COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

SUR LE TYPE DIFFÉRENTIEL ANALLAGMATIQUE D'UNE COURBE PLANE OU GAUCHE

PAR

E. ČECH (PRAGUE)

Une courbe C de l'espace euclidien E_n sera appelée *ponctuellement régulière* si on peut exprimer les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'un point de C en fonctions n fois continûment différentiables d'un paramètre l tel que le déterminant $|d^i x_j / dl^j|$ soit partout $\neq 0$. Une telle courbe C possède en chaque point T_0 une tangente T_1, un plan osculateur $T_2, \ldots,$ un hyperplan osculateur T_{n-1}. Chaque transformée projective de C est aussi ponctuellement régulière; s'il en est de même aussi pour les transformées dualistiques de C, nous appellerons C *projectivement régulière*. C possède alors des paramètres l projectivement réguliers qui ont la propriété suivante: pour chaque i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, les coordonnées non-homogènes de T_i sont des fonctions continûment différentiables (au moins une fois) et pour chaque l, la dérivée d'une au moins de ces fonctions est différente de zéro. Pour chaque paramètre l projectivement régulier et pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$ posons, $r_i(l) = \infty$ si les coordonnées non homogènes de $T_i(l)$ sont infiniment différentiables, et $r_i(l) = r (= 1, 2, \ldots)$ si ces coordonnées admettent des dérivées continues d'ordre r, mais non d'ordre $r+1$; soit $r_i(C)$ la valeur maximum de $r_i(l)$ si l parcourt tous les paramètres projectivement réguliers de C.

On voit sans peine que, si $r_i(C) = \infty$ pour une valeur de i, il en est de même pour chaque i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ et que, si $r_i(C) < \infty$, on a $|r_i(C) - r_{i+1}(C)| \leqslant 1$ pour chaque i $(0 \leqslant i \leqslant n-2)$. Mais le problème consistant à déterminer, pour tout n, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une $C \subset E_n$ projectivement régulière telle que les nombres $r_i(C)$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ aient des valeurs données est très difficile. Pour $n = 2, 3, 4$, on connaît ces conditions (voir mes Mémoires [1], [2]) que je vais rappeler ici pour $n = 2$ et pour $n = 3$.

Posons $r = \min\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} r_i(C)$ et supposons $r < \infty$. Pour $n = 2$, on a $r_0(C) = r_1(C) = r \geqslant 2$. Si $r_0(l) = r$, on a $r_1(l) = r-1$; si $r_1(l) = r$, on a $r_0(l) = r-1$.

Pour $n = 3$, on a $2 \leqslant r \leqslant \infty$. Pour $r < \infty$, quatre cas sont possibles:

I. On a $r_0(C) = r_1(C) = r_2(C) = r$. Si $r_0(l) = r$, on a $r_1(l) = r_2(l) = r-1$. Si $r_1(l) = r$, on a $r_0(l) = r_2(l) = r-1$. Si $r_2(l) = r$, on a $r_0(l) = r_1(l) = r-1$.

II. On a $r_0(C) = r_1(C) = r_2(C) = r$. Si $r_0(l) = r$, on a $r_1(l) = r-1$, $r_2(l) = r$. Si $r_1(l) = r$, on a $r_0(l) = r_2(l) = r-1$. Si $r_2(l) = r$, on a $r_0(l) = r$, $r_1(l) = r-1$.

III. On a $r_0(C) = r+1$, $r_1(C) = r_2(C) = r$. Si $r_0(l) = r+1$, on a $r_1(l) = r$, $r_2(l) = r-1$. Si $r_1(l) = r$, on a $r_0(l) \geqslant r$, $r_2(l) = r-1$. Si $r_2(l) = r$ on a $r_0(l) = r_1(l) = r-1$.

IV. On a $r_0(C) = r_1(C) = r$, $r_2(C) = r+1$. Si $r_0(l) = r$, on a $r_1(l) = r_2(l) = r-1$. Si $r_1(l) = r$, on a $r_0(l) = r-1$, $r_2(l) \geqslant r$. Si $r_2(l) = r+1$, on a $r_0(l) = r-1$, $r_1(l) = r$.

Aux notions précédentes de nature projective correspondent des notions analogues appartenant à la géométrie anallagmatique (géométrie du groupe de Möbius). Une courbe $C \subset E_n$ sera dite *anallagmatiquement régulière* si C est la projection stéréographique d'une courbe $\Gamma \subset E_{n+1}$ projectivement régulière, située sur une hypersphère de E_{n+1}. Pour simplifier le langage, supposons que C soit non seulement anallagmatiquement, mais aussi projectivement régulière. Une telle $C \subset E_n$ possède en chaque point K_0 un cercle osculateur $K_1, \ldots$, une hypersphère osculatrice K_{n-1}. C possède des *paramètres anallagmatiquement réguliers* qui ont la propriété suivante: pour chaque i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, les coordonnées non-homogènes de $K_i(l)$ sont des fonctions continûment différentiables (au moins une fois) et pour chaque l la dérivée d'une au moins de ces fonctions est $\neq 0$. Pour chaque paramètre l anallagmatiquement régulier et pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$ posons $s_i(l) = \infty$ si les coordonnées non homogènes de $K_i(l)$ sont infiniment différentiables, et $s_i(l) = s$ $(= 1, 2, 3, \ldots)$ si elles ont des dérivées continues d'ordre s, mais non d'ordre $s+1$; soit $s_i(C)$ la valeur maximum de $s_i(l)$ si l parcourt tous les paramètres anallagmatiquement réguliers de C. On a donc $s_0(C) = r_0(C)$. Si $s_i(C) = \infty$ pour une valeur de C, on a $s_i(C) = \infty$ pour chaque C $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. Si $s_i(C) < \infty$, on a $|s_0(C) - s_1(C)| \leqslant 2$ et $|s_i(C) - s_{i+1}(C)| \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n-2)$.

Pour $n = 2$ et pour $n = 3$, je vais indiquer les relations nécessaires et suffisantes entre les nombres $s_i(C)$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. Les démonstrations seront publiées ailleurs. Posons $s = \min\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} s_i(C)$ et admettons $s < \infty$.

Pour $n = 2$, on a $s_0(C) = s+1$, $s_1(C) = s \geqslant 2$. Si $s_0(l) = s+1$, on a $s_1(l) = s-1$. Si $s_1(l) = s$ on a $s_0(l) = s-1$.

Pour $n = 3$, on a $2 \leqslant s \leqslant \infty$. Pour chaque $s < \infty$, quatre cas sont possibles:

I. $s_0(C) = s+2$, $s_1(C) = s_2(C) = s$. Si $s_0(l) = s+2$, on a $s_1(l) = s$, $s_2(l) = s-1$. Si $s_1(l) = s$, on a $s_0(l) \geqslant s$, $s_2(l) = s-1$. Si $s_2(l) = s$, on a $s_0(l) = s_1(l) = s-1$.

II. $s_0(C) = s+1$, $s_1(C) = s_2(C) = s$. Si $s_0(l) = s+1$, on a $s_1(l) = s_2(l) = s-1$. Si $s_1(l) = s$, on a $s_0(l) = s_2(l) = s-1$. Si $s_2(l) = s$, on a $s_0(l) = s_1(l) = s-1$.

III. $s_0(l) = s+1$, $s_1(l) = s_2(l) = s$. Si $s_0(l) = s+1$, on a $s_1(l) = s-1$, $s_2(l) = s$. Si $s_1(l) = s$, on a $s_0(l) = s_2(l) = s-1$. Si $s_2(l) = s$, on a $s_0(l) \geqslant s$, $s_1(l) = s-1$.

IV. $s_0(l) = s_2(l) = s+1$, $s_1(l) = s$. Si $s_0(l) = s+1$, on a $s_1(l) = s_2(l) = s-1$. Si $s_1(l) = s$, on a $s_0(l) = s-1$, $s_2(l) \geqslant s$. Si $s_2(l) = s+1$, on a $s_0(l) = s-1$, $s_1(l) = s$.

TRAVAUX CITÉS

[1] E. Čech, *Détermination du type différentiel d'une courbe à deux, trois ou quatre dimensions*, Czechoslovak Mathematical Journal 7 (82) (1957), nº 4, p. 599-631.

[2] — *Classe différentielle des courbes. Sections et projections*, Revue de Mathématiques pures et appliquées 2 (1957), p. 151-159.

Reçu par la Rédaction le 30. 11. 1957