

are not yet eliminated by our congruences are $q^2-1, q^3-1, \dots, q^k-1$ ($q^k-1 < n_1 \leq q^{k+1}-1$).

If there are at least l primes $p_i \equiv 1 \pmod{q}$ in $(n_1, n_1 - q^l + 1)$ for every $l \geq 2$, we successively eliminate these integers by the primes p_i and avoid contradiction against Lemma 2. If not, then for some l there are fewer than l primes $p_i \equiv 1 \pmod{q}$ in $(n_1 - q^l + 1, n_1)$. Consider then the greatest prime $p_2 \equiv 1 \pmod{q}$, $p_2 < n_1 - q^l + 1$, put $p_2 = (a_2 - 1)q + 1$, $n_2 = a_2 q$ and repeat the same argument until $n_k < n_1/2$. But then the number of primes $\equiv 1 \pmod{q}$ in $(n_1/2, n_1)$ is $< n_1/q^2$, but since q was "small" compared with n_1 , by Page-Walfisz, the number of these primes is

$$(1 + o(1)) \frac{n_1}{2q \log n_1} > \frac{n_1}{q^2}$$

if $n_1 < e^{\sqrt{q}}$.

This contradiction shows that before n_k becomes $< n_1/2$, we have that for every $l \geq 2$, $(n_k - q^l + 1, n_k)$, where $n_k = a_k q$, $(a_k - 1)q + 1$ is a prime, contains at least l primes $p \equiv 1 \pmod{q}$ and H_{n_k} is false".

Reçu par la Rédaction le 11. 2. 1957

SUR LES DÉCOMPOSITIONS DES NOMBRES NATURELS EN
SOMMES DE NOMBRES PREMIERS

PAR

J. BROWKIN (VARSOVIE)

Soit $P(n)$ le nombre des décompositions du nombre n en sommes de nombres premiers (distincts ou non), où l'on ne considère pas comme différentes les décompositions qui diffèrent seulement par l'ordre de leurs termes. P. T. Bateman et P. Erdős [1, 2] ont démontré récemment que

$$(1) \quad P(n+1) \geq P(n) \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

et que

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [P(n+1) - P(n)] = +\infty.$$

Le but de cette Note est de donner une démonstration tout à fait élémentaire de ces deux formules¹⁾ ainsi que de la formule

$$(3) \quad P(n+1) > P(n) \quad \text{pour } n = 8, 9, 10, \dots$$

Comme $P(2) = 1 > 0 = P(1)$, pour démontrer la formule (1) il suffira évidemment de faire correspondre d'une façon biunivoque à toute décomposition du nombre naturel $n > 1$ en une somme de nombres premiers une décomposition du nombre $n+1$ en une somme de nombres premiers. Dans ce but distinguons les cinq cas suivants:

1° Dans la décomposition du nombre n figure au moins une fois le nombre 2. On remplace alors un terme égal à 2 par le terme 3 et on obtient ainsi une décomposition du nombre $n+1$ en une somme de nombres premiers.

2° Le nombre 2 ne figure pas dans la décomposition du nombre n , mais le nombre 3 y figure un nombre impair de fois, soit $2k+1$ fois. On remplace alors les $2k+1$ termes 3 par $3k+2$ termes 2 et, comme $(3k+2)2 = (2k+1)3+1$, on obtient une décomposition du nombre $n+1$ en une somme de nombres premiers.

¹⁾ Quelques idées dans mes démonstrations sont dues à A. Schinzel.

3° Le nombre 2 ne figure pas dans la décomposition du nombre n et le nombre 3 y figure un nombre pair $2k+2 > 0$ de fois. On remplace alors les $2k+2$ termes 3 par la somme du nombre 5 et des $3k+1$ termes égaux à 2 et, comme $5+(3k+1)2 = (2k+2)3+1$, on obtient une décomposition du nombre $n+1$ en une somme de nombres premiers.

4° Ni le nombre 2, ni le nombre 3 ne figurent dans la décomposition du nombre n . Le plus petit nombre premier p qui figure dans la décomposition du nombre n est alors de la forme $6t\pm 1$. S'il est de la forme $6t-1$, remplaçons un seul terme égal à p par $3t$ nombres 2.

5° Si $p = 6t+1$ est le plus petit nombre premier qui figure dans la décomposition du nombre n , remplaçons un seul terme égal à p par $3t+1$ nombres 2.

Les décompositions du nombre $n+1$ qu'on obtient de cette façon sont toutes distinctes; en effet, dans le cas 1° dans la décomposition du nombre $n+1$ figure le nombre 3 qui n'y figure pas dans les cas 2°, 3°, 4° et 5°; dans le cas 2° le nombre 2 figure (dans la décomposition du nombre $n+1$) $3k+2$ fois, ce qui n'a pas lieu dans les cas 3°, 4° et 5°; dans le cas 3° dans la décomposition du nombre $n+1$ le nombre 2 figure $3k+1$ fois et dans le cas 4° $-3t$ fois; dans le cas 3° figure le nombre 5, ce qui n'a pas lieu dans le cas 5°; dans le cas 4° le nombre 2 figure un nombre positif de fois divisible par 3, ce qui n'a pas lieu dans le cas 5°.

La formule (1) se trouve ainsi démontrée.

Pour démontrer la formule (2) nous prouverons d'abord que pour tout nombre naturel $m > 35$ il existe deux nombres naturels r et s tels que $m = 5r+7s$. Tels sont, par exemple les nombres

$$r = 3m - 7E \frac{2m}{5} - 7, \quad s = 5E \frac{2m}{5} + 5 - 2m.$$

On voit sans peine que les nombres r et s sont naturels et qu'on a $5r+7s = 15m-14m = m$.

Soit maintenant g un nombre naturel quelconque et n un nombre naturel tel que $n \geq 35g$. On aura donc $n+1 \geq 36+35(g-1)$, par conséquent $n+1 = 36+k+35(g-1)$, où k est un entier ≥ 0 . Il existe donc des nombres naturels r et s tels que $36+k = 5r+7s$, d'où l'on trouve $n+1 = 5(r+7j)+7[s+5(g-1-j)]$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, g-1$, ce qui prouve que l'équation $n+1 = 5x+7y$ a au moins g solutions en nombres naturels x et y . À chacune de ces solutions correspond une décomposition du nombre $n+1$ en une somme de x termes 5 et de y termes 7, et une telle décomposition diffère de toutes les $P(n)$ décompositions 1°-5° du nombre $n+1$, puisque dans chacune de ces dernières figurait soit le terme 2, soit le terme 3. Il en résulte que $P(n+1)-P(n) \geq g$ pour $n > 35g$

et, g étant un nombre naturel arbitraire, cela prouve la formule (2). Il en résulte aussi que $P(n+1)-P(n) \geq 1$, donc $P(n+1) > P(n)$ pour $n > 35$ et les tables publiées par P. O. Gupta et S. Luthra [3] permettent de vérifier qu'il en est de même pour $8 \leq n \leq 35$. Ainsi on a la formule (3).

TRAVAUX CITÉS

[1] P. T. Bateman et P. Erdős, *Partitions into primes*, Publ. Math. 4 (1956), p. 198-200.

[2] — *Monotonicity of partition functions*, Mathematika 3 (1956), n° 5, p. 1-14.

[3] O. P. Gupta and S. Luthra, *Partitions into primes*, Proc. Nat. Inst. Sci. of India 21, n° 3 (1955), p. 181-184.

Reçu par la Rédaction le 31. 1. 1957