EIN SPIEL VON BANACH UND MAZUR

VON

M. REICHBACH (WROCŁAW)

Einleitung. Das hier betrachtete Spiel stellt eine von S. Banach herrührende Modifikation eines von S. Mazur früher definierten Spieles dar. Die Mazursche Definition und ihre Abarten, darunter die vorliegende, sind in dem sogenannten Schottischen Buch zu finden, d. h. in einem in Lemberg vor dem zweiten Weltkriege geführten, während der Kriegsjahre aufbewahrten und gegenwärtig in Breslau befindlichen Heft mit mathematischen Problemen (vgl. Colloquium Mathematicum 1 (1947) S. 57). Das Spiel von Banach war Gegenstand der Arbeiten [4], [5] und [6]. Es ist folgendermaßen erklärt:

Auf der Halbgeraden $[0, \infty)$ sei eine Menge M gegeben. Zwei Spieler A und B spielen folgendermaßen: A wählt eine Zahl $a_1 > 0$. Sobald die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ schon gewählt sind, wählen die Spieler B und A, der Reihe nach, die Zahlen a_{2n} und a_{2n+1} derart, daß die Bedingungen

$$a_{2n-1} > a_{2n} > 0 \tag{1}$$

und

$$a_{2n} > a_{2n+1} > 0 \tag{2}$$

erfüllt sind.

Wir setzen

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

und legen fest:

Falls $s \in M$, hat A gewonnen; andernfalls hat B gewonnen.

Wir sagen, daß A *eine Gewinnmethode hat*[1]) oder daß *man der Menge M nicht ausweichen kann*, wenn es eine derartige, die Bedingung (2) erfüllende Funktionenfolge $a_1, a_3(a_1, a_2), \ldots, a_{2n+1}(a_1, a_2, \ldots, a_{2n}), \ldots$ gibt, daß $s \in M$, sobald die Folge $\{a_{2n}\}_{n=1,2,\ldots}$ die Bedingung (1) erfüllt. Wir sagen, daß B *eine Gewinnmethode hat*, oder daß *man der Menge M ausweichen kann*, wenn es eine derartige, die Bedingung (1) erfüllende Funktionenfolge $a_2(a_1), a_4(a_1, a_2, a_3), \ldots, a_{2n}(a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}), \ldots$ gibt, daß $s \bar{\epsilon} M$, sobald die Folge $\{a_{2n+1}\}_{n=0,1,\ldots}$ die Bedingung (2) erfüllt. (Dabei ist in (2) $a_0 = \infty$ zu setzen.)

[1]) Was die verschiedenen Methoden in der Theorie der Spiele anbetrifft, so siehe z. B. [2] und [3].

H. Steinhaus stellte die Frage, ob man jeder Menge der ersten Kategorie ausweichen kann. In dieser Arbeit geben wir (Abschnitt I) eine verneinende Antwort auf diese Frage. Wir konstruieren nämlich eine perfekte Menge M vom Maße 0 (im Lebesgueschen Sinne) und beweisen die Existenz einer Gewinnmethode für den Spieler A. (Da diese perfekte Menge M das Maß 0 hat, ist sie offenbar nulldimensional, nirgendsdicht und damit umsomehr von erster Kategorie.) Wir zeigen sogar (Satz 1): wenn man die Spielregeln (1) und (2) durch

$$a_{2n-1} \geqslant a_{2n} \geqslant 0 \tag{1'}$$

und

$$\min_{\substack{a_i>0 \\ i<2n}} a_i > a_{2n+1} > 0 \tag{2'}$$

ersetzt (womit das Spiel für B erleichtert und für A erschwert wird), so existiert auch dann eine derartige, die Bedingung (2′) erfüllende Funktionenfolge $a_1, a_3(a_1, a_2), \ldots, a_{2n+1}(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$, daß $s \in M$, sobald die Folge $\{a_{2n}\}_{n=1,2,\ldots}$ die Bedingung (1′) erfüllt.

In II geben wir eine hinreichende Bedingung[2]) dafür an, daß man einer Menge ausweichen kann.

Im folgenden bezeichnen wir mit $\bar{X}$ die abgeschlossene Hülle der Menge X, mit $\varrho(x, Y)$ die Entfernung zwischen dem Punkt x und der Menge Y ($\varrho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \varrho(x, y)$, wo $\varrho(x, y)$ die Entfernung zwischen den Punkten x und y ist) und mit $|X|$ das Lebesguesche Maß der Menge X. Wir setzen noch

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

I. In diesem Abschnitt konstruieren wir eine perfekte Menge M vom Maße 0 und beweisen (Satz 1) die Existenz einer solchen die Bedingung (2′) erfüllenden Funktionenfolge $a_1, a_3(a_1, a_2), \ldots, a_{2n+1}(a_1, a_2, \ldots, a_{2n}), \ldots,$

[2]) Diese Bedingung wurde in einer etwas anderen Ausdrucksweise von S. Hartman in seinem Berichte *Bemerkungen über das Spiel von Banach und Mazur*, am 22. X. 1954 auf der Sitzung der Polnischen Mathematischen Gesellschaft, Breslauer Sektion, vorgetragen (vgl. Colloquium Mathematicum 4(1957), S. 261). Herrn Prof. S. Hartman verdanke ich auch zahlreiche Ratschläge, die zur Vereinfachung dieser Arbeit beigetragen haben.

daß $s \in M$, sobald die Folge $\{a_{2n}\}_{n=1,2,\dots}$ die Bedingung (1′) erfüllt. Die Menge M bestimmen wir wie folgt: auf der Strecke [0,1] betrachten wir die Punkte $p_n = 1/2^n$; q_{n+1} sei der Punkt im Intervall (p_{n+1}, p_n), $n = 0, 1, \dots$, welcher von p_{n+1} die Entfernung

$$\frac{p_n - p_{n+1}}{4} = \frac{1}{2^{n+3}}$$

hat. Die offenen Intervalle (p_n, q_n), $n = 1, 2, \dots$, bezeichnen wir mit I_n; die abgeschlossenen Strecken $[q_{n+1}, p_n]$, $n = 0, 1, \dots$, mit D_{n+1} (Abb. 1).

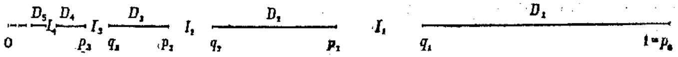

Abb. 1.

Mit M_1 bezeichnen wir die Menge, die nach Beseitigung der Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ aus der Strecke [0,1] übrigbleibt. Wir wiederholen auf jeder Strecke D_n dieselbe Konstruktion im entsprechend verkleinerten Maßstabe und erhalten auf diese Weise die Punkte $p_{n,m}$ und $q_{n,m}$, die (offenen) Intervalle $I_{n,m}$ und die (abgeschlossenen) Strecken $D_{n,m}$ (Abb. 2).

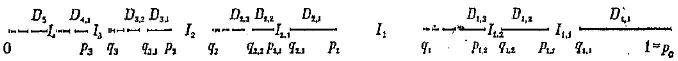

Abb. 2.

Mit M_2 bezeichnen wir die Menge, welche nach der Beseitigung der Menge $\bigcup_{(n,m)} I_{n,m}$ $(n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots)$ aus M_1 entsteht. Durch sukzessive Wiederholung der angegebenen Konstruktion erhalten wir die Punkte $p_{k_1,k_2,\dots,k_n}$ und $q_{k_1,k_2,\dots,k_n}$, die (offenen) Intervalle $I_{k_1,k_2,\dots,k_n}$ und die (abgeschlossenen) Strecken $D_{k_1,k_2,\dots,k_n}$ mit wachsender Anzahl von Indizes. Der Durchschnitt

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$$

der Mengen

$$M_n = [0,1] \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{(k_1,\dots,k_j)} I_{k_1,k_2,\dots,k_j}$$

(wobei sich die innere Summe auf alle Werte der Indizes $k_1, k_2, \dots, k_j$ erstreckt) ist offenbar eine perfekte Menge vom Maße 0.

Bevor wir Satz 1 beweisen, geben wir noch einige Eigenschaften der definierten Menge M an, die unmitelbar aus ihrer Definition folgen. Wir haben nämlich (s. Abb. 1)

$$(3)\qquad \varrho(0, q_{k+1}) = |D_{k+1}| + |I_k| = \varrho(q_{k+1}, q_k), \qquad k = 1, 2, \dots,$$

$$(4)\qquad \varrho(0, I_k) > |I_k|, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

und

$$(5)\qquad |D_k| > |D_{k+1}| + |I_k|, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

und allgemein (s. Abb. 2)

$$(3')\qquad \varrho(q_{k_1,k_2,\dots,k_{l-1}}, q_{k_1,k_2,\dots,k_{l-1},k_l+1}) = |D_{k_1,k_2,\dots,k_{l-1},k_l+1})| + |I_{k_1,k_2,\dots,k_{l-1},k_l}| = \varrho(q_{k_1,k_2,\dots,k_{l-1},k_l+1}, q_{k_1,k_2,\dots,k_{l-1},k_l}),$$

$$(4')\qquad \varrho(q_{k_1,k_2,\dots,k_{l-1}}, I_{k_1,k_2,\dots,k_{l-1},k_l}) > |I_{k_1,k_2,\dots,k_{l-1},k_l}|$$

und

$$(5')\qquad |D_{k_1,k_2,\dots,k_l}| > |D_{k_1,k_2,\dots,k_{l-1},k_l+1}| + |I_{k_1,k_2,\dots,k_{l-1},k_l}|.$$

Aus (3′) und (4′) folgt durch einfache Induktion

$$(4'')\qquad \varrho(q_{k_1,k_2,\dots,k_{l-1},k_l}, I_{k_1,k_2,\dots,k_{l-1},k_l,k_{l+1},\dots,k_s}) > |I_{k_1,k_2,\dots,k_{l-1},k_l,k_{l+1},\dots,k_s}|.$$

SATZ 1. *Ist M die vorher definierte Menge und ist die Bedingung (1′) erfüllt, so existiert eine derartige, der Bedingung (2′) genügende Funktionenfolge $a_1, a_3(a_1, a_2), \dots, a_{2n+1}(a_1, a_2, \dots, a_{2n}), \dots$, daß $s \in M$.*

Beweis. Der Beweis wird erbracht, indem man zeigt, daß bei der Wahl der Folge $a_1, a_3(a_1, a_2), \dots$ die Bedingung $s_{2n-1} = q_{k_1,k_2,\dots,k_{l(n)}}$ für jedes $n = 1, 2, \dots$ erfüllt werden kann. Da die Punkte $q_{k_1,k_2,\dots,k_l}$ zur Menge M gehören und da diese kompakt ist, gehört auch

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$$

zur Menge M.

Diese Folge wird induktiv definiert. Wir setzen $a_1 = q_2$. Es ist also

$$(\mathrm{i})\qquad a_1 > 0, \quad s_1 = q_2 \quad \text{und} \quad 0 \leqslant a_2 \leqslant |D_2| + |I_1|.$$

Die letzte Bedingung ist auf Grund von (1′) und (3) erfüllt.

Wir setzen voraus, es seien schon die Funktionen $a_1, a_3(a_1, a_2), \dots, a_{2n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{2n-2})$ definiert, die außer (2′) noch folgende Eigenschaften besitzen:

(ii) s_{2n-1} ist einer der Zahlen $q_{k_1,k_2,\ldots,k_l}$ gleich und es gilt $0 \leqslant a_{2n} \leqslant D_{k_1,k_2,\ldots,k_l}|+|I_{k_1,k_2,\ldots,k_l-1}|$ oder $0 \leqslant a_{2n} < |D_{k_1,k_2,\ldots,k_l}|$, je nachdem ob $k_l > 1$ oder $k_l = 1$ ist.

Für $n = 1$ gilt (ii) auf Grund von (i) mit $a_1(a_0) = a_1$. Wir haben zu zeigen, daß sobald a_{2n} die Bedingung (1') erfüllt, die Funktion a_{2n+1} derart bestimmt werden kann, daß (ii) für $n+1$ statt n gilt.

Es können zwei Fälle vorkommen:

(a) s_{2n} ist einer der Zahlen $q_{k_1,k_2,\ldots,k_s}$ gleich

und

(b) der entgegengesetzte Fall.

Da die Zahlen $q_{k_1,k_2,\ldots,k_s,k_{s+1}}$ für $k_{s+1} \to \infty$ gegen $q_{k_1,k_2,\ldots,k_s}$ konvergieren und größer als $q_{k_1,k_2,\ldots,k_s}$ sind, können wir im Fall (a) einen Punkt $q_{k_1,k_2,\ldots,k_s,k_{s+1}}$ mit $k_{s+1} > 1$ bestimmen, dessen Abstand von s_{2n} kleiner als $\min\limits_{a_i>0} a_i$ $(i \leqslant 2n)$ ist. A hat dann diesen Abstand als die Zahl a_{2n+1} zu wählen. Mithin haben wir

$$s_{2n+1} = q_{k_1,k_2,\ldots,k_s,k_{s+1}}.$$

Daß auch der zweite Teil von (ii) für $n+1$ erfüllt ist, schließt man aus (1') und (3'). Damit ist dieser Fall erledigt.

Gemäß den in (ii) vorausgesetzten Ungleichungen zerfällt der Fall (b) in zwei Unterfälle:

(b_1) $s_{2n} \in \bar{I}_{k_1,k_2,\ldots,k_l-1,\ldots,k'_s}$ (wobei entsprechend $s > l$ und k'_s beliebig, oder $s = l$ und $k'_s = k_l - 1$ ist),

(b_2) $s_{2n} \in M$ und $s_{2n} \notin \bar{I}_{k_1,k_2,\ldots,k_{l-1},\ldots,k'_s}$.

Im Falle (b_1) haben wir wegen $s_{2n-1} = q_{k_1,k_2,\ldots,k_l}$,

$$a_{2n} \geqslant \varrho(q_{k_1,k_2,\ldots,k_l}, I_{k_1,k_2,\ldots,k_l-1,\ldots,k'_s}).$$

Daraus folgt auf Grund von (4') (wenn $s = l$) oder (4'') (wenn $s > l$), daß der Abstand der Punkte s_{2n} und $q_{k_1,k_2,\ldots,k_l-1,\ldots,k'_s}$ voneinander kleiner als a_{2n} ist. Diesen Abstand hat nun A als a_{2n+1} zu wählen. Mithin haben wir

$$s_{2n+1} = q_{k_1,k_2,\ldots,k_l-1,\ldots,k'_s}.$$

Da nach (5') $|I_{k_1,k_2,\ldots,k'_s}| < |D_{k_1,k_2,\ldots,k'_s}|$, so hat man nach (1') $a_{2n+2} < |D_{k_1,k_2,\ldots,k'_s}|$ und somit ist (ii) für $n+1$ erfüllt.

Im Falle (b_2) ist der Punkt s_{2n} dem Durchschnitt einer abnehmenden Folge von Strecken $D_{k_1,k_2,\ldots,k_l}$ gleich. Falls wir annehmen, daß in der Folge $k_1, k_2, \ldots$ für $l > l_0$, $k_l = 1$ ist, folgt $s_{2n} = p_{k_1,k_2,\ldots,k_{l_0}-1}$ und daher, für $k_{l_0}-1 = k'_s$, $s_{2n} \in \bar{I}_{k_1,k_2,\ldots,k_l-1,k'_s}$, was ($b_2$) widerspricht. Mithin muß $k_l > 1$ unendlich oft vorkommen. Da die Längen dieser Strecken gegen 0 konvergieren, so existiert ein derartiges l, daß $s_{2n} \in D_{k_1,k_2,\ldots,k_l-1,k_l}$ mit $k_l > 1$ und $|D_{k_1,k_2,\ldots,k_l-1}| < a_{2n}$. In diesem Falle hat man zu setzen $a_{2n+1} = \varrho(s_{2n}, q_{k_1,k_2,\ldots,k_l-1,k_l-1})$, so daß $s_{2n+1} = q_{k_1,k_2,\ldots,k_{l-1},k_l-1}$. Wegen (5') und (1') ist $a_{2n+2} < |D_{k_1,k_2,\ldots,k_l-1}|$, also ist (ii) für $n+1$ statt n erfüllt.

Der Beweis ist zu Ende.

Bemerkung 1. Die Voraussetzung, daß der Spieler A das Spiel beginnt ist wesentlich. Andernfalls könnte B $a_1 > 1$ wählen, was schon $s \notin M$ nach sich zieht.

Die Bevorzugung des Spielbeginners kann auf zweierlei Arten vermieden werden:

Man kann verlangen, daß der beginnende Spieler $a_1 < 1$ wählen muß. Will man aber die Zahl a_1 keinen Beschränkungen unterwerfen, so muß man die Menge M durch die Menge

$$M^+ = M_0 + M_1 + \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$$

ersetzen, wobei M_i aus M durch eine Verschiebung um $i = 0, 1, \ldots$ entsteht. Dann kann immer der Spieler A gewinnen, gleichgültig ob er oder sein Gegner beginnt.

Bemerkung 2[3]. Da $q_{k_1,k_2,\ldots,k_l}$ rationale Zahlen sind, bleibt Satz 1 auch dann bestehen, falls man verlangt, daß alle a_i rational seien.

Bemerkung 3[4]. Wir sagen, daß *die Menge M eine induktive Eigenschaft hat*, wenn jede Menge $M' \supset M$, selbst diese Eigenschaft besitzt. Bezeichnen wir mit α einen beliebigen topologischen Typus von unabzählbaren, kompakten, nulldimensionalen und metrischen Räumen, so kann man beweisen, daß zu jedem α eine Menge $M' \epsilon \alpha$ existiert, die auf der Halbgeraden $[0, \infty)$ liegt und in welcher die vorher definierte Menge M enthalten ist[5]. Da die Existenz einer Gewinnmethode für den Spieler A selbstverständlich eine induktive Eigenschaft der Menge M ist, schließen wir also, daß es zu jedem α eine Menge $M' \epsilon \alpha$ gibt, die auf der Halbgeraden $[0, \infty)$ liegt und die man in Satz 1 statt M einsetzen darf.

Bemerkung 4. Das Spiel von Banach und Mazur kann folgendermaßen auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden. Es sei X^m das kartesische Produkt beliebig (vielleicht unabzählbar) vieler Halbgeraden $X = [0, \infty)$, in welchem die Addition vektorweise erklärt ist. Ist für $a_1 = (a_1^1, a_2^1, \ldots)$ und $a_2 = (a_1^2, a_2^2, \ldots)$, $a_j^1 < a_j^2$ $(j = 1, 2, \ldots)$, so setzen wir $a_1 < a_2$. Das entsprechende gilt auch für das Zeichen $\leqslant$.

[3]) Diese Bemerkung verdanke ich Herrn A. Goetz. Sie stellt eine teilweise Antwort auf eine von S. Ulam stammende Frage.

[4]) Diese Bemerkung stammt von E. Marczewski.

[5]) Dies folgt aus Resultaten, die sich in [1] befinden und aus einigen eigenen, die noch nicht publiziert worden sind.

Weiter definieren wir das mehrdimensionale Spiel und die Gewinnmethode wie in der Einleitung. Wir nennen eine Menge $Q \subset X^m$ *stark nirgendsdicht*, wenn ihre Projektionen auf jede Achse nirgendsdicht auf dieser Achse sind (offenbar ist die Strecke $E_{x,y}\{0 \leqslant x \leqslant 1; y = x\} \subset X^2$ *nicht* stark nirgendsdicht, obwohl sie in X^2 im üblichen Sinne nirgendsdicht ist. Umgekehrt ist aber jede stark nirgendsdichte Menge auch im üblichen Sinne nirgendsdicht). Aus Satz 1 folgt, daß M^m eine stark nirgendsdichte Menge ist, welche eine verneinende Antwort auf die, auf mehrere Dimensionen bezogene, Frage von H. Steinhaus liefert.

Die Bemerkungen 1-3 (die letztere nur, wenn m eine endliche Zahl ist) können entsprechend auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden.

II. Wir sagen, daß *eine Menge* $P \subset [0, \infty)$ *die Eigenschaft* (h) *hat*, wenn für jeden Punkt $x \geqslant 0$ und jede Zahl $\varepsilon > 0$ ein mit P disjunktes Intervall I rechts von x existiert, für welches $\varrho(x, I) \leqslant |I| < \varepsilon$.

SATZ 2. *Haben die Mengen $N_1, N_2, \ldots$ die Eigenschaft* (h), *so kann man der Menge $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ ausweichen.*

Beweis. Es sei I_1 ein mit N_1 disjunktes Intervall rechts von s_1, für welches $\varrho(s_1, I_1) < |I_1| < a_1$. Der Spieler B wählt

$$a_2 = \begin{cases} \varrho(s_1, I_1), & \text{wenn} \quad \varrho(s_1, I_1) > 0, \\ (1/4)|I_1|, & \text{wenn} \quad \varrho(s_1, I_1) = 0. \end{cases}$$

Es ist nun klar, daß $a_1 > a_2 > 0$ und daß bei $a_3 < a_2$ immer $s_3 \in I_1$ ausfallen muß. Werden die $a_2, a_4, \ldots$ hinreichend klein gewählt, so ist auch die Reihensumme s in I_1 enthalten; somit $s \notin N_1$. Beim zweiten Schritt von B wird von der Eigenschaft (h) bezüglich der Menge N_2 Gebrauch gemacht: a_4 kann so gewählt werden, daß bei jeder zulässigen Wahl von a_5 die Teilsumme s_5 innerhalb eines mit N_2 disjunkten Intervalls $I_2 \subset I_1$ liegt und somit $s_5 \notin N_2$. Sind a_6, a_8 u. s. w. hinreichend klein, so ist $s \in I_2$ und somit $s \notin N_1 \cup N_2$. Wendet B dieses Verfahren bei jedem Schritt an, so kann er gewährleisten, daß $s \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$, w. z. b. w.

Selbstverständlich ist die Voraussetzung, daß der Spieler A beginnt, unwesentlich.

Wir geben noch zwei Folgerungen aus Satz 2 an.

FOLGERUNG 1[6]). *Jeder abzählbaren Menge kann man ausweichen.*

Denn jede einpunktige Menge hat die Eigenschaft (h).

Bevor wir die zweite Folgerung aussprechen, führen wir noch den Begriff einer regulären Menge ein. Es sei $\mathfrak{A}$ eine Operation, ausgeführt auf der Strecke $D = [a, b]$, welche in der Beseitigung einer endlichen Anzahl $I_1, I_2, \ldots, I_m$ von paarweise disjunkten, offenen Intervallen aus dem Inneren von D besteht. Wir ordnen die Intervalle so an, daß I_j links von $I_{j'}$ liegt, falls $j < j'$. Die Restmenge $D \setminus (I_1 + I_2 + \ldots + I_m)$ ist eine Summe von $m+1$ Strecken $D_1, D_2, \ldots, D_m, D_{m+1}$, welche auch von links nach rechts numeriert seien. Die Operation $\mathfrak{A}$ nennen wir *m-regulär*, wenn für $j = 1, 2, \ldots, m$, $|D_j| \leqslant |I_j|$ und $|D_{m+1}| \leqslant |I_m|$ gilt. Wir nehmen nun eine beliebige Strecke D und führen auf ihr eine m_1-reguläre Operation $\mathfrak{A}_1$ aus. Die erhaltene Menge bezeichnen wir mit F_1. Ist die Menge F_n definiert, so erhalten wir die Menge F_{n+1} dadurch, daß wir auf jeder Strecke der Menge F_n eine beliebige m_{n+1}-reguläre Operation $\mathfrak{A}_{n+1}$ ausführen. Den Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ aller Mengen F_n nennen wir eine *reguläre Menge* (z. B. ist die Cantorsche Menge regulär mit $m_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$).

Aus dieser Definition schließt man leicht, daß jede reguläre Menge die Eigenschaft (h) hat.

FOLGERUNG 2. *Läßt sich die Menge N als Summe von abzählbar vielen regulären Mengen darstellen, so kann man ihr ausweichen.*

Diese Folgerung stellt die Antwort auf eine Frage von S. Drobot dar.

[6]) Dieses Ergebnis befindet sich in [6].

LITERATURVERZEICHNISS

[1] B. Knaster et M. Reichbach, *Notion d'homogénéité et prolongements des homéomorphies*, Fund. Math. 40 (1953), S. 180-193.

[2] J. McKinsey, *Introduction to the theory of games*, New York 1952.

[3] H. Steinhaus, *Definicje potrzebne do teorii gry i pościgu*, Myśl Akademicka I,1, Lwów 1929.

[4] A. Turowicz, *Sur une propriété des nombres irrationels*, Annales Pol. Math. 2 (1955), S. 103-105.

[5] A. Zięba, *An example of the game of Banach and Mazur*, Coll. Math. 4 (1957), S. 230-231.

[6] S. Zubrzycki, *On the game of Banach and Mazur*, ibidem, S. 227-229.

Reçu par la Rédaction le 22. 9. 1956