НЕСИММЕТРИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ

М. ГОССУ (МИШКОЛЬЦ)

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Квазиарифметическим средним действительных переменных x, y называется действительная функция $M(x,y)$ этих переменных, заданная в виде

$$(1)\qquad M(x,y) = \varphi\left[\frac{f(x)+f(y)}{2}\right],$$

где $t \to f(t)$ — взаимно-однозначное отображение, а $t \to \varphi(t)$ — обратное к нему. О всякой функции M вида (1) мы будем говорить, что она *изоморфна арифметическому среднему* (эта терминология отличается от обычной, но она не ведёт к недоразумениям). Очевидно, что функция $M(x,y)$ обладает свойством симметрии:

$$M(x,y) = M(y,x).$$

Несимметрическими (квазилинейными) средними называются функции $m(x,y)$, изоморфные арифметическому среднему с весом, т. е. функции вида

$$(2)\qquad m(x,y) = \varphi[pf(x)+qf(y)], \quad \text{где} \quad p+q=1.$$

В дальнейшем мы будем обозначать несимметрические средние коротко символом $x\cdot y$:

$$x\cdot y = m(x,y).$$

После исследования характерных свойств непрерывных квазиарифметических, следовательно, симметрических средних, т. е. после аксиоматического обоснования их теории, возник вопрос об аналогичном исследовании несимметрических средних [1]). Как доказал Ацель [2], непрерывные несимметрические средние, удовлетворяющие условию

$$\min(x,y) < x\cdot y < \max(x,y),$$

[1]) Более подробные сведения о теории средних даны в статье [1]. Числа в квадратных скобках относятся к списку литературы в конце статьи.

называемые *внутренними средними*, т. е. для которых p и q положительны, характеризуются следующими свойствами:

(3) *бисимметрия*: $(x\cdot y)\cdot(u\cdot z) = (x\cdot u)\cdot(y\cdot z)$,

(4) *идемпотентность (рефлексивность)*: $x\cdot x = x$,

(5) *строгое монотонное возрастание*: $x\cdot u > y\cdot u$ и $u\cdot x > u\cdot y$ для $x > y$.

Аналогичными свойствами характеризуются и средние большего числа переменных. Фукс [3] распространил результат Ацеля на упорядоченные алгебраические системы и на *внешние* средние, т. е. для которых pq отрицательно, заменяя при этом свойство (5) следующим более слабым:

(6) *сократимость*: $x\cdot u \neq y\cdot u$ и $u\cdot x \neq u\cdot y$ для $x \neq y$.

Ацель [1] доказал, что для дважды дифференцируемых несимметрических средних свойства (3) и (4) могут быть заменены следующим:

(7) *правосторонняя автодистрибутивность*: $(x\cdot y)\cdot z = (x\cdot z)\cdot(y\cdot z)$.

В случае симметрических средних свойство (7) характеризует их уже при предположении их непрерывности, как доказал Рылль-Нардзевский [7] (и Кнастер [5] приведением к (3)). Поэтому Ацель ([1], P 145) поставил вопрос, нельзя-ли и для несимметрических средних заменить предположение двукратной дифференцируемости более слабым. По его гипотезе, непрерывное и сократимое общее решение функционального уравнения (7) не должно быть значительно более общего вида, чем (2).

В предыдущей работе [4] мною было доказано, что двукратная дифференцируемость может быть заменена однократною в случае двусторонней автодистрибутивности, т. е. когда кроме (7) предполагается еще

(8) *левосторонняя автодистрибутивность*: $z\cdot(x\cdot y) = (z\cdot x)\cdot(z\cdot y)$.

В настоящей работе будет мною доказано, что при предположении свойств (7) и (8) достаточно предположить непрерывность (§ 2). Кроме того будут мною выведены некоторые теоремы алгебраического характера, которые при весьма общих предположениях дают возможность свести исследование структур с автодистрибутивной операцией к исследованию групп (§ 3). Следствием из этих теорем является независимость друг от друга свойств (7) и (8), т. е. правосторонней и левосторонней дистрибутивности, даже для автодистрибутивных структур приводимых к группам. При этом будет выяснена связь между квазигруппами с автодистрибутивной операцией и абелевыми квазигруппами [6], а также группами.

§ 2. *РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДВУСТОРОННЕЙ АВТОДИСТРИБУТИВНОСТИ*

Теорема 1. *Всякая непрерывная, двусторонне автодистрибутивная и сократимая операция $x\cdot y$, определённая в интервале I, является несимметрическим (квазилинейным) средним.*

Другими словами: *она изоморфна арифметическому среднему с весом* (см. определение, стр. 32).

Доказательство. Требуется доказать, что непрерывное и строго монотонное общее решение системы функциональных уравнений

$$(x\cdot y)\cdot z = (x\cdot z)\cdot(y\cdot z), \tag{7}$$

$$z\cdot(x\cdot y) = (z\cdot x)\cdot(z\cdot y), \tag{8}$$

где $x, y, x\cdot y$ и z принадлежат к I, имеет вид

$$x\cdot y = \varphi[pf(x)+qf(y)], \tag{2}$$

где $f(x)$ — произвольная непрерывная и строго монотонная функция, $\varphi(x)$ — обратная к ней функция, а p и q — произвольные постоянные, подчинённые условию $p+q=1$.

Для этого докажем, что предположения теоремы влекут за собою бисимметрию

$$(x\cdot y)\cdot(u\cdot z) = (x\cdot u)\cdot(y\cdot z) \tag{3}$$

для x, y, u и z принадлежащих к I. Этим, в силу цитированных в § 1 результатов из работ [2] и [3], теорема и будет доказана.

Заметим, что в случае $u=y$ равенство (3) сбращается в тождество. В виду этого мы можем ограничиться случаем, когда $y<u$. Впрочем, для дальнейшего рассуждения безразлично, которая из точек y, u и z находится между двумя другими (или совпадает с одной из них), и то же самое касается тройки x, y, u.

Пусть ε — функция, определённая на I. Уравнение

$$(x\cdot y)\cdot(u\cdot z) = (x\cdot u)\cdot(y\cdot\varepsilon z) \tag{9}$$

определяет взаимно-однозначное отображение $z\to\varepsilon z$ для $y<z<u$. В самом деле, функции

$$\alpha(z) = (x\cdot y)\cdot(u\cdot z) \quad \text{и} \quad \beta(z) = (x\cdot u)\cdot(y\cdot z)$$

непрерывны и строго монотонны на отрезке $y\leqslant z\leqslant u$. В силу автодистрибутивности и сократимости, а следовательно и вытекающей из этих свойств идемпотентности, выполнены, сверх того, равенства

$$\alpha(y) = \beta(y) \quad \text{и} \quad \alpha(u) = \beta(u).$$

Поэтому, на основании теоремы Больцано, каждой точке z из отрезка $y\leqslant z\leqslant u$ соответствует одна — а в силу строгой монотонности только одна — точка $t=\varepsilon z$, для которой $\alpha(z)=\beta(t)$. Таким образом равенство (3) окажется доказанным, если мы покажем, что в (9)

$$\varepsilon z = z \quad \text{для} \quad y\leqslant z\leqslant u. \tag{10}$$

Для этого заметим во-первых, что

$$\varepsilon y = y \quad \text{и} \quad \varepsilon u = u, \tag{11}$$

в чём легко убедиться подстановками $z=y$ и $z=u$ в определении (9), используя автодистрибутивность и рефлексивность, и во-вторых, что отображение $z\to\varepsilon z$ является автоморфизмом, т. е.

$$\varepsilon(z\cdot t) = \varepsilon z\cdot\varepsilon t \quad \text{для} \quad y\leqslant z\leqslant u \quad \text{и} \quad y\leqslant t\leqslant u, \tag{12}$$

ибо (9) влечёт за собой в силу автодистрибутивности

$$(x\cdot u)\cdot[y\cdot\varepsilon(z\cdot t)] = (x\cdot y)\cdot[u\cdot(z\cdot t)] = [(x\cdot y)\cdot(u\cdot z)]\cdot[(x\cdot y)\cdot(u\cdot t)] =$$
$$= [(x\cdot u)\cdot(y\cdot\varepsilon z)]\cdot[(x\cdot u)\cdot(y\cdot\varepsilon t)] = (x\cdot u)\cdot[y\cdot(\varepsilon z\cdot\varepsilon t)],$$

откуда (12) вытекает в силу сократимости.

По предположению, операция $x\cdot y$ строго монотонна относительно каждого из обоих переменных. Возможны два случая:

1° она — строго возрастающая относительно обоих переменных,

2° она — строго возрастающая относительно одного и строго убывающая относительно другого переменного.

Убывающей относительно обоих переменных она быть не может по причине идемпотентности.

Случай 1° отвечает внутренней операции: $x<y$ даёт $x=x\cdot x< x\cdot y<y\cdot y=y$.

Случай 2° отвечает внешней операции, ибо если $x\cdot y$ возрастает относительно x, а убывает относительно y, то $x<y$ даёт $x\cdot y<x\cdot x = x<y=y\cdot y<y\cdot x$; если же $x\cdot y$ убывает относительно x, а возрастает относительно y, то $x<y$ даёт противоположное неравенство.

Займёмся случаем 1°. Построим множество $S^{\cdot}$, полагая $y\in S^{\cdot}$, $u\in S^{\cdot}$ и причисляя к $S^{\cdot}$ произведение $x\cdot y$ всяких двух уже причисленных точек и их предельные точки:

$$S^{\cdot} = \{y, u, y\cdot u, u\cdot y, y\cdot(y\cdot u), (y\cdot u)\cdot u, \ldots\}.$$

Так как в рассматриваемом случае операция $x\cdot y$ — внутренняя, то $S^{\cdot}$ лежит на отрезке $y \leqslant z \leqslant u$, а вследствие (11), (12) и непрерывности операций $x\cdot y$ и εz равенство $\varepsilon z = z$ справедливо для всех $z \epsilon S^{\cdot}$. Итак, для доказательства (10) достаточно показать, что, наоборот, отрезок $y \leqslant z \leqslant u$ содержится в $S^{\cdot}$.

Допустим противное. Тогда в этом отрезке имеется частичный отрезок $y_1 \leqslant z \leqslant u_1$ без точек множества $S^{\cdot}$ (ибо оно, по определению, замкнуто). Обозначим через y_2 верхнюю грань его точек $z < y_1$, а через u_2 нижнюю грань его точек $z > u_1$. Тогда $y_2 \epsilon S^{\cdot}$, $u_2 \epsilon S^{\cdot}$ и в интервале $y_2 < z < u_2$ нет точек множества $S^{\cdot}$; но это невозможно, ибо $y_2 < y_2\cdot u_2 < u_2$ и $y_2 u_2 \epsilon S^{\cdot}$. Этим теорема доказана в случае 1°.

Займёмся теперь случаем 2°, ограничиваясь рассмотрением операции $x\cdot y$ возрастающей относительно x, а убывающей относительно y, т. е. для которой

$$x\cdot y < x < y\cdot y \quad \text{если} \quad x < y,$$
$$x\cdot y > x > y\cdot y \quad \text{если} \quad x > y.$$

Отсюда следует, по теореме Больцано, что для всяких $x \epsilon I$ и $y \epsilon I$ существует точка $z \epsilon I$, которая является решением уравнения $z\cdot y = x$. Обозначая это соответствие через $z = x * y$, легко проверить, что операция $x*y$ — непрерывная, внутренняя и обладает свойством

$$\varepsilon(z*t) = \varepsilon z * \varepsilon t,$$

аналогичным к (12). Это сводит остальное к уже рассмотренному случаю 1°: к построению множества S^*, аналогичного $S^{\cdot}$, и к выводу аналогичного противоречия. Теорема 1 доказана.

§ 3. *АВТОДИСТРИБУТИВНЫЕ ИЗОТОПЫ ГРУПП*

Пусть дано множество $A = \{x, y, \ldots\}$, в котором определена операция $x\cdot y$, и квазигруппа $G = \{a, b, \ldots\}$, т. е. множество, в котором определена операция — обозначим её через ab — имеющая обе обратные операции и, следовательно, сократимая.

Множество A называется *изотопом* квазигруппы G, если существуют три взаимно однозначных отображения f, g и h множества A на G связывающие операцию $x\cdot y$ с операцией ab следующим образом:

(13) $$h(x\cdot y) = f(x)g(y) \quad \text{и} \quad \chi(ab) = \varphi(a)\cdot\psi(b),$$

где φ, ψ и χ — отображения, обратные соответсвенно к f, g и h, т. е. если

$$f\varphi a = g\psi a = h\chi a = a \quad \text{для} \quad a \epsilon G.$$

Всякий изотоп квазигруппы сам является квазигруппой, так как для всяких x, y и z из A уравнение $x\cdot y = \chi(fxgy) = z$ имеет вследствие (13) однозначно определённые решения x и y. Если операция $x\cdot y$ в A сверх того автодистрибутивна (хотя бы односторонне, т. е. удовлетворяет условию (7) или (8)), то подстановка $z = y = x$ напр. в (7) даёт $(x\cdot x)\cdot x = (x\cdot x)\cdot(x\cdot x)$. Отсюда ввиду сократимости вытекает идемпотентность операции $x\cdot y$, т. е. равенство $x\cdot x = x$. Таким образом соотношение изотопии между квазигруппами является симметрическим.

Очевидно, что даже в случае, когда G — группа, отображения определяющие изотопию множества A группе G не единственны. Функции fx и gx можно в этом случае заменить напр. функциями $f_1 x \underset{\mathrm{def}}{=} (fx)c^{-1}$ и $g_1 x = cgx$ (выбрав произвольно $c \epsilon G$), ибо

$$h(x\cdot y) = (fx)(gx) = (fx)c^{-1}c(gx) = (f_1 x)(g_1 x).$$

Таким образом, не нарушая общности, можно предположить для всего дальнейшего, что выполнено нормирующее условие

(14) $$f\chi e = e,$$

где e — единичный элемент группы G.

В самом деле, если бы мы имели вопреки (14) равенство $f\chi e = c$ для $c \neq e$, то мы могли бы заменить функции fx и gx функциями $f_1 x$ и $g_1 x$, определяющими ту-же изотопию и удовлетворяющими условию (14).

Теорема 2. *Для существования правосторонне автодистрибутивного изотопа группы G необходимо и достаточно существование в ней автоморфизма ω с одной неподвижной точкой (единицей группы), т. е. удовлетворяющего условиям:*

(15) $$\omega(ab) = \omega a\, \omega b,$$

(16) $$\omega c \neq c \quad \text{для} \quad c \neq e,$$

$$\sigma G = G, \quad \text{где} \quad \sigma a = (\omega a)^{-1} a.$$

Аналогичное справедливо для левосторонней автодистрибутивности.

Доказательство. Предположим, что группа G имеет правосторонне автодистрибутивный изотоп A. Применяя к (7) операцию h из (13), мы получаем поочередно

$$h[(x\cdot y)\cdot z] = h[(x\cdot z)\cdot(y\cdot z)],$$
$$f(x\cdot y)gz = f(xz)g(yz),$$
$$f\chi(fxgy)gz = f\chi(fxgz)g\chi(fygz).$$

Пусть

$$\omega = f\chi \quad \text{и} \quad \pi = g\chi f\psi. \tag{17}$$

Подставляя $x = \varphi a$, $y = \psi b$ и $z = \psi e$, мы получаем равенство $\omega(ab) = \omega a \pi b$ и в частности, ввиду нормирующего условия (14), наложенного на функции f и g, равенство $\omega b = \omega e \pi b = \pi b$, которое вместе с предыдущим даёт (15).

Для доказательства (16) заметим, что из (13) вытекает в силу идемпотентности $gx = (fx)^{-1}hx$. Подставляя в это равенство $f = \omega h$ согласно (17), мы получаем $g\chi a = (\omega a)^{-1}a = \sigma a$. Ввиду взаимной однозначности отображения $a \to g\chi a = \sigma a$ мы имеем $\sigma G = G$ и $(\omega a)^{-1}a \neq \neq (\omega b)^{-1}b$ для $a \neq b$.

Но ввиду (14) и (17) единица e группы G является неподвижной точкой отображения $a \to \omega a$, так что $(\omega b)^{-1} = \omega b^{-1}$ и последнее неравенство может быть написано в виде $\omega(ab^{-1}) \neq ab^{-1}$ для $a \neq b$. Подставляя тут $c = ab^{-1}$, мы получаем $\omega c \neq c$ для $c \neq e$, т. е. (16). Таким образом ω есть искомый автоморфизм и необходимость условий теоремы доказана.

Для доказательства их достаточности предположим, что ω является автоморфизмом группы G с единственной неподвижной точкой, и определим отображения f и g следующим образом:

$$fx = \omega hx, \quad gx = (\omega hx)^{-1}hx, \tag{18}$$

где отображение h выбрано нами произвольно. Так определённые отображения f и g взаимно однозначны и удовлетворяют условию (14). Остаётся доказать, что изотоп, построенный при помощи функций f, g и h, является правосторонне автодистрибутивным. Для этой цели придадим сначала формуле (7) другой вид, равносильный ей в рассматриваемых условиях.

Применяя к (7) отображение h, мы получаем по (18) $f(x \cdot y)gz = = f(x \cdot z)g(y \cdot z)$, т. е.

$$f\chi(fx\,gy)gz = f\chi(fx\,gz)g\chi(fy\,gz),$$

или, в других обозначениях, $\omega(a\,gy)b = \omega(ab)g\chi[(fy)b]$. Так как в силу (18) $g\chi a = (\omega a)^{-1}a$ и ω является автоморфизмом группы G, то предыдущее равенство равносильно следующему:

$$(\omega a)\omega[(\omega hy)^{-1}hy]b = (\omega a)(\omega b)\{\omega[(fy)b]\}^{-1}(fy)b,$$

т. е. равенству

$$[\omega(\omega hy)]^{-1}(\omega hy) = (\omega b)(\omega b)^{-1}(\omega fy)^{-1}fy.$$

Справедливость же последнего проверяем, подставляя в него $f = \omega h$ согласно определению (18) и получая таким образом тождество $(\omega fy)^{-1}fy = (\omega fy)^{-1}fy$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Для существования двусторонне автодистрибутивного изотопа группы достаточно и необходимо, чтобы она была коммутативна и чтобы существовал в ней автоморфизм с одной неподвижной точкой.*

Доказательство. Предположим, что ω — автоморфизм с единственной неподвижной точкой в абелевой группе G. По теореме 2 изотоп этой группы, построенный с помощью функций (18), — правосторонне дистрибутивный. Для доказательства его левосторонней дистрибутивности достаточно показать (по той-же теореме), что отображение σ, определённое формулой

$$\sigma = g\chi, \tag{19}$$

тоже является автоморфизмом группы G с единственной неподвижной точкой.

Из (18) и (19) следует, что

$$\sigma a = (\omega a)^{-1}a, \tag{20}$$

откуда $\sigma a \neq a$ для $a \neq e$, ибо тогда $\omega a \neq a$ в силу предположения, что у автоморфизма ω только одна неподвижная точка (т. е. точка e).

Остаётся доказать, что

$$\sigma(ab) = \sigma a \sigma b \tag{21}$$

для любых a и b из G. Мы покажем, что при принятых нами определениях (18) и (19) свойство (21) равносильно коммутативности группы G. В самом деле, в силу (20) свойство (21) можно написать в виде $(\omega ab)^{-1}ab = (\omega a)^{-1}a(\omega b)^{-1}b$. Введя обозначение $d = (\omega b)^{-1}$, получаем после коротких выкладок равенство $d(\omega a)^{-1}a = (\omega a)^{-1}ad$, которое, опять в силу (20), принимает вид $(\sigma a)d = d\sigma a$. Так как отображение $a \to \sigma a$ по (19) взаимно однозначно, то мы можем положить $a = \sigma^{-1}c$, где $c \in G$, получая таким образом $cd = dc$, т. е. свойство коммутативности группы G. Этим доказана достаточность условия.

Для доказательства его необходимости предположим, что A — двусторонне автодистрибутивный изотоп группы G. В силу теоремы 2 отображение ω, определённое формулой (17) и нормированное условием (14), является автоморфизмом группы G с единственной неподвижной точкой. По той же теореме (для случая левосторонней автодиструбитивности) отображение σ, определённое формулой (19), тоже является автоморфизмом группы G с единственной неподвижной точкой, поскольку функции f и g, нормирующие ω, нормируют и σ, т. е. поскольку

(22) $$\sigma e = e.$$

Но в самом деле, из определения (13) следует в силу идемпотентности операции $x\cdot y$ равенство $gx=(fx)^{-1}hx$, которое по (18) и (19) даёт равенство (20) и в частности, для $a=e$, равенство (22).

Наконец, будучи автоморфизмом, σ обладает свойством (21), которое в силу только что выведенного равенства (20) равносильно, как мы доказали, коммутативности группы G. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Для того, чтобы существовал изотоп G двусторонне автодистрибутивной квазигруппы A, являющийся группой, необходимо и достаточно существование в A элемента u, удовлетворяющего уравнению биссиметрии* (3) *для всяких x, y и z из A.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что из предположения двусторонней автодистрибутивности квазигруппы легко вытекает её идемпотентность и

(23) *ассоциативность:* $(x\cdot y)\cdot x = x\cdot(y\cdot x)$.

Заметим далее, что будучи изотопом квазигруппы, G тоже является квазигруппой, т. е. что из уравнения изотопии, написанного в виде

(24) $$\chi(ab)=\varphi a\cdot\psi b,$$

где a и b — элементы G, а $\chi a, \varphi a$ и ψa — элементы A, вытекает единственность решений уравнения $ab=c$ как для a, так и для b.

Для того, чтобы квазигруппа G была группой, ещё необходимо и достаточно наличие в ней единичного элемента, т. е. элемента e, подчинённого условию

(25) $$ae=ea=a \text{ для всякого } a\in G,$$

и свойства ассоциативности

(26) $$(ab)c=a(bc).$$

Докажем, что условие теоремы необходимо. Для этого предположим, что изотоп G квазигруппы A является группой, т. е. что условия (25) и (26) выполнены, и положим $u=\chi e$.

Руководясь выводом нормирующего условия (14), мы можем (см. стр. 37) подобрать функции f и g таким образом, чтобы выполнялось равенство $f\chi e=g\chi e=e$, т. е.

(27) $$\chi e=\varphi e=\psi e=u.$$

На основании (24) и (27) условия (25) и (26) могут быть написаны в виде

(28) $$\varphi a\cdot u = u\cdot\psi a=\chi a$$

и $\varphi(ab)\cdot\psi c=\varphi a\cdot\psi(bc)$. Умножая слева и справа обе стороны последнего равенства на u и применяя (24), (22) и (28), мы получаем

$$u\{[\varphi(ab)\cdot u]\cdot[\psi c\cdot u]\}=\{[u\cdot\varphi a]\cdot[u\cdot\psi(bc)]\}\cdot u,$$
$$u\cdot\{\chi(ab)\cdot[\psi c\cdot u]\}=\{[u\cdot\varphi a]\cdot\chi(bc)\}\cdot u,$$
$$u\cdot\{[\varphi a\cdot\psi b]\cdot[\psi c\cdot u]\}=\{[u\cdot\varphi a]\cdot[\varphi b\cdot\psi c]\}\cdot u,$$
$$[(u\cdot\varphi a)\cdot\chi b]\cdot[u\cdot(\psi c\cdot u)]=[(u\cdot\varphi a)\cdot u]\cdot[\chi b\cdot(\psi c\cdot u)],$$

или, в обозначениях из квазигруппы A,

$$(x\cdot y)\cdot(u\cdot z)=(x\cdot u)\cdot(y\cdot z),$$

т. е. уравнение бисимметрии (3) для любых элементов x, y и z этой квазигруппы.

Докажем теперь, что условие теоремы достаточно. Для этого предположим наличие в квазигруппе A элемента u, удовлетворяющего уравнению (3) для всяких её элементов x, y и z. Построим её изотоп G, определяя φ и ψ формулой (28) при произвольно выбранном χ. Полагая затем $e=hu$, легко проверить, что (25) и (27) выполнены, т. е. что e является единицей в G. Так как при выполнении (27) и (28) условие (26) равносильно (3), то G обладает свойством ассоциативности. Следовательно G является группой и теорема 4 доказана.

§ 4. ПРИМЕЧАНИЯ

1. В доказательстве теоремы 2 было упомянуто, что все правосторонне автодистрибутивные изотопы группы G можно получить из любого её автоморфизма ω, не имеющего, кроме e, неподвижных точек, причём однако $\sigma G=G$ для $\sigma a=(\omega a)^{-1}a$. Заметим, что для этого достаточно разложить данный автоморфизм ω произвольным образом на взаимно однозначные отображения f и χ. Тогда функции f, $h=\chi^{-1}$ и $gx=(fx)^{-1}hx$ определяют все искомые изотопы.

2. С помощью теорем 2 и 3 можно построить простой пример лишь односторонне дистрибутивной операции. Для этого достаточно воспользоваться любой некоммутативной группой с автоморфизмом, оставляющим неподвижной лишь единицу группы.

Такова напр.[2]) свободная группа G ранга 2, каждый элемент

[2]) Этот пример принадлежит П. Эрдешу, которому я выражаю здесь мою искреннюю благодарность.

которой может быть написан с помощью двух свободных генераторов a и b в следующем сокращённом виде: $a^{n_1}b^{m_1}\ldots a^{n_k}b^{m_k}$, где $k=1,2,\ldots$, а n_i и m_i пробегают значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $a^0=b^0=e$.

Группа G, очевидно, не коммутативна, так как напр. $ab\neq ba$ вследствие однозначности сокращённого вида всякого её элемента. Отображение ω, определённое в ней формулой

$$\omega(a^{n_1}b^{m_1}\ldots a^{n_k}b^{m_k}) = a^{-n_1}b^{-m_1}\ldots a^{-n_k}b^{-m_k},$$

является автоморфизмом с единственной неподвижной точкой e.

Конечно, нельзя заключать по этому примеру, что и в случае непрерывных сократимых операций, определённых для действительных чисел, односторонняя автодистрибутивность не влечёт за собою двусторонней: она влечёт за собой двустороннюю, если только операция дифференцируема.

3. Из теоремы 4 видно, что можно ожидать решения уравнения автодистрибутивности приведением его к уравнению бисимметрии, поскольку выполнены условия квазигруппы. В § 2 было осуществлено на деле такое приведение, даже при гораздо более общих условиях. Именно, вместо разрешимости уравнения $x\cdot y=z$ предполагалась лишь двусторонняя сократимость.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Ацель (J. Aczél), *О теории средних*, Coll. Math. 4 (1956), стр. 33-55.

[2] — *On mean values*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), стр. 392-400.

[3] Л. Фукс (L. Fuchs), *On mean systems*, Acta Math. Hung. 1 (1950), стр. 303-320.

[4] М. Госсу (M. Hosszú), *On the functional equation of autodistributivity*, Publicationes Mathematicae 3 (1953), стр. 83-87.

[5] Б. Кнастер (B. Knaster), *Sur une équivalence pour les fonctions*, Coll. Math. 2 (1949), стр. 1-4.

[6] Д. Ц. Мурдох (D. C. Murdoch), *Structure of Abelian quasi-groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 49 (1941), стр. 392-409.

[7] Ц. Рылль-Нардзевский (C. Ryll-Nardzewski), *Sur les moyennes*, Studia Math. 11 (1949), стр. 31-37.

Reçu par la Rédaction le 2. 7. 1956

SUR CERTAINES REPRÉSENTATIONS DES FONCTIONS D'ENSEMBLE À VARIATION BORNÉE (I)

(INTÉGRALE INDÉFINIE – FONCTION D'ENSEMBLE)

PAR

J. POPRUŽENKO (ŁÓDŹ)

1. Fonctions d'ensemble à variation bornée. Désignons par $\mathcal{M}$ un espace abstrait, par E un sous-ensemble variable de $\mathcal{M}$, par $\mathfrak{M}$ un σ-corps (= famille σ-additive et complémentative) d'ensembles de $\mathcal{M}$.

Soit $F(E)$ une fonction réelle d'ensemble définie dans $\mathfrak{M}$ et soit

$$(1)\qquad E=E_1+E_2+\ldots+E_k,\quad E_i\,\epsilon\,\mathfrak{M},\quad E_iE_j=0,\quad (i\neq j).$$

Posons $\sigma=|F(E_1)|+\ldots+|F(E_k)|$ et $V_F(E)=\sup\{\sigma\}$, cette borne étant prise par rapport à toutes les décompositions de E de la forme (1).

DÉFINITION. Une fonction $F(E)$ sera dite *à variation bornée dans* $\mathfrak{M}$ lorsque $V_F(E)<\infty$ quel que soit $E\,\epsilon\,\mathfrak{M}$.

Si $\mathfrak{M}$ coïncide avec la famille de tous les sous-ensembles de $\mathcal{M}$, $F(E)$ sera dite *à variation bornée* (comparer [1], p. 171).

La fonction $V_F(E)$, qui est définie également pour tout $E\,\epsilon\,\mathfrak{M}$, représente alors la variation totale de $F(E)$.

Notons les propriétés suivantes, faciles à vérifier:

(i_1) *E étant un ensemble de $\mathfrak{M}$, pour qu'une fonction F s'annule identiquement dans la famille de tous les ensembles de $\mathfrak{M}$ contenus dans E, il faut et il suffit que l'on ait $V_F(E)=0$.*

(i_2) *La fonction $V_F(E)$ est à variation bornée en même temps que $F(E)$.*

(i_3) *$V_F(E)$ est une fonction monotone non décroissante de l'ensemble E.*

(i_4) *Une fonction à variation bornée dans $\mathfrak{M}$ y est bornée.*

(i_5) *Une fonction additive dans $\mathfrak{M}$ y est à variation bornée.*

2. Théorème de décomposition. Désignons par $\mathfrak{H}$ la famille de tous les ensembles H de $\mathfrak{M}$ pour lesquels la relation $Z\subset H$ entraîne $Z\,\epsilon\,\mathfrak{M}$. Soit $\mathfrak{B}$ un σ-corps contenu dans $\mathfrak{M}$ et ayant la propriété suivante:

(*) *Quel que soit l'ensemble E de $\mathfrak{M}$, il existe un ensemble B de $\mathfrak{B}$ tel que $B\subset E$ et $(E-B)\,\epsilon\,\mathfrak{H}$.*