ÜBER EIN PROBLEM DER GLEICHVERTEILUNGSTHEORIE

VON

S. KNAPOWSKI (POZNAŃ)

Ist $0 < a_1 < a_2 < \ldots$ eine Folge natürlicher Zahlen, so bilden wir die Folge

$$(1)\qquad \frac{1}{a_1}, \frac{2}{a_1}, \ldots, \frac{a_1-1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{a_2-1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots, \frac{a_n-1}{a_n}, \ldots,$$

deren Glieder mit u_n bezeichnet werden mögen.

Es sei $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$. Mit $A(n)$ bezeichnen wir die Anzahl derjenigen u_i, für welche $i \leqslant n$, $u_i \epsilon [\alpha, \beta)$.

Es sei $S(x)$ $(x \geqslant 1)$ eine stetige, monotone Funktion, die für ganzzahlige positive Werte von x die Gleichung

$$(2)\qquad S(x) = \sum_{\nu=1}^{x} a_\nu - x$$

erfüllt.

Satz. *Wir haben* $A(n) = (\beta-\alpha)n + O(a_k)$, *wo* $k = \langle S^{-1}(n)\rangle$ [1]. *Wenn* $a_k/k \to \infty$ *und* $[\alpha, \beta) \neq [0,1)$, *so gilt* $A(n) = (\beta-\alpha)n + \Omega(a_k)$ [2].

Beweis. Ist $n \geqslant a_1$, so hat man

$$u_n = \frac{n - S(\langle S^{-1}(n)\rangle - 1)}{a_{\langle S^{-1}(n)\rangle}}.$$

In der Tat, wenn $u_n = r/a_k$, dann folgt $S(k-1) < n \leqslant S(k)$, $k-1 < S^{-1}(n) \leqslant k$ und daher $k = \langle S^{-1}(n)\rangle$.

Es sei n gegeben und $k = \langle S^{-1}(n)\rangle$. Die Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ teilen wir in zwei Klassen ein: diejenigen, deren Nenner höchstens gleich a_{k-1} sind, und die restlichen, die von der Form r/a_k sind. Die Anzahl der Zahlen erster Klasse, die in $[\alpha, \beta)$ fallen, ist nach (2) gleich $(\beta-\alpha)S(k-1) + O(k)$. In der zweiten Klasse gibt es höchstens $a_k - 1$ Zahlen. Darum:

$$(3)\qquad A(n) = (\beta-\alpha)S(k) + O(a_k) + O(k).$$

[1] $\langle\delta\rangle$ bedeutet die kleinste ganze Zahl $l \geqslant \delta$ und $S^{-1}(x)$ die zu $S(x)$ inverse Funktion.

[2] $F(x) = \Omega(G(x))$ steht für die Relation $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} |F(x)|/G(x) > 0$.

Da $0 \leqslant S(k) - n < a_k$, hat man schließlich $A(n) = (\beta-\alpha)n + O(a_k)$.

Wir beweisen jetzt den zweiten Teil. Setzen wir z. B. $\alpha > 0$ voraus. Es sei $0 < \Theta_1 < \Theta < \alpha$. Ist k hinreichend groß, so liegt im Intervall

$$J_k = \big(S(k-1) + \Theta_1 a_k,\ S(k-1) + \Theta a_k\big)$$

wenigstens eine natürliche Zahl. Wählen wir eine solche, n_k z. B., so ist $k = \langle S^{-1}(n)\rangle$. Für diese n_k hat man

$$(4)\qquad A(n_k) = (\beta-\alpha)\sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu + O(k).$$

Um das einzusehen, bemerken wir, daß der Ausdruck $O(a_k)$ im mittleren Glied von (3) in diesem Falle überflüssig ist, da in $[\alpha, \beta)$ keine Zahlen von der Form r/a_k vorkommen können. In der Tat: man hätte sonst $r \geqslant a_k$, was wegen $r \leqslant n_k - S(k-1)$ mit $n_k \epsilon J_k$ unverträglich ist.

Aus (4) folgt $A(n_k) = (\beta-\alpha)S(k-1) + O(k)$ oder

$$|A(n_k) - (\beta-\alpha)S(k-1)| \leqslant Ck.$$

Darum

$$|A(n_k) - (\beta-\alpha)n_k| = \pm |A(n_k) - (\beta-\alpha)S(k-1)| + \\ + |(\beta-\alpha)S(k-1) - (\beta-\alpha)n_k| \geqslant (\beta-\alpha)\Theta_1 a_k - Ck > \eta a_k,$$

das letztere wegen $a_k/k \to \infty$. Damit ist der Beweis zu Ende.

Folgerung A. *Gilt für eine Funktion* $f(n)$, $n \leqslant S(f(n))$ $(n \geqslant n_0)$, *so hat man* $A(n) = (\beta-\alpha)n + O(a_{\langle f(n)\rangle})$.

Beweis. Es gilt $S^{-1}(n) \leqslant f(n)$, daher $k \leqslant \langle f(n)\rangle$ und schließlich $a_k \leqslant a_{\langle f(n)\rangle}$.

Folgerung B. *Gilt für eine Funktion* $f(n)$, $n \geqslant S(f(n))$ $(n \geqslant n_0)$ *und ist* $a_k/k \to \infty$, $[\alpha, \beta) \neq [0,1)$, *so ist*

$$A(n) = (\beta-\alpha)n + \Omega(a_{[f(n)]}).$$

Beweis. B folgt aus der zweiten Hälfte des Satzes analog wie A aus der ersten.

Insbesondere kann man Kriterien für die Gleichverteilung der Folge (1) angeben:

I. *Existiert eine Funktion* $f(n)$ *mit* $S(f(n)) \geqslant n$ $(n \geqslant n_0)$, $a_{\langle f(n)\rangle} = o(n)$, *so ist die Folge* (1) *gleichverteilt.*

Das ist wegen A klar.

II. *Ist* $a_k/k \to \infty$ *und gibt es eine Funktion* $f(n)$ *mit* $S(f(n)) \leqslant n$ $(n \geqslant n_0)$, $a_{[f(n)]} \neq o(n)$, *so ist die Folge* (1) *nicht gleichverteilt.*

Das ist wegen B klar.

Beispiele. 1. $a_n = n$.

Dann ist $S(x) = x(x+1)/2 - x$. Wird $f(n) = 2\sqrt{n}$ angenommen, so wird $n \leqslant S(f(n))$ und es gilt also $A(n) = (\beta-\alpha)n + O(\sqrt{n})$.

2. $a_n = a^n$ ($a > 1$, ganz).

Jetzt ist $S(x) = (a^{x+1}-1)/(a-1) - x$. Setzt man

$$f(n) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}(a-1)n+1\right)}{\log a} = 1,$$

so gilt

$$S(f(n)) = \tfrac{1}{2}n + O(\log n),$$

$$a_{[f(n)]} = a^{[f(n)]} > a^{f(n)-1} = \frac{\frac{1}{2}(a-1)n+1}{a^2} \neq o(n).$$

Die Folge (1) ist deshalb für $a_n = a^n$ nicht gleichverteilt.

3. $a_n = p_n$ ($p_1, p_2, \ldots$ die Primzahlenfolge).

Dann ist

$$S(n) = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu - n = \sum_{p \leqslant p_n} p - n,$$

daher $S(x) \sim \frac{1}{2}p_x^2/\log p_x$ [3]) und, wegen $p_x \sim x\log x$,

$$S(x) \sim \tfrac{1}{2}x^2 \log x.$$

Setzt man $f(n) = 3\sqrt{n/\log n}$ und ist n hinreichend groß, so erhält man $S(f(n)) \leqslant n$ und daraus

$$A(n) = (\beta-\alpha)n + O(\sqrt{n\log n}).$$

Wird $f(n) = \sqrt{n/\log n}$ gesetzt, so hat man $S(f(n)) \leqslant n$ ($n \geqslant n_0$) und daraus $A(n) = (\beta-\alpha)n + \Omega(\sqrt{n\log n})$ für jedes Intervall $[\alpha, \beta) \neq [0,1)$.

Reçu par la Rédaction le 29. 10. 1956

[3]) Siehe E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Leipzig-Berlin 1909, Bd I, S. 226.

ON THE EQUATION $x^3+y^3 = 2z^3$

BY

A. WAKULICZ (GLIWICE)

The purpose of this paper is a solution of the following problem[1]) set up by prof. W. Sierpiński: Does the infinite sequence $1^3, 2^3, 3^3, \ldots$ contain an arithmetic progression with three (or more) terms? In other words, does there exist a solution of the equation $x^3+y^3 = 2z^3$ with natural x, y and z?

By the way I want to give elementary proofs of the following theorems:

THEOREM 1. *An equation*

$$(1) \qquad 27d^4+9a^2d^2+a^4 = l^2$$

has no solutions in natural numbers if $(a, 3) = 1$.

THEOREM 2. *An equation*

$$(2) \qquad x^3+y^3 = 2z^3$$

has no solutions in integers if $x \neq y$, *and* $z \neq 0$.

From Theorem 2 the following inferences are deduced:

i. *There are no three natural cubics in arithmetical progression.*

ii. *The equations* $x^3-2z^3 = \pm 1$ *have no integer solutions, except* $x = \pm 1$, $z = 0$, *and* $x = z = \pm 1$.

In fact, according to Theorem 2 the solutions of (2) exist only in case of: $z = 0$, or $x = y$. If $z = 0$, then on account of $y = \pm 1$ we have $x = \pm 1$; if, however, $x = y$ then $x = \pm 1$ and $z = \pm 1$.

iii. *A triangular number* > 1 *is never a natural cube.*

Really, if $m(m+1)/2 = n^3$, then $m(m+1) = 2n^3$ and $m = 2k$ or $m+1 = 2k$. If $m = 2k$, then $k(2k+1) = n^3$, whence $k = n_1^3$, $2k+1 = n_2^3$ and $n_2^3 - 2n_1^3 = 1$, which is impossible for natural n_1, n_2. If, however, $m+1 = 2k$, then $k(2k-1) = n^3$, and thus $k = n_1^3$, $2k-1 = n_2^3$ and

[1]) W. Sierpiński, *Remarques sur les progressions arithmétiques*, Coll. Math. 3 (1954), p. 44-49; P 116, p. 45.