Then, in view of (17),

$$\{\omega : f_0(\omega) = x\} = \bigcap_{t\geqslant 0} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : \omega(t) = \langle i_1, \ldots, i_n\rangle\}.$$

Hence, according to (15),

$$(19) \qquad (\{\omega : f_0(\omega) = x\}) \leqslant \Big(1 - \sum_{y\epsilon X_0} q(y)\Big) \lim_{t\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t}t^n}{2^n n!} = 0.$$

Let A be an arbitrary denumerable set of real numbers. Then

$$\{\omega : f_0(\omega)\epsilon A\} \subset \{\omega : f_0(\omega) = 2\} \cup \bigcup_{x\epsilon A\cap C} \{\omega : f_0(\omega) = x\}.$$

Hence, according to (10), (15), (17) and (19),

$$P(\{\omega : f_0(\omega)\epsilon A\}) \leqslant P(\{\omega : f_0(\omega) = 2\}) = \sum_{x\epsilon X_0} q(x) < 1.$$

Then f_0 assumes essentially non-denumerably many values. The theorem is thus proved.

REFERENCES

[1] J. L. Doob, *Stochastic processes*, New York-London 1953.

[2] P. Lévy, *Systèmes markoviens et stationnaires. Cas dénombrable*, Ann. Éc. Norm. Sup. 68 (1951), p. 327-381.

[3] A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Erg. Math. 2 (3), (1933).

Reçu par la Rédaction le 19. 11. 1956

P R O B L È M E S

P 4, R 2. La réponse affirmative pour $k = 3$ et $n \geqslant 2$ quelconque a été établie récemment par Chung-Tao Yang [1]) pour le cas où le triple de points distincts p_1, p_2, p_3 est celui des sommets d'un triangle équilatéral de côté $d \leqslant 2\pi/3$. Ce résultat est un nouveau pas vers la solution générale.

I. 1, p. 30 et 31; IV. 2, p. 239.

[1]) Chung-Tao Yang, *On maps from spheres to Euclidean spaces*, American Journal of Mathematics 79 (1957), p. 725-732.

P 125, R 1. La réponse est affirmative [2]).

III. 1, p. 75.

[2]) Voir P. Erdös and S. Kakutani, *On a perfect set*, Colloquium Mathematicum 4 (1957), p. 195-196.

P 163, 164, R 1. Une communication de P. Erdös, *Concerning approximation with nodes*, liée à ces problèmes sera publiée dans le volume VI de ce journal.

Dans l'énoncé de **P 163**, le signe $\underline{\lim}$ doit être remplacé par $\overline{\lim}$, et, dans l'énoncé de **P 164**, le signe $\overline{\lim}$ par $\underline{\lim}$.

IV. 2, p. 210.

P. ERDÖS (BUDAPEST)

P 174, R 1. The answer is negative. According to a theorem of Pólya-Carlson [3]) (or Szegö) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{k_n}$ has the unit cercle as a natural boundary except if $\sum_{n=1}^{\infty} z^{k_n}$ is rational, *i. e.* for an enumerable number of sequences k_n, $1 \leqslant n < \infty$. (Pólya-Carlson theorem states that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, a_n integer,

[3]) P. Erdös, *Note on the converse of Fabry's gap theorem*, Transactions of the American Mathematical Society 57 (1945), p. 102-104.

has the circle of convergence as natural boundary except if it is rational, and Szegö's theorem asserts the same if there are only a finite number of different numbers among the a_n). Another theorem of Pólya asserts that the sequence k_n can be lacunary (in the sense of **P 174**) only if $k_n/n \to \infty$, which shows that the answer for **P 174** is no.

IV. 2, p. 242. Budapest, 8. VII. 1957.

P 183, R 1. P. Erdös (Budapest) et J. Lipiński (Łódź) ont remarqué que tout point qui n'est situé sur l'axe de symétrie d'aucun segment unissant deux sommets quelconques du réseau possède la propriété en question.

IV, 2. p. 263.

P 184, R 1. P. Erdös (Budapest) a démontré que la réponse est affirmative. Soit $k = \pi r^2$ un entier. Un simple raisonnement montre que $\int K(P,r)\,dP = k$, où l'intégration s'étend sur le carré-unité, c'est-à-dire que la valeur moyenne k de $K(P,r)$ est donc égale à l'aire du cercle de rayon r. Soit S l'ensemble de points définis comme il suit: $x \in S$ s'il y a au moins deux sommets du réseau à la distance r de x. Evidemment, S est dénombrable. Supposons que l'on ait partout $K(P,r) \neq k$. Alors, k étant la valeur moyenne de $K(P,r)$, l'ensemble des points P où l'on a $K(P,r) > k$, de même que celui où l'on a $K(P,r) < k$, est de mesure plane positive. P_1 non $\in S$ étant un point tel que $K(P_1, r) > k$, soit P_2 un point tel que $K(P_2, r) < k$ et qu'aucune ligne joignant P_1 à P_2 ne rencontre S. Evidemment, un tel P_2 existe, puisque la mesure plane de l'ensemble des points qui n'ont pas cette propriété est nulle (cet ensemble étant une somme dénombrable de lignes). Sur une ligne joignant P_1 à P_2, $K(P,r)$ ne peut se changer que de $+1$ ou de -1. L'équation $K(P,r) = k$ est donc résoluble, c. q. f. d.

IV. 2, p. 263.

P 185, R 1. P. Erdös (Budapest) et J. Lipiński (Łódź) ont remarqué qu'une telle droite n'existe pas pour $r = 1$, car par exemple pour un cercle ouvert (pour un cercle fermé le raisonnement étant analogue) l'égalité $K(P,r) = 1$ n'est valable que si P est un sommet du réseau, mais alors en déplaçant P parallèlement aux axes, on a toujours $K(P,r) \neq 3$ et en le déplaçant le long d'une droite quelconque qui passe par un sommet du réseau, la valeur de $K(P,r)$ saute de 2 en ce sommet.

IV. 2, p. 263.

P 193, R 1. Le travail de Gustin [4]) contient non seulement le résultat cité par Mycielski [5]), mais aussi la solution de **P 193.**

[4]) W. Gustin, *Partitioning an interval into finitely many congruent parts*, Annals of Mathematics 54 (1951), p. 250-261.

[5]) Jan Mycielski, *On the decomposition of a segment into congruent sets and related problems*, Colloquium Mathematicum 5 (1957), p. 24-27.

S. HARTMAN AND JAN MYCIELSKI (WROCŁAW)

P 214. Formulé dans la communication *On the imbedding of topological groups into connected topological groups.*

Ce fascicule, p. 169.

R. SIKORSKI (VARSOVIE)

P 215. Formulé dans la communication *Some examples of Borel sets.*

Ce fascicule, p. 171.

A. SCHINZEL (VARSOVIE)

P 216, 217. Formulé dans la communication *Sur un problème de P. Erdös.*

Ce fascicule, p. 203.

P 216, R 1. La réponse affirmative a été donnée par P. Erdös.

Ce fascicule, p. 203.

S. MANDELBROJT (PARIS)

P 218. Soit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ une fonction univalente dans $|z| < 1$; soit, de même $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ une fonction univalente dans $|z| < 1$. Démontrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n} z^n$$

est une fonction univalente dans $|z| < 1$.

Il en résulte immédiatement que $|a_n| \leqslant n$ (si $a_1 = 1$) pour une fonction univalente dans $|z| < 1$ (hypothèse de Bieberbach).

Nouveau Livre Écossais, Probl. 344, 14. V. 1957.

P 219. Soit D un domaine borné simplement connexe. Soit $F(z)$ $(z \in D)$ une fonction holomorphe sur ce domaine (fermé). Posons

$$M_n = \operatorname*{Max}_{z \in D} |F^{(n)}(z)|.$$

Trouver une relation entre M_p, M_q, M_r, $0 \leqslant p < q < r$ (cette relation dépend évidemment de D).

Nouveau Livre Écossais, Probl. 346, 14. V. 1957.

A. ZYGMUND (CHICAGO)

A function $f(x)$ of the real variable x is called *smooth*, if it is continuous and if

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h} = 0$$

for each x (the notion comes from Riemann, the terminology from Steinhaus). It is easy to show (Rajchman) that every function which is smooth and real-valued has at least one point of differentiability, and even that the set of its points of differentiability is of the power of the continuum (Zalcwasser), though, on the other hand, there exist smooth functions differentiable almost nowhere; the function

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} n^{-1/2} \sin 2^n x$$

is an instance in point.

P 220. Does the theorem about the existence of points of differentiability hold for functions which are smooth and complex-valued?

If not, then

P 221. Does the theorem hold for smooth functions representable by power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx}$?

New Scottish Book, Probl. 345, 14. V. 1957.

B. KNASTER (WROCŁAW)

P 222. Existe-t-il un ensemble plan, connexe et héréditairement localement connexe S qui soit somme dénombrable d'ensembles disjoints, fermés dans S et différents de S? En particulier, eux-mêmes connexes?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 327, 16. XII. 1956.

P 223. Caractériser topologiquement la famille des continus C ayant la propriété suivante: aucune fonction continue définie sur C et dont les valeurs sont situées dans un espace topologique quelconque (ou du moins dans un espace $\mathcal{L}^*$ [6])) ne prend chacune de ses valeurs exactement deux fois, ou plus généralement, un même nombre $n > 1$ de fois.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 350, 15. V. 1957.

P 224. Est-ce que tout continu plan C qui est la frontière d'une région et qui n'est pas localement connexe contient un point p qui le coupe entre deux points (en ce sens que tous sous-continu de C qui les unit passe par p)?

Wrocław, le 5. VII. 1956.

[6]) Au sens de C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa-Wrocław 1948, p. 83.

H. STEINHAUS (WROCŁAW)

P 225. Démontrer ou réfuter que trois diagonales d'aucun polygone régulier ayant un nombre premier (impair) de sommets ne peuvent avoir un point commun qui ne soit pas un sommet.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 328, 23. XII. 1956.

P 226. T étant un ensemble fermé de droites tangentes d'une sphère fixe S, les propositions suivantes sont-elles compatibles:

(1) Tout grand cercle de S a au moins une tangente appartenant à T,

(2) Aucun grand cercle de S n'a deux tangentes parallèles appartenant à T?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 331, 7. I. 1957.

P 227. Démontrer l'existence d'une constante k telle que, sur toute surface fermée convexe et pourvue d'un plan tangent en chaque point, la longueur l de la plus courte géodésique fermée satisfait à la condition $l \leqslant kd$, où d est le diamètre de la surface. La plus petite constante $k_{\min}$ de ce genre est une constante universelle.

Est-ce que $k_{\min} = \pi$?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 337, 30. I. 1957.

P 228. Soit $\{n_k\}$ une suite croissante d'entiers positifs telle que, pour certaine suite $\{c_k\}$ de nombres complexes, le rayon de convergence de la série

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{n_k}$$

soit égal à 1 et que $\{c_k\}$ converge pour $|z|=1$ dans un ensemble de mesure (linéaire) positive, mais pas presque partout. Démontrer que, pour tout α réel tel que $0<\alpha<1$, la suite $\{c_k\}$ peut être choisie de manière que l'ensemble des points auxquels la série (*) converge soit de mesure α.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 330, 30. XII. 1956.

P 229. L'équipe A se compose de n joueurs d'échecs A_i où $i=1,2,\ldots,n$ et l'équipe B — d'un nombre égal de joueurs B_k où $k=1,2,\ldots,n$. La probabilité c_{ik} pour que A_i batte B_k quels que soient i et k est connue.

Etant donné que le concours se compose de jeux simultanés d'un nombre n pair de couples $A_i B_k$ dont le premier est désigné par le chef de l'équipe A, le second par celui de l'équipe B et ainsi de suite, alternativement, indiquer à chacun des deux chefs le mode de procéder — conforme à la théorie des jeux — pour que le nombre espéré des victoires de son équipe soit maximum.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 342, 19. III. 1947.

S. HARTMAN (WROCŁAW)

Soient: $\mathcal{C}$ l'ensemble parfait non-dense de Cantor, μ la mesure induite dans lui par la fonction singulière de Lebesgue ($\mu\mathcal{C}=1$) et f une fonction mesurable μ, assujettie à l'additivité

$$(*)\qquad f(x+y)=f(x)+f(y)$$

(α^0) pour tous les $x, y\in[0,1]$,

(α) pour tous les $x, y\in\mathcal{C}$,

(α') pour tous les $x, y\in Z\subset\mathcal{C}$ où $\mu Z=1$,

(α'') pour tous les $(x,y)\in E\subset\mathcal{C}^2$ où $\mu^2 E=1$,

μ^2 désignant la mesure-produit.

On a évidemment $(\alpha^0)\to(\alpha)\to(\alpha')\to(\alpha'')$.

P 230. Est-ce que l'une de ces propriétés suffit pour que f coïncide μ-presque partout avec une fonction linéaire?

La même question pour chacune des propriétés (α), (α') et (α'') en admettant que f est mesurable (B).

On sait que si l'on a (*) pour presque tout couple (x,y) au sens de la mesure plane de Lebesgue et si la fonction f est mesurable (L), elle

coïncide avec une fonction linéaire pour presque tout x au sens de la mesure linéaire de Lebesgue.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 351, 21. V. 1957.

F. SZCZOTKA (WROCŁAW)

P 231. Formulé dans la communication *Sur un problème concernant les éliminations.*

Ce fascicule, p. 263.

H. STEINHAUS (WROCŁAW)

P 232. Formulé dans la communication *Un problème sur les corps convexes.*

Ce fascicule, p. 264.