de ces systèmes qui n'est pas rencontré coïncide avec $|K'_{\nu+1}-K_1|$.

Répétant le même raisonnement pour $|K'_{\nu+2}|$, on voit que ce système doit nécessairement coïncider avec $|K'_{\nu+1}|$, et ainsi de suite. On en conclut $\mu = \nu+1$. La dimension de $|K'_{\nu+1}|$ est $r'_{\nu+1} = (p-\nu)\pi'-1$.

La surface F', de genre arithmétique $p'_a = 0$, a le genre linéaire π' et par conséquent possède un système bicanonique de dimension $\pi'-1$. A ce système correspond sur F un système de courbes bicanoniques appartenant à l'involution I. On en conclut que le système bicanonique de F' est l'un des systèmes $|K'_1|, |K'_2|, \ldots, |K'_\nu|, |K'_{\nu+1}|$.

Supposons que le système bicanonique de F' soit $|K'_1|$. Le système $|K'_1|$ contient $|K_2|$ comme partie et le système $|K'_2|$ contient $|K_1|$ comme partie. On a $K'_1 \equiv K_2+K_i$, $K'_2 \equiv K_1+K_j$.

On a ensuite $K''_1 \equiv K'_2+K_i \equiv K_1+K_i+K_j$ et le système bicanonique est par hypothèse $|K'_1| = |K''_1-K_1| = |K_i+K_j|$.

On doit donc avoir $j = 2$. Mais alors, on aurait $|K_2'-K_2| = |K_1|$ et les courbes K_1 seraient des courbes canoniques de F', ce qui est impossible.

Pour la même raison, aucun des systèmes $|K_2|, \ldots, |K_\nu|$ ne peut être le système bicanonique de F'. Ce système bicanonique est donc $|K'_{\nu+1}|$ et on a $r'_{\nu+1} = \pi'-1$, d'où $\nu = p-1$.

Si une surface algébrique F de genre arithmétique $p_a > 0$ dont les systèmes canonique et bicanonique ne sont pas composés au moyen d'un faisceau contient une involution cyclique régulière d'ordre $p = p_a+1$, privée de points unis, son système canonique contient $p-1$ systèmes linéaires appartenant à l'involution, le système bicanonique en contient p. La surface F', image de l'involution, est dépourvue de courbe canonique et possède un système bicanonique irréductible.

5. Sur le système canonique $|L|$ de F, T agit comme une homographie cyclique ayant $p-1$ axes ponctuels. Si ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité, on peut affecter une puissance de ε à chacun de ces axes ponctuels. Précisément, à l'axe constitué par le système $|L_i|$, nous attacherons le nombre ε^i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$. Il est alors facile de former les systèmes bicanoniques partiels de F appartenant à l'involution I.

A la courbe L_i+L_j est attaché le nombre ε^{i+j}. Les courbes formées de deux des courbes $L_1, L_2, \ldots, L_{p-1}$ auxquelles sont attachées des nombres égaux appartiennent à un même des systèmes linéaires $|(2L)_1|, \ldots, |(2L)_{p-1}|$.

Pour former le système $|(2L)_1|$, tenons compte du fait que le système $|K_1'|$ ne peut contenir la courbe K_1. Parmi les courbes L_i+L_j appartenant au système $|(2L)_1|$, ne peut donc figurer la courbe L_1. On en conclut qu'à ce système est attaché le nombre ε. En passant à la surface F', on a

$$K_1' \equiv K_2+K_{p-1} \equiv K_3+K_{p-2} \equiv \ldots$$

De même, aux systèmes $|(2L)_2|, \ldots, |(2L)_{p-1}|$ sont attachés respectivement les nombres $\varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-1}$.

Il en résulte qu'au système $|(2L)_p|$ est attaché le nombre $\varepsilon^0 = 1$. On a donc

$$K_p' \equiv K_1+K_{p-1} \equiv K_2+K_{p-2} \equiv \ldots$$

On obtient ainsi le système bicanonique de la surface F'. Nous représenterons dorénavant ce système par $|K_0'|$.

Pour poursuivre ces développements, il importe de mettre en évidence la parité de p.

6. Supposons p impair et posons $p = 2n+1$. D'après ce qui précède, nous avons

$$K_1' \equiv K_2+K_{2n} \equiv K_3+K_{2n-1} \equiv \ldots \equiv 2K_{n+1},$$
$$K_2' \equiv 2K_1 \equiv K_3+K_{2n} \equiv K_4+K_{2n-1} \equiv \ldots \equiv K_{n+1}+K_{n+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$K_{2n}' \equiv 2K_n \equiv K_1+K_{2n-1} \equiv K_2+K_{2n-2} \equiv \ldots \equiv K_{n-1}+K_{n+1}.$$

Quant au système bicanonique, il est donné par

$$K_0' \equiv K_1+K_{2n} \equiv K_2+K_{2n-1} \equiv \ldots \equiv K_n+K_{n+1}.$$

Le système tricanonique est l'adjoint $|K_0''|$ du système bicanonique $|K_0'|$. On a par exemple $K_0'' \equiv K_1'+K_{2n} \equiv K_2+2K_{2n} \equiv \ldots$

Comme vérification, formons le système bicanonique en partant de $|K_1|$, c'est-à-dire formons le système $|K_1''-K_1|$, où les courbes K_1'' sont les adjointes aux courbes K_1', c'est-à-dire les bi-adjointes aux courbes K_1. Nous avons

$$K_1'' \equiv K_2'+K_{2n} \equiv 2K_1+K_{2n}, \qquad K_1''-K_1 \equiv K_1+K_{2n} \equiv K_0'.$$

Nous avons utilisé ce procédé dans le cas $p = 5$ pour construire une surface F' de genres $p_a = p_g = 0, P_2 = 2, P_3 = 4$ (voir [3] et [5]).

7. Supposons maintenent p pair et posons $p = 2n$. Nous avons

$$K_1' \equiv K_2+K_{2n-1} \equiv K_3+K_{2n-2} \equiv \ldots \equiv K_n+K_{n+1},$$
$$K_2' \equiv 2K_1 \equiv K_3+K_{2n-1} \equiv \ldots \equiv 2K_{n+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$K_{2n-1}' \equiv K_1+K_{2n-2} \equiv K_2+K_{2n-3} \equiv \ldots \equiv K_{n-1}+K_n.$$

Le système bicanonique est donné par

$$K_0' \equiv K_1+K_{2n-1} \equiv K_2+K_{2n-2} \equiv \ldots \equiv 2K_n.$$

Il se présente ici une particularité intéressante, à savoir que le système bicanonique contient une courbe K_n comptée deux fois sans que K_n soit une courbe canonique. S'il en était autrement, le système $|K_n'|$ devrait contenir le système $|K_n|$ et on aurait $|K_n'| = |2K_n|$, ce qui est impossible.

Le système bicanonique d'une surface algébrique peut contenir une courbe comptée deux fois sans que cette courbe, comptée une fois, soit une courbe canonique de la surface.

Le système tricanonique $|K_0''|$ de F' est donné par

$$K_0'' \equiv K_2+2K_{2n-1} \equiv 2K_1+K_{2n-2} \equiv \ldots$$

Formons le système $|K_1''-K_1|$. On a

$$|K_1''-K_1| = |K_2'+K_{2n-1}-K_1| = |K_1+K_{2n-1}| = |K_0'|,$$

ce qui montre bien que $|K_0'|$ est le système bicanonique de F'.

Pour $p = 8$, nous avons pu construire par ce procédé une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 3$, $P_3 = 7$ (voir [11]).

8. Nous avons désigné par $r_1, r_2, \ldots r_{p-1}$ les dimensions des systèmes linéaires $|L_1|, |L_2|, \ldots, |L_{p-1}|$. D'après la théorie des homographies cycliques, on a

$$r_1+r_2+\ldots+r_{p-1}+p-1 = p_g.$$

Si la surface F est régulière, cette relation prend la forme

$$r_1+r_2+\ldots+r_{p-1}+p-1 = p_a = p-1,$$

d'où $r_1 = r_2 = \ldots = r_{p-1} = 0$. Donc, si la surface F est régulière, les courbes $K_1, K_2, \ldots, K_{p-1}$ sont isolées.

Inversement, si ces courbes sont isolées, on a $p_g = p-1 = p_a$ et F est régulière.

TRAVAUX CITÉS

[1] L. Godeaux, *Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité*, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1914, p. 362-368.

[2] — *Exemple de surface de diviseur supérieur à l'unité*, Bulletin des Sciences Mathématiques, 1915, p. 182-185.

[3] — *Sur une surface algébrique de genre zéro et de bigenre deux*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, 2^{me} série, 1931, p. 26-37.

[4] — *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface régulière*, Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, 1932, p. 672-679.

[5] — *Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro dont le genre linéaire est égal à deux*, ibidem, 1933, p. 26-37.

[6] — *Sur certaines involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface algébrique*, ibidem, 1933, p. 986-991.

[7] — *Sur la construction de surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls*, ibidem, 1934, p. 8-11.

[8] — *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls*, Actualités Scientifiques 123, Paris 1934.

[9] — *Remarques sur les surfaces algébriques possédant une involution cyclique privée de points unis*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 20 (1947), p. 241-250.

[10] — *Applications de la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*, Colloque de Géométrie algébrique, Liège et Paris 1949, p. 177-195.

[11] — *Sur la construction de surfaces non rationnelles de genres zéro*, Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, 1949, p. 688-693.

[12] — *Remarques sur la construction de surfaces algébriques non rationnelles de genre zéro*, ibidem, 1949, p. 971-975.

Reçu par la Rédaction le 26. 8. 1957

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

POISSON DISTRIBUTIONS ON COMPACT ABELIAN TOPOLOGICAL GROUPS

BY

K. URBANIK (WROCŁAW)

1. Let G be a compact Abelian topological group. A regular completely additive measure μ defined on the class of all Borel subsets of G, with $\mu(G) = 1$, will be called a *probability distribution*. Let X_1, X_2 be the pair of independent G-valued random variables with the probability distributions μ_1, μ_2. Let us denote by λ the probability distribution of the random variable $X_1 \cdot X_2$, where the product is taken in the sense of group multiplication in G.

It is well known that $\lambda = \mu_1 * \mu_2$, where the convolution $*$ is defined by the formula

$$\mu_1 * \mu_2(E) = \int_G \mu_1(Ex^{-1})\mu_2(dx).$$

We say that a probability distribution μ is a *Poisson distribution with the parameter* x_0 $(x_0 \in G)$ if there exists a non-negative constant m such that

$$\mu(E) = \sum_{k \in K(E)} \frac{m^k}{k!} \exp(-m), \tag{1}$$

where $K(E)$ denotes the set of all indices k for which $x_0^k \in E$.

We say that a probability distribution μ is a *composed Poisson distribution* if there exists a regular completely additive measure ν defined on the class of all Borel subsets of G, with $\nu(G) < \infty$, such that

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^{*k}}{k!} \exp\big(-\nu(G)\big), \tag{2}$$

where

$$\nu^{*0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad e \in E, \\ 0 & \text{if} \quad e \notin E, \end{cases}$$

$$\nu^{*(k+1)} = \nu * \nu^{*k} \quad (k = 0, 1, \ldots),$$