которой может быть написан с помощью двух свободных генераторов a и b в следующем сокращённом виде: $a^{n_1}b^{m_1}\ldots a^{n_k}b^{m_k}$, где $k=1,2,\ldots$, а n_i и m_i пробегают значения $0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ и $a^0=b^0=e$.

Группа G, очевидно, не коммутативна, так как напр. $ab\neq ba$ вследствие однозначности сокращённого вида всякого её элемента. Отображение ω, определённое в ней формулой

$$\omega(a^{n_1}b^{m_1}\ldots a^{n_k}b^{m_k})=a^{-n_1}b^{-m_1}\ldots a^{-n_k}b^{-m_k},$$

является автоморфизмом с единственной неподвижной точкой e.

Конечно, нельзя заключать по этому примеру, что и в случае непрерывных сократимых операций, определённых для действительных чисел, односторонняя автодистрибутивность не влечёт за собою двусторонней: она влечёт за собой двустороннюю, если только операция дифференцируема.

3. Из теоремы 4 видно, что можно ожидать решения уравнения автодистрибутивности приведением его к уравнению бисимметрии, поскольку выполнены условия квазигруппы. В § 2 было осуществлено на деле такое приведение, даже при гораздо более общих условиях. Именно, вместо разрешимости уравнения $x\cdot y=z$ предполагалась лишь двусторонняя сократимость.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Ацель (J. Aczél), *О теории средних*, Coll. Math. 4 (1956), стр. 33-55.

[2] — *On mean values*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), стр. 392-400.

[3] Л. Фукс (L. Fuchs), *On mean systems*, Acta Math. Hung. 1 (1950), стр. 303-320.

[4] М. Госсу (M. Hosszú), *On the functional equation of autodistributivity*, Publicationes Mathematicae 3 (1953), стр. 83-87.

[5] Б. Кнастер (B. Knaster), *Sur une équivalence pour les fonctions*, Coll. Math. 2 (1949), стр. 1-4.

[6] Д. Ц. Мурдох (D. C. Murdoch), *Structure of Abelian quasi-groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 49 (1941), стр. 392-409.

[7] Ц. Рылль-Нардзевский (C. Ryll-Nardzewski), *Sur les moyennes*, Studia Math. 11 (1949), стр. 31-37.

Reçu par la Rédaction le 2. 7. 1956

SUR CERTAINES REPRÉSENTATIONS DES FONCTIONS D'ENSEMBLE À VARIATION BORNÉE (I)

(INTÉGRALE INDÉFINIE — FONCTION D'ENSEMBLE)

PAR

J. POPRUŽENKO (ŁÓDŹ)

1. Fonctions d'ensemble à variation bornée. Désignons par $\mathcal{M}$ un espace abstrait, par E un sous-ensemble variable de $\mathcal{M}$, par $\mathfrak{M}$ un σ-corps (= famille σ-additive et complémentative) d'ensembles de $\mathcal{M}$.

Soit $F(E)$ une fonction réelle d'ensemble définie dans $\mathfrak{M}$ et soit

$$(1)\qquad E=E_1+E_2+\ldots+E_k,\quad E_i\in\mathfrak{M},\quad E_iE_j=0,\quad (i\neq j).$$

Posons $\sigma=|F(E_1)|+\ldots+|F(E_k)|$ et $V_F(E)=\sup\{\sigma\}$, cette borne étant prise par rapport à toutes les décompositions de E de la forme (1).

Définition. Une fonction $F(E)$ sera dite *à variation bornée dans* $\mathfrak{M}$ lorsque $V_F(E)<\infty$ quel que soit $E\in\mathfrak{M}$.

Si $\mathfrak{M}$ coïncide avec la famille de tous les sous-ensembles de $\mathcal{M}$, $F(E)$ sera dite *à variation bornée* (comparer [1], p. 171).

La fonction $V_F(E)$, qui est définie également pour tout $E\in\mathfrak{M}$, représente alors la variation totale de $F(E)$.

Notons les propriétés suivantes, faciles à vérifier:

(i_1) *E étant un ensemble de $\mathfrak{M}$, pour qu'une fonction F s'annule identiquement dans la famille de tous les ensembles de $\mathfrak{M}$ contenus dans E, il faut et il suffit que l'on ait $V_F(E)=0$.*

(i_2) *La fonction $V_F(E)$ est à variation bornée en même temps que $F(E)$.*

(i_3) *$V_F(E)$ est une fonction monotone non décroissante de l'ensemble E.*

(i_4) *Une fonction à variation bornée dans $\mathfrak{M}$ y est bornée.*

(i_5) *Une fonction additive dans $\mathfrak{M}$ y est à variation bornée.*

2. Théorème de décomposition. Désignons par $\mathfrak{H}$ la famille de tous les ensembles H de $\mathfrak{M}$ pour lesquels la relation $Z\subset H$ entraîne $Z\in\mathfrak{M}$. Soit $\mathfrak{B}$ un σ-corps contenu dans $\mathfrak{M}$ et ayant la propriété suivante:

(*) *Quel que soit l'ensemble E de $\mathfrak{M}$, il existe un ensemble B de $\mathfrak{B}$ tel que $B\subset E$ et $(E-B)\in\mathfrak{H}$.*

icm©

On voit de suite que $\mathfrak{H}$ est une famille σ-additive et héréditaire, déterminée par $\mathfrak{M}$ d'une façon univoque (qui peut d'ailleurs se réduire à l'ensemble vide seul); on voit aussi qu'il existe des familles $\mathfrak{B}$ ayant la propriété $(*)$, car la famille $\mathfrak{M}$ elle-même en est un exemple.

Ayant choisi un $\mathfrak{B}$ quelconque, mais fixe, admettons que la fonction $F(E)$ satisfasse aux 3 conditions suivantes:

1° *$F(E)$ est à variation bornée dans $\mathfrak{M}$;*

2° *$F(E)$ est additive pour chaque couple d'ensemble séparables ($\mathfrak{B}$)*[1] *qui appartiennent à $\mathfrak{M}$;*

3° *$F(E)$ est σ-additive dans $\mathfrak{B}$.*

On a alors le théorème suivant:

Théorème I. 1. *Chaque fonction réelle $F(E)$ satisfaisant aux conditions 1°-3° est représentable sous la forme*

$$F(E) = \varphi(E)+G(E), \tag{2}$$

où $\varphi(E)$ satisfait à l'égalité

$$\varphi(EH_0) = \varphi(E) \tag{3}$$

pour un certain ensemble $H_0 \epsilon \mathfrak{H}$ et pour tout $E \epsilon \mathfrak{M}$ et $G(E)$ est une fonction σ-additive s'annulant identiquement dans $\mathfrak{H}$.

2. *Cette représentation est unique.*

Démonstration. Déterminons le nombre λ par la formule

$$\lambda = \operatorname{supr} V_F(E) \quad \text{pour} \quad E \epsilon \mathfrak{H}.$$

Il résulte des propriétés 1° et $(*)$ (vu (i_2)-(i_4)) que λ est un nombre non négatif fini et qu'il existe un ensemble H_0 assujetti à la condition

$$H_0 \epsilon \mathfrak{H}\cdot\mathfrak{B}, \tag{4}$$

tel que $V_F(H_0) = \lambda$. En outre, on a en vertu de (i_3) et de la définition du nombre λ

$$V_F(H) = \lambda \quad \text{pour} \quad H \supset H_0,\ H \epsilon \mathfrak{H}. \tag{5}$$

Posons

$$\varphi(E) = F(EH_0). \tag{6}$$

La fonction $\varphi(E)$, définie par (6) pour tout $E \epsilon \mathfrak{M}$, satisfait à l'égalité (3): $\varphi(EH_0) = F(EH_0H_0) = F(EH_0) = \varphi(E)$.

Cela étant, désignons par $\mathfrak{N}$ le σ-corps de tous les ensembles de $\mathfrak{M}$ contenus dans $\mathcal{M}-H_0$.

[1]) Deux ensembles E_1 et E_2 sont dits *séparables* ($\mathfrak{B}$) lorsqu'il existe un ensemble B de $\mathfrak{B}$ tel que $E_1 \subset B$ et $E_2 \subset \mathcal{M}-B$.

En premier lieu, $F(E)$ s'annule pour tout ensemble de la famille $\mathfrak{H}$ contenu dans $\mathcal{M}-H_0$; car, H étant un tel ensemble, si l'on avait, pour un certain $H'' \subset H'$, $F(H'') \neq 0$, on aurait nécessairement $V_F(H_0+H') > V_F(H_0) = \lambda$, contrairement à (5). On a donc $F(H') = 0$.

En second lieu, la fonction $F(E)$ est σ-additive dans $\mathfrak{N}$.

Pour le montrer, donnons-nous une suite infinie $\{E_n\}$ d'ensembles de $\mathfrak{N}$, sans points communs deux à deux. Posons $E_n = B_n+H_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, où B_n et H_n sont choisis conformément à la propriété $(*)$. D'après 2° on a $F(E_n) = F(B_n)+F(H_n)$, d'où, puisque $F(H_n) = 0$,

$$F(E_n) = F(B_n). \tag{7}$$

Pareillement, en tenant compte de la relation $B_iB_j = 0$ $(i \neq j)$, on obtient en vertu des conditions 2° et 3°:

$$F\Big(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = F\Big(\sum_{n=1}^{\infty} B_n + \sum_{n=1}^{\infty} H_n\Big) =$$

$$= F\Big(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\Big) + F\Big(\sum_{n=1}^{\infty} H_n\Big) = F\Big(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} F(B_n),$$

d'où, en vertu de (7),

$$F\Big(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} F(E_n).$$

Nous avons ainsi démontré que la fonction $F(E)$ est σ-additive dans $\mathfrak{N}$ et qu'elle s'annule pour tout ensemble de la famille $\mathfrak{H}$ appartenant à $\mathfrak{N}$. En posant

$$G(E) = F[E(\mathcal{M}-H_0)] \quad (E \epsilon \mathfrak{M}), \tag{8}$$

on obtient une fonction ayant les mêmes propriétés relativement au σ-corps $\mathfrak{M}$.

Les fonctions $\varphi(E)$ et $G(E)$ satisfont à l'égalité (2).

En effet, d'après 2° et (4), on a $F(E) = F(EH_0)+F[E(\mathcal{M}-H_0)]$ pour tout $E \epsilon \mathfrak{M}$; de là, d'après (6) et (8), l'égalité (2).

La première assertion de notre Théorème est ainsi démontrée.

Pour prouver la seconde, supposons que l'on ait, outre l'égalité (2), encore la formule

$$F(E) = \varphi_1(E)+G_1(E), \tag{9}$$

les sommandes φ_1 et G_1 étant soumis aux mêmes conditions que φ et G. Dans ces hypothèses, l'égalité $\varphi(E)-\varphi_1(E) = G_1(E)-G(E)$ montre que la différence $\varphi(E)-\varphi_1(E)$ s'annule identiquement dans $\mathfrak{H}$; on a donc

$\varphi(H)=\varphi_1(H)$ pour tout $H\epsilon\mathfrak{H}$. Ceci étant, soit H_1 un ensemble de $\mathfrak{H}$ tel que $\varphi_1(EH_1)=\varphi_1(E)$ pour tout $E\epsilon\mathfrak{M}$; il vient:

$$\varphi(E)=\varphi(EH_0)=\varphi_1(EH_0)=\varphi_1(EH_0H_1),$$
$$\varphi_1(E)=\varphi_1(EH_1)=\varphi(EH_1)=\varphi(EH_1H_0),$$

d'où il résulte, d'après la relation $EH_0H_1\epsilon\mathfrak{H}$, $\varphi_1(E)=\varphi(E)$, donc aussi $G_1(E)=G(E)$.

Le Théorème I est démontré.

3. Alephs inaccessibles [2]). $\mathfrak{n}$ étant un nombre cardinal indénombrable, désignons par $P(\mathfrak{n})$ la proposition suivante:

$P(\mathfrak{n})$ *Il n'existe aucun aleph inaccessible* $\leqslant\mathfrak{n}$.

L'importance de cette proposition pour la théorie des ensembles est bien connue. Nous allons étudier les conséquences qu'elle entraîne pour les fonctions d'ensemble à variation bornée.

Soient $\mathcal{N}$ un ensemble de puissance $\mathfrak{n}$, X son sous-ensemble variable, $F(X)$ une fonction réelle définie pour tout $X\subset\mathcal{N}$.

Démontrons le lemme suivant:

LEMME I. *Si $F(X)$ est à variation bornée, la condition $P(\mathfrak{n})$ entraîne l'existence d'une suite, finie où dénombrable, d'ensembles $N_0, N_1, N_2, \ldots$, sans points communs deux à deux, tels que:*

$$\mathcal{N}=N_0+N_1+\ldots,$$
$$F(Z)=0 \quad \textit{pour} \quad Z\subset N_i \quad (i=1,2,\ldots),$$

et

$$\overline{\overline{N}}_0=\aleph_0.$$

Démonstration. Cet énoncé est une conséquence immédiate du „Théorème de recouvrement de la théorie générale des ensembles" de M. Sierpiński ([6], p. 214) qu'on ne sait démonterer jusqu'à présent qu'à l'aide de l'hypothèse $P(\mathfrak{n})$.

Pour démontrer notre Lemme, considérons la classe de tous les sous-ensembles Y de $\mathcal{N}$ tels que $V_F(Y)>0$. Comme toute famille d'ensembles disjoints de cette classe est, d'après (i_2) et (i_4), au plus dénombrable, il existe en vertu du théorème précité une suite finie ou dénombrable d'ensembles $N_1^*, N_2^*, \ldots, N_i^*, \ldots$ tels que $V_F(N_i^*)=0$, dont la somme recouvre l'espace $\mathcal{N}$ à un ensemble dénombrable, N_0, près. En posant $N_1=N_1^*$ et $N_i=(N_1^*+\ldots+N_i^*)-(N_1^*+\ldots+N_{i-1}^*)$ pour $i=2,3,\ldots$, on obtient, vu (i_1) et (i_3), une suite $N_0, N_1, \ldots$ satisfaisant aux conditions du Lemme I.

[2]) Un aleph $\aleph_\alpha$ est dit *inaccessible* s'il est régulier (c'est-à-dire s'il n'est pas somme de moins de $\aleph_\alpha$ nombres cardinaux, dont chacun est $<\aleph_\alpha$) et si son indice α est un nombre ordinal de deuxième espèce.

On en déduit facilement, en s'appuyant sur (i_3), le

LEMME II. *Soit $F(X)$ une fonction à variation bornée qui s'annule pour tout $X=(p)$, $p\epsilon\mathcal{N}$. Alors, si la proposition $P(\mathfrak{n})$ est vraie, tout sous-ensemble X de $\mathcal{N}$ peut être représenté sous la forme d'une somme, finie ou dénombrable,*

$$(\alpha) \qquad X=X_1+X_2+\ldots,$$

où les ensembles X_n, sans points communs deux à deux, satisfont à la condition

$$(\beta) \qquad F(Z)=0 \quad \textit{pour} \quad Z\subset X_n \quad (n=1,2,\ldots)$$

(comparer [7], p. 153, corollaire 3, première partie).

Supposons maintenant qu'une fonction $F(E)$ $(E\epsilon\mathfrak{M})$, assujettie aux conditions 1°-3°, satisfasse en outre à la condition

4° $F((p))=0$ *lorsque* $(p)\epsilon\mathfrak{M}$.

Soit $\mathfrak{m}=\overline{\overline{\mathcal{M}}}$. Démontrons le

THÉORÈME II. *Soit $F(E)$ assujettie aux conditions* 1°-4°. *Alors:*

1. *La proposition $P(\mathfrak{m})$ entraîne, pour la fonction $\varphi(E)$ de la formule* (2), *la propriété suivante:*

(**) *Quel que soit $E\epsilon\mathfrak{M}$, il existe une suite $X_0, X_1, \ldots$ d'ensembles satisfaisant aux conditions:*

$$(\gamma) \qquad \sum_{i=0}^{\infty}X_i=E, \quad X_i\epsilon\mathfrak{M}, \quad X_iX_j=0 \quad \textit{pour} \quad i\neq j;$$

$$(\delta) \qquad \varphi(Z)=0 \quad \textit{pour} \quad Z\subset X_i, \quad Z\epsilon\mathfrak{M} \quad (i=0,1,\ldots).$$

2. *Il existe au plus une représentation de $F(E)$ sous la forme d'une somme de deux fonctions, dont l'une satisfait à la condition* (**) *et l'autre s'annule identiquement dans $\mathfrak{H}$ et est σ-additive dans $\mathfrak{M}$.*

Démonstration. Pour démontrer la première assertion du Théorème, reprenons la formule (6). La fonction φ, considérée comme fonction d'un sous-ensemble X de H_0,

$$\varphi(X)=F(XH_0)=F(X) \qquad (X\subset H_0),$$

satisfait aux conditions du Lemme II avec $\mathcal{N}=H_0$.

Supposons la proposition $P(\mathfrak{m})$ vraie et soit $E=EH_0+E(\mathcal{M}-H_0)$ un ensemble quelconque de $\mathfrak{M}$. Comme $\overline{\overline{H}}_0=\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{m}=\overline{\overline{\mathcal{M}}}$, le nombre cardinal $\mathfrak{n}$ satisfait sûrement à la condition $P(\mathfrak{n})$. Donc, en appliquant Lemme II à l'ensemble $X=EH_0$, on obtient une suite d'ensembles disjoints $X_1, X_2, \ldots$ satisfaisant aux conditions (α) et (β). Complétons cette suite en posant $X_0 = E(\mathfrak{M}-H_0)$; d'après (3) on aura $\varphi(Z) = 0$ pour tout $Z \subset X_0$ appartenant à $\mathfrak{M}$. Ainsi, les conditions (γ) et (δ) sont réalisées par la suite $X_0, X_1, \ldots$

Vérifions maintenant la seconde assertion. Admettons que l'on ait

$$F(E) = \varphi_1(E)+G_1(E) = \varphi_2(E)+G_2(E),$$

où les fonctions φ_i $(i = 1, 2)$ jouissent de la propriété (**) et les G_i $(i = 1, 2)$ sont σ-additives dans $\mathfrak{M}$ et s'annulent identiquement dans $\mathfrak{H}$. Il s'en suit, comme il est facile de voir, que la fonction $\chi(E) = \varphi_1(E)-\varphi_2(E)$ est σ-additive dans $\mathfrak{M}$ et qu'elle satisfait à la condition (**) en tant que différence de deux fonctions qui y satisfont. Il en résulte que

$$\chi(E) \textit{ est identiquement nulle,}$$

d'où l'identité $\varphi_1(E) = \varphi_2(E)$, donc aussi $G_1(E) = G_2(E)$.

Le Théorème II est entièrement démontré.

En posant dans la démonstration de la première partie $E = \mathfrak{M}$, on obtient le

Corollaire I. *La proposition $P(\mathfrak{m})$ entraîne l'existence d'une décomposition de l'espace $\mathfrak{M}$ en sommandes disjoints,*

$$\mathfrak{M} = X_0+X_1+\ldots,$$

où les ensembles X_i appartiennent à $\mathfrak{M}$ et satisfont à la condition

$$F(E) = G(E) \quad \textit{pour} \quad E \subset X_i, E \in \mathfrak{M} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

4. Applications analytiques. Admettons maintenant que, dans le σ-corps $\mathfrak{M}$, il existe une mesure $\mu(E)$, finie et non identiquement nulle; admettons de plus que la famille des ensembles de mesure μ nulle coïncide avec $\mathfrak{H}$. Désignons par $\boldsymbol{M}$ la classe de toutes les mesures μ ayant cette propriété[3]). Dans ces hypothèses la fonction $G(E)$ devient absolument continue par rapport à chaque mesure $\mu \in \boldsymbol{M}$; les Théorèmes I-II entraînent alors le résultat suivant:

Théorème III. *Soit $\mu \in \boldsymbol{M}$. Si la proposition $P(\mathfrak{m})$ est vraie, toute fonction $F(E)$ satisfaisant aux conditions 1°-4° peut être représentée — et d'une seule manière — sous la forme (2), où $G(E)$ est σ-additive dans $\mathfrak{M}$ et absolument continue par rapport à μ et $\varphi(E)$ jouit de la propriété* (**).

En vertu de (i_5), on en déduit le

[3]) Remarquons que si la proposition $P(\mathfrak{m})$ est vraie, toute mesure extérieure $\mu^*(E)$, finie et non identiquement nulle, ayant $\mathfrak{M}$ pour σ-corps d'ensembles mesurables μ, y détermine une mesure μ appartenant à $\boldsymbol{M}$.

Corollaire II. *Soit $\mu \in \boldsymbol{M}$. Si la proposition $P(\mathfrak{m})$ est vraie, toute fonction réelle $F(E)$ qui est σ-additive dans $\mathfrak{M}$ et qui s'annule pour tout ensemble (p) de $\mathfrak{M}$ composé d'un seul point est absolument continue dans $\mathfrak{M}$ par rapport à la base μ.*

Car, dans ces conditions, la fonction $\varphi(E)$, qui est alors également σ-additive, disparaît identiquement en vertu de la propriété (**). On a donc d'après (2): $F(E) = G(E)$.

D'après les recherches fondamentales de M. O. Nikodym sur l'intégration dans les espaces abstraits, toute fonction σ-additive qui est absolument continue dans $\mathfrak{M}$ par rapport à une base quelconque peut être représentée sous la forme d'une intégrale indéfinie, et réciproquement (voir [3], surtout p. 179, Théorème IV).

Ce résultat, réuni au Corollaire II, entraîne le théorème suivant:

Théorème IV. 1. *Pour qu'une fonction réelle $F(E)$ définie dans $\mathfrak{M}$ soit représentable sous la forme d'une intégrale indéfinie, il faut et il suffit qu'elle soit σ-additive dans $\mathfrak{M}$.*

2. *Si la proposition $P(\mathfrak{m})$ est vraie, la condition nécessaire et suffisante pour que $F(E)$ soit représentable sous la forme d'une intégrale indéfinie prise par rapport à une base $\mu \in \boldsymbol{M}$ est qu'elle soit σ-additive dans $\mathfrak{M}$ et qu'elle s'annule pour tout ensemble $E = (p)$ de $\mathfrak{M}$ composé d'un seul point.*

Démonstration de 1. Si $F(E)$ est σ-additive dans $\mathfrak{M}$, il en est de même de la fonction $\beta(E) = V_F(E)$; de plus, la relation $\beta(E) = 0$ entraîne $F(E) = 0$, ce qui exprime que $F(E)$ est absolument continue par rapport à la base β. Il existe donc, comme l'a démontré M. Nikodym, une fonction $f(p)$ $(p \in \mathfrak{M})$, mesurable par rapport au σ-corps $\mathfrak{M}$, telle que

$$F(E) = \int_E f(p)\,d\beta.$$

D'autre part, la σ-additivité d'une intégrale indéfinie prise par rapport à une base quelconque est un fait élémentaire de la théorie de l'intégration.

Démonstration de 2. L'hypothèse $P(\mathfrak{m})$ admise, la suffisance de nos conditions résulte directement du Corollaire II, rapproché du théorème de M. Nikodym cité plus haut.

Pour en établir qu'elles sont nécessaires, il suffit de montrer que $F((p)) = 0$ lorsque $(p) \in \mathfrak{M}$. Or la relation $(p) \in \mathfrak{M}$ entraîne nécessairement $(p) \in \mathfrak{H}$, ce qui donne, pour chaque mesure μ appartenant à $\boldsymbol{M}$, $\mu((p)) = 0$; il en résulte

$$F((p)) = \int_{(p)} g(q)\,d\mu = 0.$$

Le Théorème IV est ainsi démontré.

Les intégrales qui figurent dans ces énoncés sont prises au sens de Radon-Nikodym.

Les résultats qui viennent d'être établis sont vrais pour chaque mesure de Carathéodory qui s'annule en tout point, donc aussi pour la mesure de Lebesgue (comparer [4], p. 40-45).

Tirons une conséquence de cette dernière remarque.

Interprétons $\mathcal{M}$ comme l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$ et soit $\mathfrak{M}$ le σ-corps de tous les ensembles mesurables (L) de cet intervalle; supposons $F(E)$ σ-additive dans $\mathfrak{M}$ et satisfaisant à la condition $F((x)) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{M}$; enfin, soit (2) la décomposition canonique de Lebesgue de la fonction $F(E)$ (voir p. ex. [5], p. 33-35, aussi [2], p. 419-424).

Alors, si l'hypothèse $P(2^{\aleph_0})$ est vraie[4]), deux cas seulement peuvent se présenter: ou bien $\varphi(E)$ est identiquement nulle, quelle que soit $F(E)$ satisfaisant aux conditions posées tout à l'heure; ou bien il existe un aleph inaccessible $\leqslant 2^{\aleph_0}$.

TRAVAUX CITÉS

[1] S. Banach, *Sur une classe de fonctions d'ensemble*, Fund. Math. 6 (1924), p. 170-188.

[2] H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921.

[3] O. Nikodym, *Sur une généralisation des intégrales de Radon*, Fund. Math. 15 (1930), p. 131-179.

[4] J. Popruženko, *Sur la représentation analytique de certaines classes de fonctions additives d'ensemble*, Bull. Acad. Pol. Sci., Classe III, Série A (1940-1946), p. 35-49.

[5] S. Saks, *Theory of the integral*, Warszawa 1937.

[6] W. Sierpiński, *Sur un théorème de recouvrement dans la théorie générale des ensembles*, Fund. Math. 20 (1933), p. 214-220.

[7] A. Tarski, *Drei Überdeckungssätze der allgemeinen Mengenlehre*, ibidem 30 (1938), p. 132-155.

[8] S. Ulam, *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, ibidem 16 (1930), p. 140-150.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 6. 4. 1956

[4]) Cette hypothèse a été introduite par M. Ulam (voir [8], p. 140-141).

REMARQUES SUR LES MESURES DANS LES ESPACES PRODUITS

PAR

N. DINCULEANU (BUCAREST)

1. Soit K un ensemble d'indices et pour tout $s \in K$ soit X_s un espace et T_s une tribu[1]) de parties de X_s. Soit E l'espace produit $\prod_{s \in K} X_s$ et, pour toute partie finie $I \subset K$, soit E^I l'espace produit $\prod_{s \in I} X_s$ et $T^I = \prod_{s \in I} T_s$ la tribu engendrée par les parties de la forme $\prod_{s \in I} A_s$, où $A_s \in T_s$ pour tout $s \in I$. Soit $P(A)$ une mesure d'finie sur le clan[2]) T des parties cylindriques, dénombrablement additive sur la tribu $\mathrm{pr}_I^{-1}(T^I)$ quelle que soit la partie finie $I \subset K$. On sait que, sous certaines conditions supplémentaires ([3], [5], [6], [7]), $P(A)$ est d'nombrablement additive sur T. Dans cette note on démontre deux théorèmes analogues aux théorèmes (A) et (B) de [5].

2. Soient E l'espace et T le clan d'finis plus haut, et $P(A)$ une mesure d'finie sur T, d'nombrablement additive sur la tribu $\mathrm{pr}_I^{-1}(T^I)$ quelle que soit la partie finie $I \subset K$. Pour toute partie finie $I \subset K$ et $t \in K$, il existe ([2], p. 95-96) une mesure conditionelle $P(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t))$ définie sur $E^I \times T_t$, qui vérifie pour tout $M \in T^I$ les égalités

$$\int_M P(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t)) P_I(dz^I) = P(\mathrm{pr}_I^{-1}(M) \cap \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t)),$$

où $z^I \in E^I$ et $P_I(A) = P(\mathrm{pr}_I^{-1}(A))$ pour tout $A \in T^I$.

On dit qu'une mesure conditionelle $P(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t))$ est *régulière par rapport aux tribus* (S^I, S_t), où $S^I \subset T^I$ et $S_t \subset T_t$, s'il existe une fonction $P(z^I, A_t)$ définie sur $E^I \times S_t$ telle que:

(a) $P(z^I, A_t)$ est (S^I)-mesurable comme fonction de z^I, quel que soit $A_t \in S_t$;

(b) $P(z^I, A_t)$ est dénombrablement additive comme fonction de A_t, quel que soit $z^I \in E^I$;

[1]) Une σ-algèbre dans la terminologie de P. Halmos [3]. Voir aussi [5].

[2]) Une algèbre d'après Halmos [3]. Voir aussi [5].