COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI — DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI — 1958

REMARQUES SUR LA QUASI-HOMÉOMORPHIE

PAR

K. BORSUK (VARSOVIE)

Deux espaces métriques X et Y sont dits *quasi-homéomorphes* lorsqu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ des transformations continues φ de X en Y et ψ de Y en X telles que toutes les tranches $\varphi^{-1}(y)$, où $y \in Y$, et $\psi^{-1}(x)$, où $x \in X$, ont des diamètres plus petits que ε.

Il y a maintes propriétés topologiques qui restent invariantes lorsqu'on remplace un espace X par un autre Y quasi-homéomorphe à X (¹).

M. T. Ganea m'a posé récemment le problème suivant:

Soient X et Y deux espaces quasi-homéomorphes. Est-il vrai que l'homéomorphie de X à un sous-ensemble de l'espace euclidien n-dimensionnel E_n entraîne celle de l'espace Y?

Je vais construire, dans l'espace euclidien à 3 dimensions E_3, deux ensembles compacts quasi-homéomorphes X et Y (²), tels que X est homéomorphe à un sous-ensemble du plan euclidien E_2, tandis que Y ne l'est pas. Par cet exemple, le problème de M. Ganea va être résolu par la négative.

Désignons, pour tout $n = 1, 2, \ldots$, par A_n l'ensemble composé de nombre $1/n$ et de tous les nombres de la forme $1/n + 1/k$, où k parcourt tous les nombres entiers $\geqslant n^2$. En identifiant le nombre x avec le point $(x, 0, 0) \in E_3$, nous pouvons admettre que A_n est un sous-ensemble de l'espace E_3. Evidemment, les ensembles A_n sont compacts et disjoints deux à deux et leurs diamètres convergent vers 0.

En ajoutant à l'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset E_3$ le point $(0, 0, 0) \in E_3$, on obtient un ensemble compact et dénombrable $A = (0, 0, 0) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$.

Désignons maintenant par B_n le sous-ensemble de l'espace E_3 constitué par tous les points $(x, y, 0)$ avec $x \in A_n$ et $0 \leqslant y \leqslant 1/n$. Evidemment,

(¹) Voir C. Kuratowski et S. Ulam, *Sur un coefficient lié aux transformations continues d'ensembles*, Fundamenta Mathematicae 20 (1933), p. 252, ainsi que T. Ganea, *Simply connected spaces*, ibidem 38 (1951), p. 189.

(²) Il est facile de construire à l'aide d'eux deux continus X et Y ayant les mêmes propriétés réquises (remarque de A. Lelek).

B_n coïncide avec le produit cartésien de l'ensemble A_n par le segment $\langle 0, 1/n\rangle$. Il est clair que les diamètres $\delta(B_n)$ constituent une suite convergente vers 0.

Considérons maintenant deux ensembles C et D définis dans l'espace E_3 comme il suit:

$$C = \underset{(x,y,z)}{E}\,[(x,y,0)\in B_1;\ 0 \leqslant z \leqslant x-1],$$

$$D = \underset{(x,y,z)}{E}\,[(x,y,0)\in B_1;\ 0 \leqslant z \leqslant 1].$$

On démontre sans peine que l'ensemble C est homéomorphe à l'ensemble plan C^* défini par la formule:

$$C^* = K \cup L$$

où

$$K = \bigcup_{k=2}^{\infty} \underset{(x,y,0)}{E}\left[1+\frac{1}{k} \leqslant x \leqslant 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}\right),\ 0 \leqslant y \leqslant 1\right],$$

$$L = \underset{(1,y,0)}{E}\,[0 \leqslant y \leqslant 1].$$

Il est clair que l'ensemble D n'est homéomorphe à aucun ensemble plan, car il contient le carré composé de tous les points $(1, y, z)$ avec $0 \leqslant y \leqslant 1$ et $0 \leqslant z \leqslant 1$ et ce carré est un sous-ensemble frontière dans l'ensemble D. En posant maintenant

$$X = A \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \cup C, \qquad Y = A \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \cup D,$$

on obtient deux sous-ensembles compacts de l'espace E_3 dont le premier est homéomorphe à un ensemble plan, tandis que le deuxième ne l'est pas. Il ne reste qu'à prouver que X et Y sont quasi-homéomorphes.

Soient ε un nombre positif arbitrairement donné et soit n_ε un nombre entier si grand que le diamètre de l'ensemble $B_{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Soit Q le carré défini comme l'ensemble de tous les points $(u, v)\in E_2$ satisfaisant aux inégalités $0 \leqslant u \leqslant 1/n_\varepsilon$ et $0 \leqslant v \leqslant 1/n_\varepsilon$. Envisageons une transformation continue $\vartheta(y) = \big(u(y), v(y)\big)$ du segment $0 \leqslant y \leqslant 1/n_\varepsilon$ en carré Q tout entier. En posant $f_\varepsilon(x, y, 0) = \big(x, u(y), v(y)\big)$ pour tout $(x, y, 0)\in B_{n_\varepsilon}$, on obtient une transformation continue f_ε de l'ensemble B_{n_ε} en un ensemble D_ε homéomorphe à l'ensemble D. Le diamètre de B_{n_ε} étant $< \varepsilon$, toutes les tranches de f_ε ont des diamètres $< \varepsilon$.

Nous allons maintenant prolonger la transformation f_ε à l'ensemble X tout entier de façon que les diamètres des tranches restent $< \varepsilon$ et que l'ensemble $f_\varepsilon(X)$ soit homéomorphe à Y. A ce but, désignons par ω la fonction continue, définie dans l'intervalle $1 \leqslant t \leqslant 2$ par les formules

$$\omega(t) = \begin{cases} 1+1/n_\varepsilon & \text{lorsque} \quad 1 \leqslant t \leqslant 1+1/n_\varepsilon, \\ t & \text{lorsque} \quad 1+1/n_\varepsilon < t \leqslant 2. \end{cases}$$

En posant

$$f_\varepsilon(x, y, z) = \big(\omega(x), y, z\big) \quad \text{pour tout} \quad (x, y, z)\in C,$$

on voit sans peine que la fonction f_ε ainsi prolongée transforme l'ensemble C d'une façon continue en somme d'un nombre fini de rectangles-composantes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n_\varepsilon}$ de l'ensemble C et que les diamètres des tranches de f_ε sont $< \varepsilon$. Il ne reste donc qu'à poser

$$f_\varepsilon(x, y, z) = (x, y, z) \quad \text{pour tout} \quad (x, y, z)\in X - B_{n_\varepsilon} - C$$

afin d'obtenir une transformation continue de l'ensemble X en ensemble $(X - B_{n_\varepsilon} - C) \cup D_\varepsilon \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_{n_\varepsilon}$. Mais l'ensemble $X - B_{n_\varepsilon} - C$ est homéomorphe à l'ensemble $A \cup \big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big)$ et l'ensemble $D_\varepsilon \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_{n_\varepsilon}$ est homéomorphe à l'ensemble D. Ces ensembles étant compacts et disjoints, on en conclut qu'il existe une homéomorphie g transformant $f(X)$ en Y. Or la fonction $\varphi = gf_\varepsilon$ transforme X en Y et ses tranches ont des diamètres $< \varepsilon$.

Envisageons maintenant la fonction $f_\varepsilon^*(x, y, 0)$ définie pour tout point $(x, y, 0)\in B_{n_\varepsilon}$ par la formule

$$f_\varepsilon^*(x, y, 0) = \left(x, u(y), \left(\frac{1}{n_\varepsilon} - x\right)\cdot v(y)\right).$$

On voit immédiatement que la fonction f_ε^* ainsi définie transforme l'ensemble B_{n_ε} en un ensemble C_ε homéomorphe à l'ensemble C. Le diamètre de B_{n_ε} étant $< \varepsilon$, toutes les tranches de f_ε^* ont des diamètres $< \varepsilon$.

Nous allons maintenant prolonger la fonction f_ε^* à l'ensemble Y tout entier en posant

$$f_\varepsilon^*(x, y, z) = \begin{cases} \big(\omega(x), y, z\big) & \text{pour tout} \quad (x, y, z)\in D, \\ (x, y, z) & \text{pour tout} \quad (x, y, z)\in Y - B_{n_\varepsilon} - D. \end{cases}$$

On obtient ainsi une transformation continue de l'ensemble Y en l'ensemble

$$(Y-B_{n_\varepsilon}-D) \cup C_\varepsilon \cup Q_1^* \cup Q_2^* \cup \ldots \cup Q_{n_\varepsilon}^*,$$

où $Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_{n_\varepsilon}^*$ sont certains carrés-composantes de l'ensemble D. Il est d'ailleurs évident que les diamètres de toutes les tranches de f_ε^* sont $< \varepsilon$.

Mais l'ensemble $Y-B_{n_\varepsilon}-D$ est homéomorphe à l'ensemble

$$A \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$$

et l'ensemble $C_\varepsilon \cup Q_1^* \cup \ldots \cup Q_{n_\varepsilon}^*$ est homéomorphe à l'ensemble C. Ces ensembles étant compacts et disjoints, on en conclut qu'il existe une homéomorphie g^* transformant $f_\varepsilon^*(Y)$ en X. Or la fonction $\psi = g^* f_\varepsilon^*$ transforme Y en X et ses tranches sont de diamètre $< \varepsilon$.

Reçu par la Rédaction le 30. 1. 1957

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

SUR LES INVOLUTIONS CYCLIQUES PRIVÉES DE POINTS UNIS APPARTENANT À UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

PAR

L. GODEAUX (LIÈGE)

Nous avons, à diverses reprises, étudié les involutions cycliques, dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique. Cela nous a permis de construire, comme images de ces involutions, d'une part des surfaces dont le diviseur de Severi est quelconque (voir [1], [2] et [10]), d'autre part, des surfaces dépourvues de courbe canonique, mais ayant un système bicanonique irréductible (voir [4], [6-10] et [12]) ($p_a = p_g = 0, P_2 > 1$). C'est de ce second problème que nous voudrions nous occuper ici, en précisant et généralisant nos résultats antérieurs.

Soient F une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre p, privée de points unis, et F' une surface image de cette involution. Le problème qui se pose est de déterminer les caractères de la surface F' en partant de ceux de F. En particulier, le cas où $p = p_a+1$, p_a étant le genre arithmétique de F, est particulièrement intéressant. Sous cette hypothèse en effet, la surface F', supposée régulière, est dépourvue de courbe canonique, mais possède un système bicanonique irréductible. Dans nos travaux antérieurs, nous avions supposé la surface F régulière; ici, nous la supposons régulière ou irrégulière, ce qui nous a obligé à modifier assez profondément certaines démonstrations.

Lorsque la surface F' est de genres $p_a = p_g = 0, P_2 > 1$, on trouve sur cette surface une certaine configuration de courbes. On peut se demander si une telle configuration existe sur toute surface dépourvue de courbe canonique mais ayant un système bicanonique irréductible. Il semble probable que la réponse soit affirmative; on pourrait sans doute le démontrer en prouvant qu'il existe sur la surface une courbe six-canonique formée à la fois de deux courbes tricanoniques et de trois courbes bicanoniques.

Ajoutons que nous avons exclu de nos considérations le cas où les systèmes canonique et bicanonique de la surface F sont composés au moyen d'un faisceau. Dans cette hypothèse en effet la surface F' ne peut posséder un système bicanonique irréductible.