COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

О ПРОДОЛЖЕНИИ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ПОКРЫТИЙ

М. КАТЕТОВ (ПРАГА)

Настоящая заметка имеет в значительной мере обзорный характер. Многие содержащиеся в ней результаты уже указаны в литературе или легко выводятся из уже известных теорем; однако, возможно, не лишено интереса их изложение вместе с некоторыми, быть может, новыми соображениями. В связи с указанным, доказательства значительно сокращены; очевидные доказательства (или части доказательств) опускаются.

1. Если каждому элементу a некоторого непустого „множества индексов" A, сопоставлен элемент (обычно, множество) X_a, то мы говорим, что *дана система* $\{X_a;\ a\in A\}$ или, короче, $\{X_a\}$; множество всех конечных $a\subset A$ будем обозначать через $[A]$. Пусть имеются системы множеств $\{X_a;\ a\in A\}$, $\{Y_\beta;\ \beta\in B\}$. Если для каждого a имеем $X_a\subset Y_\beta$ при подходящем β, то $\{X_a\}$ *вписана в* $\{Y_\beta\}$. При $A=B$ называем $\{X_a\}$, $\{Y_\beta\}$ *комбинаторно подобными* и пишем $\{X_a\}\cong\{Y_a\}$, если для любого $a\in[A]$ множества $\bigcap\limits_{a\in a}X_a$, $\bigcap\limits_{a\in a}Y_a$ или оба равны $\emptyset$, или оба непусты. Если для всякого β имеем $X_a\cap Y_\beta=\emptyset$ только для конечного числа индексов a, то $\{X_a\}$ *конечна относительно* $\{Y_\beta\}$. Если $\{X_a\}$ конечна относительно $\{X_a\}$, то $\{X_a\}$ *звездно конечна. Кратностью* $\{X_a\}$ называется или ∞, или же, если оно существует, наименьшее $n=0,1,2,\ldots$ такое, что $\bigcap\limits_{a\in a}X_a=\emptyset$ для $a\subset A$, содержащих более n элементов.

Пространством мы называем топологическое пространство, удовлетворяющее аксиомам I-III из [6]. В дальнейшем буква P всегда обозначает пространство, буквы (часто с индексами) F, G, H, S, U, V, X — его подмножества (подпространства). Система $\{X_a\}$ называется *покрытием* подпространства $S\subset P$, если $\bigcup X_a=S$ [1], притом *открытым* (*замкнутым*), если X_a открыты (замкнуты) в S, *локально конечным*, если $\{X_a\}$ локально конечна в S; система $\{X_a\}$ называется

[1] При знаке соединения мы, как правило, опускаем индексы, так как обычно ясно по какому множеству индексов оно берется.

локально конечной в S, если $X_a \subset S$ и существует открытое покрытие S, относительно которого $\{X_a\}$ конечна. Если $S = P$, то мы обычно говорим просто о локально конечной системе, открытом покрытии и т. п. Общеизвестные определения и теоремы, применяемые в дальнейшем, мы не будем напоминать; их можно найти напр. в [4] и [6]. Отметим только, что P называется *счетно паракомпактным*, если в каждое его счетное открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие.

Напомним теперь несколько теорем (доказательство 1.1 не представляет труда; доказательство 1.2 содержится напр. в [1]; 1.3 — в [8]; 1.4 — в [3] (см. также [5]); 1.5 — в [7]).

1.1. *Если* $\{X_a; a \in A\}$ *локально конечна в* $S \subset P$, *то* $\{\bigcap_{a \in \alpha} X_a; \alpha \in [A]\}$ *также локально конечна в* S.

1.2. *Если* P *нормально, то для любого локально конечного открытого покрытия* $\{G_a\}$ *существуют замкнутые* $F_a \subset G_a$ *такие, что* $\bigcup F_a = P$.

1.3. *Если* P *нормально,* $F_n \subset U_n \subset P$, $n = 1, 2, \ldots$, $\bigcup F_n = P$, F_n *замкнуты,* U_n *открыты, то в* $\{U_n\}$ *можно вписать счетное звездно конечное открытое покрытие.*

1.4. *Если* P *нормально,* $F_k \subset P$ *замкнуты,* $k = 1, 2, \ldots$, $\{F_k\}$ *локально конечна в* $\bigcup F_k$, *то существуют открытые* $G_k \supset F_k$ *такие, что* $\{G_k\} \cong \{F_k\}$.

1.5. *Для того, чтобы нормальное* P *было счетно паракомпактным, необходимо и достаточно каждое из следующих условий:* (a) *в любое счетное открытое покрытие можно вписать счетное звездно конечное открытое покрытие;* (b) *если* $U_n \subset P$ *открыты,* $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = P$, *то существуют замкнутые* $F_n \subset U_n$ *такие, что* $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = P$; (c) *если* $F_n \subset P$ *замкнуты,* $F_n \supset F_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, *то существуют открытые* $G_n \supset F_n$ *такие, что* $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$.

2. Назовем множества $X_k \subset P$, $k = 1, \ldots, n$, *отделимыми* в пространстве P, если существуют открытые $G_k \supset X_k$ такие, что $\bigcap_{k=1}^{n} G_k = \emptyset$.

2.1. *Пусть* $X_a \subset U_a \subset P$, U_a *открыты,* $\{U_a; a \in A\}$ *локально конечна. Существуют открытые* G_a *такие, что* $X_a \subset G_a \subset U_a$ *и* $\bigcap_{i=1}^{n} G_{a_i} = \emptyset$ *всякий раз, когда* $X_{a_1}, \ldots, X_{a_n}$ *отделимы.*

Доказательство. Достаточно показать, что из указанных предположений вытекает (при любом $a_0 \in A$) существование открытого G

такого, что (1) $X_{a_0} \subset G \subset U_{a_0}$, (2) если $X_{a_0}, X_{a_1}, \ldots, X_{a_n}$ отделимы, то отделимы также $G, X_{a_1}, \ldots, X_{a_n}$. Действительно, тогда мы сможем легко доказать 2.1, напр. на основании трансфинитной индукции (вполне упорядочив A и постепенно заменяя X_a через G_a). Обозначим A^* множество $\alpha \in [A]$ таких, что $a_0 \in \alpha$, множества X_a, $a \in \alpha$, отделимы в P. Для каждого $\alpha \in A^*$ найдем открытые $V_a^\alpha \supset X_a$, $a \in \alpha$, такие, что $\bigcap_{a \in \alpha} V_a^\alpha = \emptyset$; очевидно, можно еще потребовать $V_a^\alpha \subseteq U_a$. Для $\alpha \in A^*$ положим $S_\alpha = \bigcap_{a \in \alpha - (a_0)} V_a^\alpha$; пусть $S = \bigcup S_\alpha$. Очевидно, $\overline{S}_\alpha \cap X_{a_0} = \emptyset$; из 1.1 вытекает, что $\{S_\alpha\}$ локально конечна, так что $\overline{S} = \bigcup \overline{S}_\alpha$; итак, $\overline{S} \cap X_{a_0} = \emptyset$. Теперь достаточно положить $G = U_{a_0} - \overline{S}$.

2.2. Теорема. *Если* P *нормально,* $F_a \subset U_a \subset P$, F_a *замкнуты,* U_a *открыты,* $\{U_a\}$ *локально конечна, то существуют открытые* G_a *такие, что* $F_a \subset G_a \subset U_a$, $\{F_a\} \cong \{G_a\}$.

Эта известная теорема (см. [9]) вытекает из 2.1 и того, что в нормальном P замкнутые F_k такие, что $\bigcap_{k=1}^{n} F_k = \emptyset$, отделимы.

2.3. *Если* P *наследственно нормально,* $S \subset P$, $X_k \subset S$, $k = 1, \ldots, n$, *и* $X_1, \ldots, X_n$ *отделимы в* S, *то они отделимы в* P.

Эта лемма хорошо известна; см. напр. [3], 1.16.

2.4. Теорема. *Если* P *наследственно нормально,* $X_a \subset U_a \subset P$, U_a *открыты в* P, X_a *открыты в* $X = \bigcup X_a$, $\{U_a\}$ *локально конечна, то существуют открытые* $G_a \subset U_a$ *такие, что* $X \cap G_a = X_a$, $\{G_a\} \cong \{X_a\}$.

3. Система $\{X_a\}$, $X_a \subset P$, называется *дискретной* (в P), если она локально конечна и $\overline{X}_a$ попарно не пересекаются. Пространство P называется *коллективно нормальным*, если для любой дискретной $\{X_a\}$ существуют открытые $G_a \supset X_a$ такие, что $\{G_a\} \cong \{X_a\}$.

3.1. *Для того, чтобы нормальное* P *было коллективно нормальным, необходимо и достаточно каждое из следующих условий:* (a) *если* $F_a \subset P$ *замкнуты,* $\{F_a\}$ *локально конечна и имеет конечную кратность, то существуют открытые* $G_a \supset F_a$ *такие, что* $\{G_a\}$ *локально конечна;* (b) *если* $S \subset P$ *замкнуто,* $\{F_a\}$ *(соответственно,* $\{H_a\}$*) является локально конечным замкнутым (открытым) покрытием* S, $F_a \subset H_a$, *то существуют открытые* G_a *такие, что* $F_a \subset S \cap G_a \subset H_a$, $\{G_a\}$ *локально конечна.*

Доказательство. I. Пусть P коллективно нормально. Докажем (a) индукцией по кратности n системы $\{F_a; a \in A\}$. Легко установить, что (a) верно для $n = 1$. Пусть (a) доказано для $n \leqslant m$; пусть $\{F_a\}$ имеет кратность $m+1$. Обозначим A^* множество всех $\alpha \subset A$, состоящих ровно из $m+1$ элементов. Тогда $\{\bigcap_{a\epsilon\alpha} F_a;\ a\epsilon A^*\}$ дискретна и потому существуют (так как (a) верно для $n=1$) открытые $U_a \supset \bigcap_{a\epsilon\alpha} F_a$ такие, что $\{U_a;\ a\epsilon A^*\}$ локально конечна; множества U_a притом можно подобрать так, чтобы $U_a \cap F_a = \emptyset$ при a non$\,\epsilon\,a$. Положим $U = \bigcup U^a$. Тогда $\{F_a - U\}$ имеет кратность $\leqslant m$, так что существуют открытые $V_a \supset F_a - U$ такие, что $\{V_a\}$ локально конечна. Положим $G_a = V_a \cup \bigcup_{a\epsilon\alpha} U_a$. Легко установить, что G_a имеют нужные свойства.

II. Докажем, что из (a) вытекает (b). Обозначим S_n (соответственно, T_n) множество $x\epsilon S$ принадлежащих не более чем n множествам F_a (соответственно, H_a). Легко видеть, что S_n открыты в S, T_n замкнуты, $\bigcup T_n = S$. Из 1.3 и 1.2 вытекает, что существует вписанное в $\{S_n\}$ счетное звездно конечное замкнутое покрытие $\{\Phi_k\}$ пространства S. Из 1.4 вытекает, что существуют открытые (в P) $U_k \supset \Phi_k$ такие, что $\{U_k\}$ звездно конечна. Найдем еще открытые V_k такие, что $U_k \supset \overline{V}_k$, $V_k \supset \Phi_k$; тогда $\{V_k\}$ локально конечна. Для $k=1,2,\ldots$ система $\{F_a \cap \Phi_k\}$ локально конечна и имеет конечную кратность, так что существуют открытые $G^*_{a,k} \supset F_a \cap \Phi_k$ такие, что $\{G^*_{a,k}\}$ локально конечна. Теперь достаточно, взяв еще открытые W_a такие, что $S \cap W_a = H_a$, положить $G_a = W_a \cap \bigcup_k (G^*_{a,k} \cap V_k)$.

III. Из (b) вытекает на основании 2.2, что P коллективно нормально.

3.2. Теорема. *Для того, чтобы нормальное P было коллективно нормальным, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого $S \subset P$ и его локально конечного открытого покрытия $\{X_a\}$ существовали открытые G_a такие, что $\bigcup G_a \supset S$, $S \cap G_a \subset X_a$, $\{G_a\}$ локально конечна.*

Эта теорема, легко вытекающая из 3.1 (и 1.2), известна; см. [2].

3.3. Теорема. *Если P коллективно нормально, то для любого замкнутого $S \subset P$ и его локально конечного открытого покрытия $\{X_a\}$ существуют открытые G_a такие, что $\bigcup G_a \supset S$, $G_a \cap S \subset X_a$, $\{G_a\}$ локально конечна, $\{G_a \cap S\} \cong \{X_a\} \cong \{G_a\} \cong \{\overline{G}_a\}$.*

Наоборот, если для P выполняется это условие, то P коллективно нормально.

Доказательство. Существование упомянутых G_a получим так, что сначала подберем (легко доказать, что это возможно) замкнутые $F_a \subset X_a$ так, чтобы $\bigcup F_a = S$, $\{F_a\} \cong \{X_a\}$, применим 3.1, а затем 2.2.

4. Назовем пространство *сильно нормальным*, если оно коллективно нормально и счетно паракомпактно.

4.1. Теорема. *Нормальное P сильно нормально, если и только если для любой локально конечной $\{X_a\}$, $X_a \subset P$, существуют открытые $G_a \supset X_a$ такие, что $\{G_a\}$ локально конечна в P.*

Доказательство. I. Если P сильно нормально, положим $F_a = \overline{X}_a$, $S = \bigcup F_a$, так что S замкнуто. Дальнейший ход доказательства аналогичен II части доказательства 3.1 с той разницей, что существование счетного звездно конечного замкнутого покрытия $\{\Phi_k\}$, вписанного в $\{S_n\}$, вытекает из 1.5(a) и 1.2.

II. Если условие выполняется, то коллективная нормальность вытекает из 3.1, счетная паракомпактность из 1.5 (c), так как если F_n замкнуты, $F_n \supset F_{n+1}$, $n=1,2,\ldots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, то $\{F_n\}$ локально конечна и потому существуют открытые $G_n \supset F_n$ такие, что $\{G_n\}$ локально конечна, и, следовательно, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$.

4.2. Теорема. *Если P сильно нормально, то для любой локально конечной системы $\{F_a\}$ замкнутых множеств существуют открытые $G_a \supset F_a$ такие, что $\{G_a\}$ локально конечна, $\{G_a\} \cong \{F_a\}$.*

4.3. Теорема. *Если P сильно нормально, то для любого замкнутого $S \subset P$ и его локально конечного открытого покрытия $\{X_a\}$ существуют открытые G_a такие, что $G_a \cap S = X_a$, $\{G_a\}$ локально конечна.*

4.4. Теорема. *Если P сильно нормально и наследственно нормально, то для любого замкнутого $S \subset P$ и его локально конечного открытого покрытия $\{X_a\}$ существуют открытые G_a такие, что $G_a \cap S = X_a$, $\{G_a\}$ локально конечна, $\{G_a\} \cong \{X_a\}$.*

Это вытекает из 4.3 и 2.4.

4.5. Замечание. Легко установить, что из условия указанного в 4.3 вытекает, что P коллективно нормально, а из условия в 4.4 вытекает, что P коллективно нормально и наследственно нормально. Автору не удалось найти ответа на следующие вопросы: **P 243** достаточно ли условие в 4.3 для сильной нормальности нормального P, **P 244.** необходимо ли оно для коллективной нормальности P, **P 245.** достаточно ли условие в 4.4 для того, чтобы P было сильно нормальным, **P 246.** необходимо ли оно для того, чтобы P было коллективно нормальным и наследственно нормальным.

5. Пусть $X_a \subset P$. Назовем систему $\{X_a\}$ *равномерно локально конечной* (в P), если существует локально конечное открытое покрытие $\{U_\beta\}$ пространства P, относительно которого она конечна.

5.1. Теорема. *Пусть $X_\alpha \subset P$. Для того, чтобы $\{X_\alpha\}$ была равномерно локально конечной, необходимо и достаточно, чтобы существовали открытые $G_\alpha \supset \overline{X}_\alpha$ такие, что $\{G_\alpha\}$ локально конечна.*

Доказательство. I. Пусть $\{X_\alpha\}$ равномерно локально конечна; пусть $\{U_\beta\}$ имеет указанные свойства. Обозначим G_α объединение всех U_β, пересекающих X_α; легко видеть, что G_α имеют нужные свойства.

II. Пусть $G_\alpha \supset \overline{X}_\alpha$ открыты, $\{G_\alpha; \alpha \epsilon A\}$ локально конечна. Для $a \epsilon [A]$ положим $U_a = \bigcap_{\alpha \epsilon a} G_\alpha - \bigcup_{\alpha\, \mathrm{non}\, \epsilon a} \overline{X}_\alpha$ (в частности, для $a = \emptyset$ имеем $U_a = P - \bigcup \overline{X}_\alpha$). Легко видеть, что $\bigcup U_a = P$; из 1.1 вытекает, что $\{U_a\}$ локально конечна; если $U_a \frown \overline{X}_\alpha \cong \emptyset$, то, очевидно, $\alpha \epsilon a$; итак, $\{U_a\}$ имеет нужные свойства.

5.2. Теорема. *Если P нормально, $\{X_\alpha\}$ равномерно локально конечна в P, то существует равномерно локально конечное открытое покрытие $\{V_\beta\}$, относительно которого $\{X_\alpha\}$ конечна.*

Доказательство. Взяв U_β указанные в определении, найдем на основании 1.2 открытые V_β такие, что $\overline{V}_\beta \subset U_\beta$, $\bigcup V_\beta = P$, и применим к ним 5.1.

5.3. Теорема. *Для того, чтобы нормальное P было коллективно нормальным, необходимо и достаточно каждое из следующих условий:* (a) *если система $\{X_\alpha\}$ равномерно локально конечна в замкнутом $S \subset P$, то она равномерно локально конечна в P*; (b) *для любого замкнутого $S \subset P$ и его равномерно локального конечного открытого покрытия $\{X_\alpha\}$ существует равномерно локально конечное открытое покрытие $\{G_\alpha\}$ пространства P такое, что $G_\alpha \frown S = X_\alpha$.*

Доказательство. I. Докажем, что в коллективно нормальном P имеет место (b). Действительно, согласно 5.1 существуют открытые в S множества $H_\alpha \supset \overline{X}_\alpha$ такие, что $\{H_\alpha\}$ локально конечна; теперь применим 3.1.

II. Из (b) вытекает (a) на основании 5.2.

III. Если имеет место (a), а система $\{F_\alpha\}$ замкнутых множеств дискретна, то, очевидно, $\{F_\alpha\}$ равномерно локально конечна в $S = \bigcup F_\alpha$ и, следовательно, в P. Теперь применим 5.1, а затем 2.2.

5.4. Теорема. *Для того, чтобы нормальное пространство было сильно нормальным, необходимо и достаточно, чтобы каждая локально конечная система его подмножества была равномерно локально конечной.*

Эта теорема вытекает непосредственно из 4.1 и 5.1.

5.5. Теорема. *Если P коллективно нормально и наследственно нормально, то для любого замкнутого $S \subset P$ и его равномерно локально конечного покрытия $\{X_\alpha\}$ существуют открытые G_α такие, что $G_\alpha \frown S = X_\alpha$, $\{G_\alpha\}$ равномерно локально конечна, $\{G_\alpha\} \cong \{X_\alpha\}$.*

Это вытекает из 5.3 и 2.4.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Dieudonné, *Une généralisation des espaces compacts*, Journal des Mathématiques pures et appliquées (9) 23 (1944), стр. 65-76.

[2] C. H. Dowker, *On a theorem of Hanner*, Arkiv för Matematik 2 (1952), стр. 307-313.

[3] М. Катетов, *О размерности несепарабельных пространств I*, Чехословацкий Математический Журнал 2 (77) (1952), стр. 333-368.

[4] J. L. Kelley, *General topology*, 1955.

[5] C. Kuratowski, *Sur le prolongement des fonctions continues et les transformations en polytopes*, Fundamenta Mathematicae 24 (1935), стр. 259-268.

[6] — *Topologie I*, Warszawa-Wrocław 1948.

[7] M. J. Mansfield, *On countably paracompact spaces*, Canadian Journal of Mathematics 9 (1957), стр. 443-449.

[8] K. Morita, *Star-finite coverings and star-finite property*, Mathematica Japonicae 1 (1948), стр. 60-68.

[9] — *On the dimension of normal spaces II*, Journal of the Mathematical Society of Japan 2 (1950), стр. 16-23.

Reçu par la Rédaction le 30. 11. 1957