BEMERKUNGEN ÜBER NICHTISOMETRISCHE ABBILDUNGEN

VON

W. NITKA (WROCŁAW)

1. Laut einem Satze von Freudenthal und Hurewicz ([1], Satz IV, S. 121) gibt es bei jeder nichtisometrischen Abbildung f eines total beschränkten Raumes X auf sich sowohl Punktepaare, deren Abstand voneinander wächst, als auch Punktepaare, deren Abstand voneinander abnimmt.

Dabei heißt ein metrischer Raum X *total beschränkt*, wenn er für jedes $\delta > 0$ die Summe endlich vieler Mengen ist, deren Durchmesser die Zahl δ nicht überschreiten ([2], S. 108). Diese Bedingung ist damit äquivalent, daß jede Punktfolge eine Cauchysche Folge enthält ([2], *ibidem*), oder auch damit, daß ([3], 1, S. 113)

(1) für jedes $\varepsilon > 0$ X eine endliche Punktmenge F_ε enthält, die von allen Punkten $x \in X$ einen Abstand $\varrho(x, F_\varepsilon) < \varepsilon$ hat.

Jede derartige Menge F_ε wird hier ein *ε-Netz* genannt. Insbesondere ist jeder total beschränkte Raum beschränkt und separabel, und jeder kompakte Raum total beschränkt.

Die Voraussetzung, X sei total beschränkt, ist wesentlich. Dagegen kann die Voraussetzung $f(X) = X$ durch eine schwächere, wie z. B. in Satz I bzw. Satz II, ersetzt werden. Außerdem kann für f irgendeine (auch mehr-mehrdeutige) Relation zwischen den Punkten von X stehen.

Die Arbeit der am Anfang genannten Autoren schließt mit folgendem Problem: Läßt sich etwas Schärferes aussagen über die ... Kompensation von Dehnungen durch Verkürzungen und umgekehrt?

In der vorliegenden Mitteilung wird das so gestellte Problem bejahend gelöst, und zwar durch eine quantitative — obwohl noch nicht die feinste — Abschätzung des Kompensationsvorganges, was ja offenbar etwas Schärferes ist, als dessen rein qualitative Feststellung. Es wurde hier allerdings ein anderer Beweisgedanke zugrundegelegt, der im wesentlichen auf (1) beruht.

2. Im folgenden sei $f(x)$ irgendeiner der Bildpunkte von x, also — der erweiterten Deutung von f gemäß — irgendeiner der Punkte, zu denen x in der Relation f steht. Ferner sei $n = n_\varepsilon$ die kleinstmögliche Anzahl

der Punkte eines ε-Netzes im total beschränkten Raume X, der selber aus mehr als 2 Punkten bestehen soll. Ist $n_\varepsilon = 1$, so fügen wir dem Netz noch einen Punkt hinzu und setzen $n = 2$.

SATZ 1. *Ist $f(X) \subset X$, wobei aber $X \subset \overline{f(X)}$ (d. h. $f(X)$ ist dicht in X) und gilt für ein Punktepaar a, b von X und für ein Bildpunktepaar $f(a), f(b)$ die Gleichung*

$$\varrho(a, b) = \varrho[f(a), f(b)] + 12\varepsilon, \tag{2}$$

so gibt es in X auch Punkte a', b' und Bildpunkte $f(a'), f(b')$, welche folgender Ungleichung genügen:

$$\varrho(a', b') < \varrho[f(a'), f(b')] - \varepsilon/n(n-1). \tag{3}$$

Beweis. Sind K_a und K_b Vollkugeln um a und b mit dem Radius 2ε, so gilt offenbar für je zwei Punkte $p \in K_a$ und $q \in K_b$

$$\varrho(p, q) \geqslant \varrho(a, b) - 4\varepsilon. \tag{4}$$

Nehmen wir der Behauptung zuwider an, daß f die Entfernungen in X *höchstens* nur um

$$d = \varepsilon/n(n-1) \tag{5}$$

vergrößert. Dann ergibt sich aus (2)

$$\varrho[f(p), f(q)] \leqslant \varrho[f(p), f(a)] + \varrho[f(a), f(b)] + \varrho[f(b), f(q)]$$
$$\leqslant 2\varepsilon + d + \varrho(a, b) - 12\varepsilon + 2\varepsilon + d = \varrho(a, b) - 8\varepsilon + 2d,$$

woraus, der Annahme wegen, für die i-te Iteration f^i von f

$$\varrho[f^i(p), f^i(q)] \leqslant \varrho[f^{i-1}(p), f^{i-1}(q)] + d \leqslant \varrho(a, b) - 8\varepsilon + (i+1)d$$

folgt. Laut (5) gilt daher insbesondere für $i \leqslant \binom{n}{2}$

$$\varrho[f^i(p), f^i(q)] \leqslant \varrho(a, b) - 8\varepsilon + \left[\binom{n}{2} + 1\right]\varepsilon/n(n-1) \tag{6}$$
$$\leqslant \varrho(a, b) - 8\varepsilon + \varepsilon < \varrho(a, b) - 4\varepsilon.$$

Daraus erhalten wir wegen (4) folgenden Schluß:

(7) Es ist nicht möglich, daß einer der Punkte $f^i(p)$, $f^i(q)$ in die Kugel K_a und zugleich der andere in die Kugel K_b fällt.

Nun werde mit N_0 ein aus etwa n Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bestehendes ε-Netz in X bezeichnet, das nach Voraussetzung vorhanden ist, während mit N_i eine aus ebensovielen i-ten Bildpunkten $f^i(p_1), f^i(p_2), \ldots, f^i(p_n)$ bestehende Punktmenge bezeichnet wird, wobei auch im Falle der Mehrdeutigkeit von f die Beziehung

$$(8) \qquad N_{i+1} \subset f(N_i)$$

rekursiv beachtet werden soll. Von nun an soll $f^i(p)$ für $p \in N_0$ denjenigen N_i-Punkt bezeichnen, der in obiger Konstruktion aus p hervorgegangen ist.

Zunächst wird mittels der Induktion gezeigt, daß N_i ein $(\varepsilon+2id)$-Netz in X ist.

Für $i = 0$ stimmt dies mit der Definition von N_0 überein. Nehmen wir also an, N_{i-1} sei ein $[\varepsilon+2(i-1)d]$-Netz in X und betrachten irgendeinen Punkt $x \in X$. Die Voraussetzung $X \subset \overline{f(X)}$ hat das Vorhandensein eines Punktes x' mit der Eigenschaft

$$(9) \qquad \varrho[x, f(x')] < d$$

zur Folge. Zugleich, gemäß der Annahme über N_{i-1}, kommt unter den n Punkten $f^{i-1}(p_1), f^{i-1}(p_2), \ldots, f^{i-1}(p_n)$ dieses Netzes mindestens ein Punkt $f^{i-1}(p_j)$ vor, für den

$$\varrho[x', f^{i-1}(p_j)] < \varepsilon+2(i-1)d,$$

also für den nach (4)

$$\varrho[f(x'), f^i(p_j)] < \varepsilon+2(i-1)d+d$$

gilt. Nach (9) ergibt sich daraus tatsächlich

$$\varrho[x, f^i(p_j)] \leqslant \varrho[x, f(x')]+\varrho[f(x'), f^i(p_j)] < d+\varepsilon+2(i-1)d+d = \varepsilon+2id.$$

Insbesondere, da sich für $i \leqslant \binom{n}{2}$ wegen (5) die Ungleichung $\varepsilon+2id \leqslant 2\varepsilon$ ergibt, ziehen wir folgenden Schluß:

(10) N_r sind für $r = 0, 1, \ldots, \binom{n}{2}$ lauter 2ε-Netze.

Demnach gibt es in jedem dieser N_r mindestens einen Punkt aus K_a und einen anderen aus K_b. Es sei etwa $f^r(p_s) \in K_a$ und $f^r(p_t) \in K_b$, wobei p_s und p_t zu N_0 gehören. Dann lehrt (7), auf die zu N_{r+i} (für $i = 1, 2, \ldots \ldots, \binom{n}{2}-r$) gehörenden Punkte $f^{r+i}(p_s)$ und $f^{r+i}(p_t)$ angewendet, daß die gleichzeitige Inzidenz dieser Punkte in je eine der Kugeln K_a und K_b unmöglich ist. Diese Unmöglichkeit betrifft insbesondere $r+i = \binom{n}{2}$.

Da es jedoch in N_0, als in einer n-punktigen Menge, überhaupt nur $\binom{n}{2}$ Punktepaare gibt, schließen wir, daß $N_{\binom{n}{2}}$ keine zwei Punkte enthalten kann, deren einer in K_a und der andere in K_b liegt. Das widerspricht aber dem Schluß (10).

Satz 2. *Ist $X \subset f(X)$, $f(X) \subset \overline{X}$ und*

$$\varrho(a, b) = \varrho[f(a), f(b)]-12\varepsilon$$

für ein Paar a,b von Punkten des Raumes X, so gibt es in X ein Punktepaar a',b' mit der Eigenschaft

$$(11) \qquad \varrho(a', b') > \varrho[f(a'), f(b')]+\varepsilon/n(n-1).$$

Beweis. Es genügt sich auf den Satz 1 zu berufen, wobei die inverse Relation (Abbildung) f^{-1} statt f gesetzt wird, und zu beachten, daß sowohl jede Teilmenge als auch die abgeschlossene Hülle einer total beschränkten Menge total beschränkt ist.

3. Folgende Frage bleibt zunächst offen:

P 194. Gibt es eine schärfste Abschätzung der Kompensation von Verkürzungen durch Dehnungen, bzw. umgekehrt, und inwieweit läßt sich insbesondere die Abschätzung (3), bzw. (11), verbessern?

Die totale Beschränktheit von X ist zwar eine hinreichende, nicht aber eine notwendige Bedingung für die betrachtete Kompensationserscheinung: diese Erscheinung bleibt ja offenbar bestehen, wenn man alle positiven Entfernungen in X um 1 vergrößert (eine Bemerkung von A. Lelek).

Es bleiben also auch folgende Fragen (von B. Knaster) offen:

P 195. Wie läßt sich die Metrik ϱ derjenigen Räume X charakterisieren, in denen eine Kompensation von Dehnungen und Verkürzungen auftritt? Ist insbesondere folgende Eigenschaft dafür charakteristisch: zu jeder Punktfolge p_n mit der Eigenschaft $\varrho(p_n, p_m) > \delta > 0$, die für alle n und m gelte, gibt es einen Punkt $p \in X$, für den die Folge $\varrho(p_n, p)$ konvergent ist ohne stationär zu sein?

LITERATUR

[1] H. Freudenthal und W. Hurewicz, *Dehnungen, Verkürzungen, Isometrien*, Fund. Math. 26 (1936), S. 120-122.

[2] F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin und Leipzig 1935, III Auflage.

[3] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa-Wrocław 1948, II Auflage.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Reçu par la Rédaction le 27. 4. 1956