ОБ УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, СОДЕРЖАЩИХ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

О. А. ОЛЕЙНИК (МОСКВА)

Многие задачи механики приводят к рассмотрению дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при старших производных. К таким дифференциальным уравнениям относятся уравнения движения вязкой жидкости при малой вязкости, дифференциальные уравнения, описывающие движение газа с учетом вязкости и теплопроводности и другие.

При изучении дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных основная задача состоит в том, чтобы исследовать поведение решений краевых задач при стремлении параметра к нулю. Этой задаче в последнее время посвящено значительное число работ.

Я остановлюсь * на результатах, выясняющих поведение решений основных краевых задач для линейных уравнений второго порядка эллиптического и параболического типа при стремлении к нулю параметра при старших производных.

Рассмотрим сначала первую краевую задачу, или задачу Дирихле, для уравнения

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)+A(x, y)\frac{\partial U}{\partial x}+B(x, y)\frac{\partial U}{\partial y}+C(x, y)\,U=f(x, y). \tag{1}$$

Пусть $U_\varepsilon(x, y)$ решение задачи Дирихле для уравнения (1), принимающее на границе S области D значения $\varphi(p)$. Граница области D, функция $\varphi(p)$, коэффициенты $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ и функция $f(x, y)$ предполагаются достаточно гладкими, $\varepsilon > 0$. Решение $U_\varepsilon(x, y)$ можно рассматривать, как распределение температуры в движущейся жидкости, коэффициент теплопроводности которой равен ε. Вектор

* Доклад прочитанный на VIII Съезде Польских Математиков в Варшаве, 6-12. IX. 1953.

$(-A(x, y), -B(x, y))$ определяет скорость движущейся жидкости в точке (x, y), $C(x, y)$ — коэффициент излучения, $f(x, y)$ — плотность источников.

Установим на границе S положительное направление так, чтобы при обходе границы в положительном направлении область D оставалась слева. Обозначим через s длину дуги кривой из S и пусть s возрастает при обходе кривой в положительном направлении.

Будем считать, что точка границы S принадлежит S_1, если в этой точке

$$B(x, y)\frac{dx}{ds}-A(x, y)\frac{dy}{ds}<0,$$

принадлежит S_2, если

$$B\frac{dx}{ds}-A\frac{dy}{ds}>0,$$

и принадлежит S_0, если

$$B\frac{dx}{ds}-A\frac{dy}{ds}=0.$$

Левинсон [5] показал, что решения $U_\varepsilon(x, y)$ сходятся к решению $U(x, y)$ уравнения

$$A(x, y)\frac{\partial U}{\partial x}+B(x, y)\frac{\partial U}{\partial y}+C(x, y)\,U=f(x, y) \tag{2}$$

во всех точках области σ, граница которой состоит из дуги, принадлежащей S_1, двух характеристик уравнения (2), проходящих через концы этой дуги и дуги из S_2 (рис. 1). Предполагается, что характеристики

$$\frac{dx}{A(x, y)}=\frac{dy}{B(x, y)} \tag{3}$$

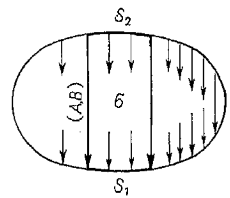

Рис. 1

уравнения (2) не имеют особых точек внутри этой области. Предельная функция $U(x, y)$ принимает значения $\varphi(P)$ в точках из S_1. Сходимость функций $U_\varepsilon(x, y)$ будет равномерной в любой замкнутой области принадлежащей σ и не содержащей точек S_2. Этот результат легко установить физически: при теплопроводности близкой к нулю, температура жидкости изменяется только за счет переноса частиц жидкости и за счет излучения, и поэтому температура жидкости на S_2 не влияет на распределение температуры внутри σ.

Можно установить поведение решений $U_\varepsilon(x, y)$ при малых значениях ε, не накладывая никаких ограничений на поведение характеристик уравнения (2).

Предположим, что $C(x, y) < 0$ в D. В этом случае предельная функция $U(x, y)$ для решений задачи Дирихле $U_\varepsilon(x, y)$ строится следующим образом. Вдоль каждой интегральной кривой уравнения (3) установим положительное направление, определяемое вектором $(A(x, y), B(x, y))$, и пусть длина дуги t этой кривой возрастает в положительном направлении. Уравнение (2) вдоль характеристик запишем в виде

$$\text{(4)} \qquad \sqrt{A^2+B^2}\,\frac{dU}{dt} = -C(x, y)U+f(x, y).$$

В точках, где $A^2+B^2 = 0$ предельная функция $U(x, y)$ равна f/C. Если через точку (x, y) области D проходит интегральная кривая урвнения (3), пересекающая границу области D в точке P из S_1 то $U(x, y)$ равно значению решения в точке (x, y) уравнения (4), принимающего в граничной точке P значение $\varphi(P)$. Если (x, y) принадлежит замкнутой интегральной кривой уравнения (3), то $U(x, y)$ равно значению в этой точке единственного периодического решения урвнения (4). Если через точку (x, y) проходит интегральная кривая уравнения (3), ω, — предельное множество которой принадлежит $D+S$, то можно показать, что вдоль такой интегральной кривой уравнение (4) имеет единственное ограниченное решение. Предельная функция $U(x, y)$ равна значению этого решения в точке (x, y). Сходимость функций $U_\varepsilon(x, y)$ будет равномерной в любой замкнутой области, не содержащей точек S_2, S_0 и точек характеристик (3), касающихся границы в таких точках из S_1, в окрестности которых лежат граничные точки S, не принадлежащие $\bar{S}_1$.

Поясним это на примерах. Если характеристики (3) имеют вид, указанный на рис. 2, то предельная функция определяется значе ниям $\varphi(P)$ на границе $P_1^1P_2^1$ и $P_1^2P_2^2$ принадлежащей S_1. На характеристиках, проходящих через точки P_1^2 и P_2^2 предельная функция $U(x, y)$ разрывна.

Если характеристики (3) имеют вид, указанный на рис. 3, то предельная функция $U(x, y)$ непрерывна и не зависит от граничной функции $\varphi(P)$.

Интересно отметить, что определение предельной функции для последовательности $U_\varepsilon(x, y)$ приводит к рассмотрению некоторой краевой задачи для уравнения первого порядка (см. [3]).

Для первой краевой задачи для параболического уравнения

$$\text{(4')} \qquad \varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+A(x, y)\frac{\partial U}{\partial x}+B(x, y)\frac{\partial U}{\partial y}+C(x, y)\,U = f(x, y)$$

имеют место аналогичные результаты.

Предельная функция определяется, как решение уравнения (4), которое принимает заданные значения $\varphi(P)$ в тех точках границы, где

$$B\frac{dx}{ds}-A\frac{dy}{ds} < 0.$$

Рассмотрим теперь вторую и третью краевую задачу для уравнения (1) при условии, что $C(x, y) < 0$ (см. [6, 7]). Пусть $U_\varepsilon(x, y)$ — ре-

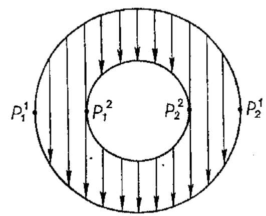

Рис. 2

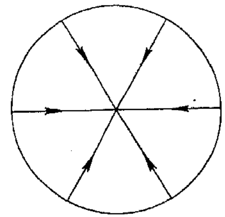
Рис. 3

шение уравнения (1), удовлетворяющее на границе S области D условию

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial U}{\partial n}+au = \varphi.$$

Функции a и φ предполагаются достаточно гладкими, $a \leqslant 0$, $\partial U/\partial n$ означает производную по направлению внутренней нормали к границе области D.

Предположим, что в $D+S$ существует дважды непрерывно дифференцируемое решение $U(x, y)$ уравнения (2), удовлетворяющее в точках S_1 границы S условию (5). В этом случае можно утверждать, что $U_\varepsilon(x, y)$ при ε стремящемся к нулю, равномерно в $D+S$ сходятся к функции $U(x, y)$.

Из этой теоремы следует, что если граница S не содержит точек S_1 и в $D+S$ существует какое-либо дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (2), то функция $U_\varepsilon(x, y)$ при ε стремящемся к нулю, сходится к этому решению. Если $f \equiv 0$, то таким решением будет $U(x,y)\equiv 0$. С помощью этой же теоремы можно установить более общее предложение о сходимости функций $U_\varepsilon(x,y)$.

Будем предполать в дальнейшем, что $A^2(x,y)+B^2(x,y)\neq 0$ и замыкание S_1 состоит из конечного числа связных компонент. Пусть P_1^i и P_2^i конечные точки i-ой компоненты и положительное направление границы совпадает с направлением от P_1^i до P_2^i.

Рассмотрим на $\bar S_1$ уравнение

$$\cos(s,t)\frac{dU}{ds}=-\frac{c(x,y)U}{\sqrt{A^2+B^2}}+a\cos(n,t)U-\cos(n,t)\varphi+\frac{f}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{6}$$

где $\cos(s,t)$ означает косинус угла между касательной и вектором (A,B) в точке границы S, а $\cos(n,t)$ — косинус угла между направлением внутренней нормали и тем же вектором. Этому уравнению удовлетворяет на $\bar S_1$ непрерывно дифференцируемое в $D+S$ решение уравнения (2), удовлетворяющее в точках $\bar S_1$ условию (5), если оно существует.

Пусть E множество точек $\bar S_1$, для которых $\cos(s,t)=0$. Будем называть решением уравнения (6), всякую функцию $U(s)$, которая удовлетворяет уравнению (6) во всех точках дополнения к E на $\bar S_1$ и в точках E определяется равенством:

$$-Cu+a\cos(n,t)\sqrt{A^2+B^2}\,U-\cos(n,t)\sqrt{A^2+B^2}\varphi+f=0.$$

Можно показать, что существует единственное непрерывное на $\bar S_1$ решение уравнения (6), которое в граничных точках P_k^i, где $(-1)^k\cos(s,t)>0$, принимает заданные значения. (Если в точке $P_k^i(-1)^k\cos(s,t)>0$, то характеристика, проходящая через P_k^i, принадлежит $D+S$).

Будем предполагать еще, что в $D+S$ нет предельных циклов, т. е. каждая интегральная кривая уравнения (3) либо является замкнутой линией, либо имеет начало и конец на границе области D. В этом случае существует единственная, непрерывная в $D+S$ функция $U(x,y)$ такая, что на $\bar S_1$ она является решением уравнения (6), а вдоль интегральных кривих уравнения (3) она удовлетворяет уравнению (4). Функции $U_\varepsilon(x,y)$ сходятся равномерно в $D+S$ к построенной таким образом функции $U(x,y)$. Следовательно, предельная функция $U(x,y)$ определяется единственным образом на замкнутых характеристиках (3), как периодическое решение уравнения (4), в точках характеристик, пересекающих границу $\bar S_1$, $U(x,y)$ определяется значениями $U(x,y)$ на $\bar S_1$. В точках S_1 функция $U(x,y)$ определяется уравнением (6) и условием непрерывности функции $U(x,y)$ в $D+S$. Приведем для пояснения примеры.

Пусть характеристики уравнения (3) имеют вид, указанный на рис. 2, область D — двусвязна.

Функция $U(x,y)$ однозначно определяется на части границы S_1 между точками P_1^1 и P_2^1 как решение уравнения (6). Это уравнение имеет в точке границы S_1 на дуге $P_1^1P_2^1$, где направление характеристики совпадает с направлением нормали, особую точку типа „седла”. Единственное ограниченное решение уравнения (6) на дуге $P_1^1P_2^1$ будет составляться из сепаратрис. По значениям на дуге $P_1^1P_2^1$ функция $U(x,y)$ однозначно определяется, как решение уравнения (4), во всей области D за исключением точек, лежащих на характеристиках, пересекающих дугу $P_1^2P_2^2$, принадлежащую S_1. На ранице S_1 между точками $P_1^2P_2^2$ функция $U(x,y)$ должна определятся, как решение уравнения (6).

Это уравнение имеет на дуге $P_1^2P_2^2$ особую точку типа „узел”. Его решение определяется однозначно на $P_1^2P_2^2$ по значениям $U(x,y)$ в точках P_1^2 и P_2^2. Зная функцию $U(x,y)$ на дуге $P_1^2P_2^2$ определяем единственным образом функцию $U(x,y)$ как решение уравнения (4), во всех точках области D лежащих на характеристиках, пересекающих дугу $P_1^2P_2^2$.

Вторая и третья краевые задачи для уравнения (1) с малым параметром, как и в случае задачи Дирихле, приводят к новой краевой задаче для уравнения первого порядка, для которой получено выше обобщенное решение.

Случай многих независимых переменных в уравнении (1) исследуется аналогично. Для параболического уравнения (4) с малым параметром исследована также краевая задача с условиями

$$U(x,0)=\varphi(x),\qquad \frac{\partial U(0,y)}{\partial x}=\varphi_1(y),\qquad \frac{\partial U(l,y)}{\partial x}=\varphi_2(y);$$

построена предельная функция для решений $U_\varepsilon(x,y)$ этой задачи.

Изучению дифференциальных уравнений с малым параметром посвящены работы [1], [2], [4], [8].

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] R. B. Davis, *Asymptotic solutions of the first boundary value problem for a fourth order elliptic partial differential equation*, Journal of the Rational Mechanics and Analysis 5 (1956), № 3, стр. 605.

[2] K. O. Friedrichs, *Asymptotic phenomena in mathematical physics*, Bull. Amer. Math. Soc. 61 (1955), № 6, стр. 485-504.

[3] С. Л. Каменомостская, *Первая краевая задача эллиптического типа с малым параметром при старших производных*, Известия АН СССР, серия математическая, 19 (1955), стр. 345-360.

[4] J. J. Lewin, *First order partial differential equations containing a small parameter*, Journal of the Rational Mechanics and Analysis 4 (1955), № 3, стр. 481-501.

[5] N. Levinson, *The first boundary value problem for* $\varepsilon\Delta u+A(x,y)u_x+B(x,y)u_y+C(x,y)u=D(x,y)$ *for small* ε, Annals of Mathematics 51 (1950), № 2, стр. 428-445.

[6] О. А. Олейник, *Об уравнениях эллиптического типа с малым параметром при старших производных*, Математический Сборник 31 (1952), стр. 104-118.

[7] — *О краевых задачах для уравнений с малым параметром при старших производных*, Доклады АН СССР 85 (1952), стр. 493-495.

[8] — *Краевые задачи для уравнений с частными производными с малым параметром при старших производных и задача Коши для нелинейных уравнений в целом*, Успехи Математических Наук 10 (1955), № 3, стр. 229-234.

Reçu par la Rédaction le 14. 8. 1956

REMARKS ON INVARIANT FUNCTIONS IN MARKOV PROCESSES

BY

K. URBANIK (WROCŁAW)

1. Let X be a finite or denumerable set. By $\langle \Omega(X), B_{\Omega(X)}, P\rangle$ we shall denote the stochastic process satisfying the following conditions:

1° The sample functions $\omega \in \Omega(X)$ are X-valued step functions defined for $t \geqslant 0$;

2° $B_{\Omega(X)}$ is the Borel field of subsets of $\Omega(X)$ generated by the class of sets of the form

$$A(t,x) = \{\omega : \omega(t) = x\} \quad (t \geqslant 0, x \in X). \tag{1}$$

3° P is a probability measure in $B_{\Omega(X)}$.

4° There is a continuous function $p(t,x,y)$ of the variable t ($t \geqslant 0$; $x, y \in X$) satisfying the following conditions:

(α) $p(t,x,y) \geqslant 0$,

(β) $\sum_{y \in X} p(t,x,y) = 1$,

(γ) $p(t_1+t_2, x, y) = \sum_{z \in X} p(t_1,x,z)p(t_2,z,y)$,

(δ) $P\left(\bigcap_{i=0}^{n} \{\omega : \omega(t_j) = x_j\}\right) = P(\{\omega : \omega(0) = x_0\}) \prod_{j=1}^{n} p(t_j - t_{j-1}, x_{j-1}, x_j)$ for

$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$.

In the present note a stochastic process $\langle \Omega(X), B_{\Omega(X)}, P\rangle$ is called briefly a *Markov process*, and a function $p(t,x,y)$ is called a *transition probability*.

Let us consider a Markov process $\langle \Omega(X), B_{\Omega(X)}, P\rangle$. In view of a theorem of Lévy ([2], p. 362) for every $x \in X$ exists the limit

$$Q(x) = \lim_{t\to\infty} P(\{\omega : \omega(t) = x\}). \tag{2}$$

The function $Q(x)$ is called the *limit distribution* of the process $\langle \Omega(X), B_{\Omega(X)}, P\rangle$.