SUR UN PROBLÈME DE P. ERDÖS

PAR

A. SCHINZEL (VARSOVIE)

Désignons pour k naturels et n entiers par $H_{k,n}$ la proposition suivante:

$H_{k,n}$: *il existe un entier i tel que $0 \leqslant i < k$ et $n-i \mid \binom{n}{k}$.*

P. Erdös a posé le problème, *si $H_{k,n}$ subsiste pour tous les nombres naturels k et $n \geqslant 2k$.*

La réponse à ce problème est négative, comme le prouve l'exemple $k = 15$, $n = 99215$.

En effet, les décompositions en facteurs premiers

$$\begin{array}{lll} 99215 = 5\cdot 19843, & 99214 = 2\cdot 113\cdot 439, & 99213 = 3\cdot 33071, \\ 99212 = 2^2\cdot 17\cdot 1459, & 99211 = 7\cdot 14173, & 99210 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 3307, \\ 99209 = 11\cdot 29\cdot 311, & 99208 = 2^3\cdot 12401, & 99207 = 3^2\cdot 73\cdot 151, \\ 99206 = 2\cdot 49603, & 99205 = 5\cdot 19841, & 99204 = 2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 1181, \\ 99203 = 13^2\cdot 587, & 99202 = 2\cdot 193\cdot 257, & 99201 = 3\cdot 43\cdot 769 \end{array}$$

entraînent que

1° $\binom{n}{k} = 13P$, où $(P, 15!) = 1$,

2° chacun des nombres $n-i$ $(0 \leqslant i < k)$ a un diviseur premier $p_i < 15$.

Donc, si l'on avait $n-i \mid \binom{n}{k}$ pour un i, où $0 \leqslant i < k$, on aurait $p_i \mid \binom{n}{k} = 13P$, donc

$$p_i = 13 \mid n-i, \qquad n-i = 99203, \qquad 13^2 \mid n-i \mid \binom{n}{k} = 13P, \qquad 13 \mid P,$$

ce qui implique une contradiction.

On peut démontrer que la proposition $H_{k,n}$ est vraie pour $k < 15$ $n \geqslant 2k$ et pour $k = 15$, $30 \leqslant n < 99215$.

En omettant la démonstration assez pénible de ce dernier fait, j'indiquerai plus loin certaines méthodes d'examiner si pour un k fixé, il existe un n pour lequel $H_{k,n}$ est en défaut.

Je commencerai par les remarques suivantes.

1. Soit $n_1 \equiv n_2 (\mathrm{mod}\, k!)$. Alors on a l'équivalence $H_{n_1,k} \equiv H_{n_2,k}$.

En effet, on a

$$n_1 - i \mid \binom{n_1}{k}$$

dans ce et seulement dans ce cas si $n_1 \ldots (n_1-i+1)(n_1-i-1)\ldots(n_1-k+1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, k!)$ c'est-à-dire, si $n_2 \ldots (n_2-i+1)(n_2-i-1)\ldots(n_2-k+1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, k!)$, ce qui équivaut à

$$n_2 - i \mid \binom{n_2}{k}.$$

Il en résulte que si pour un nombre naturel k donné il existe un nombre naturel $n \geqslant 2k$ tel que la proposition $H_{k,n}$ est fausse, il existe une infinité de tels nombres naturels n.

2. On a l'équivalence $H_{k,n} \equiv H_{k,-n+k-1}$.

En effet, vu l'identité

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{-n+k-1}{k},$$

on a la formule $n-i \mid \binom{n}{k}$, où $0 \leqslant i < k$, dans ce et seulement dans ce cas, si

$$(-n+k-1)-j \mid \binom{-n+k-1}{k}, \qquad \text{où} \qquad 0 \leqslant j = k-i-1 < k.$$

La proposition $H_{k,n}$ étant vraie pour $0 \leqslant n < 2k$ (ce qu'on déduit sans peine du théorème de Tchebycheff), il résulte de la remarque 2 que si $H_{k,n}$ est vraie pour le nombre naturel k et pour les entiers $n \geqslant 2k$, elle est vraie pour n entier quelconque.

Désignons par H_k la proposition affirmant que $H_{k,n}$ subsiste pour tout entier n.

LEMME 1. *S'il existe pour k et n donnés un i tel que $0 \leqslant i < k$, $\left(n-i, \binom{k}{i}(k-i)\right) = 1$, la proposition $H_{k,n}$ est vraie.*

Démonstration. On a l'identité

$$\binom{n}{k}\binom{k}{i}(k-i) = \binom{n}{i}\binom{n-i-1}{k-i-1}(n-i).$$

Donc, si pour un i, $0 \leqslant i < k$, $\left(n-i, \binom{k}{i}(k-i)\right) = 1$, on a $n-i \mid \binom{n}{k}$, c. q. f. d.

THÉORÈME 1. *La proposition H_k est vraie pour $k = p^a$, où p est un nombre premier et a un entier $\geqslant 0$.*

Démonstration. Si $(n,p)=1$, on a

$$\left(n-0,\binom{k}{0}(k-0)\right)=(n,k)=(n,p^{\alpha})=1.$$

Or, si $(n,p)>1$, on a $p|n$ donc $(n+1,p)=1$ et

$$\left(n-(k-1),\binom{k}{k-1},[k-(k-1)]\right)=(n-k+1,k)=(n+1,k)=(n+1,p^{\alpha})=1.$$

Dans tous les deux cas $H_{k,n}$ est vraie d'après le Lemme 1.

THÉORÈME 2. *La proposition H_k est vraie pour $k=6,10,12,14,18,20,24,26,28,30$.*

Démonstration. À titre d'exemple nous donnerons la démonstration pour $k=30$. Pour les autres k la démonstration est analogue.

Supposons d'abord que $n\equiv 0 \pmod 2$. La vérité de $H_{k,n}$ résulte alors du Lemme 1 dans lequel selon les restes de n de la division par $3,5,29,7,13,23$ et 11 on substitue les valeurs envisagées dans la table suivante, pour lesquels on a $\left(n-i,\binom{30}{i}(30-i)\right)=1$:

le reste de la division de n par					
3	5	29	7	13	i
$n\not\equiv 2$	$n\not\equiv 4$				29
0	4	$n\not\equiv 1$			1
0	4	1	$n\not\equiv 4$	$n\not\equiv 12$	25
0	4	1	$n\not\equiv 5$	12	5
0	4	1	5	12	23
0	4	1	4	$n\not\equiv 5$	5
0	4	1	4	5	23
1	4	$n\not\equiv 27$	$n\not\equiv 6$		27
1	4	$n\not\equiv 3$	6		3
1	4	3	6	$n\not\equiv 5$	5
1	4	3	6	5	23
1	4	27	$n\not\equiv 3$		3
1	4	27	3	$n\not\equiv 5$	5
1	4	27	3	5	23
2	$n\not\equiv 1$	$n\not\equiv 1$			1
2	$n\not\equiv 2$	1	$n\not\equiv 6$		27
2	$n\not\equiv 3$	1	6		3
2	1	$n\not\equiv 27$	$n\not\equiv 6$		27
2	1	$n\not\equiv 3$	6		3
2	1	3	6	$n\not\equiv 12$	25

le reste de la division de n par							
3	5	29	7	13	23	11	i
2	1	3	6	12	$n\not\equiv 7$		7
2	1	3	6	12	7	$n\not\equiv 9$	9
2	1	3	6	12	7	9	19
2	1	27	$n\not\equiv 3$				3
2	1	27	3	$n\not\equiv 12$			25
2	1	27	3	12	$n\not\equiv 7$		7
2	1	27	3	12	7	$n\not\equiv 9$	9
2	1	27	3	12	7	9	19
2	2	1	$n\not\equiv 3$				3
2	2	1	3	$n\not\equiv 12$			25
2	2	1	3	12	$n\not\equiv 21$	$n\not\equiv 10$	21
2	2	1	3	12	$n\not\equiv 9$	10	9
2	2	1	3	12	9	10	19
2	2	1	3	12	21	$n\not\equiv 9$	9
2	2	1	3	12	21	9	19
2	3	1	6	$n\not\equiv 12$			25
2	3	1	6	12	$n\not\equiv 7$		7
2	3	1	6	12	7	$n\not\equiv 10$	21
2	3	1	6	12	7	10	9

Le cas $n\equiv 1 \pmod 2$ qui reste à examiner se réduit au précédant d'après la remarque 2 et la congruence $-n+k-1\equiv -n+29\equiv 0 \pmod 2$

LEMME 2. *Soient $2=p_1<p_2<\ldots<p_l\leqslant k$ tous les nombres premiers $\leqslant k$. S'il existe un système des entiers $a(p_1),a(p_2),\ldots,a(p_l)$ tel que*

1° tout entier i, $0\leqslant i<k$, satisfait à une des congruences $i\equiv a(p_j) \pmod{p_j}$ $(1\leqslant j\leqslant l)$,

2° quel que soit le nombre naturel $j\leqslant l$, on a

$$\left[\frac{k}{p_j}\right]+\left[\frac{a(p_j)-k}{p_j}\right]=\left[\frac{a(p_j)}{p_j}\right],$$

alors H_k est en défaut.

Démonstration. Supposons que le système $a(p_j)$ $(1\leqslant j\leqslant l)$ satisfait aux conditions 1°-2°. Posons

$$\alpha_j=\left[\frac{\ln k}{\ln p_j}\right]+1,\qquad \bar{a}(p_j)=a(p_j)-\left[\frac{a(p_j)}{p_j}\right]p_j.$$

D'après 2° on a pour $j\leqslant l$

$$\left[\frac{k}{p_j}\right]+\left[\frac{\bar{a}(p_j)-k}{p_j}\right]=\left[\frac{\bar{a}(p_j)}{p_j}\right]=0. \tag{1}$$

D'après le théorème chinois sur les restes il existe un entier n tel que

$$n\equiv\bar{a}(p_j)-p_j \pmod{p_j^{\alpha_j}}\qquad(1\leqslant j\leqslant l). \tag{2}$$

Admettons que, pour un certain i_0, $0\leqslant i_0<k$ et

$$n-i_0\left|\binom{n}{k}\right.. \tag{3}$$

D'après la condition 1° il existe un $j_0\leqslant l$ tel que $i_0\equiv\bar{a}(p_{j_0}) \pmod{p_{j_0}}$, d'où, d'après (2), $n-i_0\equiv 0 \pmod{p_{j_0}}$ et d'après (3)

$$p_{j_0}\left|\binom{n}{k}\right.. \tag{4}$$

D'autre part, parmi les nombres $n-i$ $(0\leqslant i<k)$ les seuls nombres divisibles par p_{j_0} sont, d'après (2), les nombres $n-i(t)$, où

$$i(t)=\bar{a}(p_{j_0})+tp_{j_0},\qquad 0\leqslant t\leqslant-\left[\frac{\bar{a}(p_{j_0})-k}{p_{j_0}}\right]-1.$$

Or, d'après (1),

$$\left[\frac{\bar{a}(p_{j_0})-k}{p_{j_0}}\right]=-\left[\frac{k}{p_{j_0}}\right],$$

donc $i(t)\leqslant\bar{a}(p_{j_0})+[k/p_{j_0}]p_{j_0}-p_{j_0}$, d'où $0<-\bar{a}(p_{j_0})+p_{j_0}+i(t)\leqslant k<p_{j_0}^{\alpha_{j_0}}$.

D'autre part, d'après (2), $-\bar{a}(p_{j_0})+p_{j_0}+i(t) \equiv -[n-i(t)] (\bmod p_{j_0}^{a_{j_0}})$. Donc p_{j_0} figure dans le développement de $-\bar{a}(p_{j_0})+p_{j_0}+i(t)$ en facteurs premiers avec le même exposant que dans le développement de $n-i(t)$.

On a donc $\left(p_{j_0}, \binom{n}{k}\right) = 1$, contrairement à la formule (4), ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 3. *S'il existe un système de nombres premiers* $\leqslant k$, $Q(k) = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ *tel que pour tout nombre* $s = q_1^{\beta_1}, q_2^{\beta_2}, \ldots, q_m^{\beta_m} \leqslant k$, *où* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \geqslant 0$ *on a* $(k+1-s, q_1 q_2 \ldots q_m) > 1$, *alors* H_k *est en défaut.*

Démonstration. Soient $r_1, r_2, \ldots, r_{l-m}$ tous les nombres premiers $\leqslant k$ qui n'appartiennent pas à $Q(k)$ et posons $a(q_j) = -1$, $a(r_j) = k$. Nous prouverons que le systemè des nombres a ainsi défini remplit les conditions 1° et 2° du Lemme 2.

1° Pour tout nombre i, $0 \leqslant i < k$, on a

$$k-i = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_m^{\beta_m} \cdot r_1^{\gamma_1} r_2^{\gamma_2} \ldots r_{l-m}^{\gamma_{l-m}}, \quad \text{où} \quad \beta_1, \ldots, \beta_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l-m} \geqslant 0.$$

Donc $(k-i, r_1 r_2 \ldots r_{l-m}) > 1$ ou bien $k-i = q_1^{\beta_1} \ldots q_m^{\beta_m}$.

Dans le premier cas il existe un $j \leqslant l-m$ tel que $i \equiv k = a(r_j) (\bmod r_j)$, et dans le second cas, en posant $s = k-i$, nous obtenons d'après l'hypothèse $(i+1, q_1 q_2 \ldots q_m) > 1$, d'où, pour un certain $j \leqslant m$, $i \equiv -1 = a(q_j) (\bmod q_j)$.

2° Il faut vérifier que

$$\left[\frac{-1-k}{q_j}\right] + \left[\frac{k}{q_j}\right] = -1 \qquad (1 \leqslant j \leqslant m)$$

et que

$$\left[\frac{k-k}{r_j}\right] + \left[\frac{k}{r_j}\right] = \left[\frac{k}{r_j}\right] \qquad (1 \leqslant j \leqslant l-m).$$

La deuxième de ces égalités est évidente et on obtient la première en changeant le signe dans l'inégalité

$$\left[\frac{k}{q_j}\right] + 1 \geqslant \frac{1+k}{q_j} > \left[\frac{k}{q_j}\right].$$

COROLLAIRE 1. *La proposition* H_k *est fausse pour* $k = 15, 21, 33, 35, 45, 55, 63, 65, 69, 75, 77, 85, 87, 91, 93, 95, 99$.

La démonstration résulte du Théorème 3 dans lequel il faut prendre comme $Q(k)$ les systèmes suivants des nombres premiers:

$Q(15) = \{5, 11\}$, $Q(21) = \{5, 7, 17\}$,
$Q(33) = \{11, 23\}$, $Q(35) = \{7, 29\}$,
$Q(45) = \{3, 19, 37, 43\}$, $Q(55) = \{5, 13, 17, 31, 43\}$

$Q(63) = \{3, 11, 31, 37, 53, 61\}$,
$Q(65) = \{13, 53\}$, $Q(69) = \{23, 47\}$
$Q(75) = \{5, 17, 59, 71\}$,
$Q(77) = \{11, 67\}$, $Q(85) = \{7, 17, 23, 37, 79\}$,
$Q(87) = \{29, 59\}$, $Q(91) = \{13, 79\}$,
$Q(93) = \{5, 7, 23, 29, 31, 59, 71, 89\}$,
$Q(95) = \{11, 17, 19, 79\}$, $Q(99) = \{11, 89\}$.

Comme on voit, pour $k = 15, 33, 35, 65, 69, 77, 87, 91, 99$ le système $Q(k)$ est formé de deux nombres. Comme on le vérifie aisément, cela a lieu dans ce et seulement dans ce cas si $k = aq_1$, où les nombres $q_1 > a > 1$ et $q_2 = (a-1)q_1+1$ sont tous les deux premiers, donc, par exemple, si $k = 3q_1$, où les nombres $q_1 > 3$ et $2q_1+1$ sont tous les deux premiers. Grâce à ce fait, la réponse positive au problème suivant est très probable:

P 216. Existe-t-il une infinité de nombres k pour lesquels H_k est fausse?

THÉORÈME 4. *La proposition* H_k *est fausse pour* $k = 22$.

La démonstration résulte du Lemme 2 où l'on pose $a(2) = 0$, $a(3) = 1$, $a(5) = 4$, $a(7) = 3$, $a(11) = 10$, $a(13) = 11$, $a(17) = 5$, $a(19) = 15$.

Des théorèmes 1, 2 et 4 et du corollaire 1 il résulte le

COROLLAIRE 2. *La proposition* H_k *est vraie pour tous les nombres* $k \leqslant 33$ *sauf pour les nombres* $k = 15, 21, 22$ *et* 33.

Il se pose ici le problème suivant:

P 217. Est-ce que la proposition H_k est vraie pour une infinité de nombres $k \neq p^a$, où p est un nombre premier et a un entier $\geqslant 0$?

Je suppose que la réponse est négative.

Ajouté pendant la correction des épreuves. P. Erdös a démontré que la réponse au Problème **P 216** est positive. Voici l'esquisse de sa démonstration — l'extrait de sa lettre à l'auteur du 5 février 1957:

"Let q be a large prime. I want to find an $n = aq$ so that H_n is false. Let $p \equiv 1 (\bmod q)$, $p = (a_1-1)q+1$, $n_1 = a_1 q$, $p < e^{\sqrt{q}}$ but p so large that the number of primes $\equiv 1 (\bmod q)$ which are $\leqslant p$ is

$$\big(1+o(1)\big)\frac{p}{q \log p}$$

(such a p exists by Page-Walfisz-Siegel theorem).

Choose $a(q) = 0$, $a(r) = -1$ (r prime) except for a "few" primes p_i which I define now, $a(p) = q-1$. All the primes p_i for which $a(p_i) \neq -1$ will satisfy $p_i \equiv 1 (\bmod q)$, $p_i > n/2$. Thus the only numbers $\leqslant n$ which are not yet eliminated by our congruences are $q^2-1,\ q^3-1,\ \ldots,\ q^k-1$ $(q^k-1 < n_1 \leqslant q^{k+1}-1)$.

If there are at least l primes $p_i \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$ in (n_1, n_1-q^l+1) for every $l \geqslant 2$, we successively eliminate these integers by the primes p_i and avoid contradiction against Lemma 2. If not, then for some l there are fewer than l primes $p_i \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$ in (n_1-q^l+1, n_1). Consider then the greatest prime $p_2 \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$, $p_2 < n_1-q^l+1$, put $p_2 = (a_2-1)q+1$, $n_2 = a_2 q$ and repeat the same argument until $n_k < n_1/2$. But then the number of primes $\equiv 1 (\operatorname{mod} q)$ in $(n_1/2, n_1)$ is $< n_1/q^2$, but since q was "small" compared with n_1, by Page-Walfisz, the number of these primes is

$$\big(1+o(1)\big)\frac{n_1}{2q\log n_1} > \frac{n_1}{q^2}$$

if $n_1 < e^{\sqrt{q}}$.

This contradiction shows that before n_k becomes $< n_1/2$, we have that for every $l \geqslant 2$, (n_k-q^l+1, n_k), where $n_k = a_k q$, $(a_k-1)q+1$ is a prime, contains at least l primes $p \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$ and H_{n_k} is false".

Reçu par la Rédaction le 11. 2. 1957

SUR LES DÉCOMPOSITIONS DES NOMBRES NATURELS EN SOMMES DE NOMBRES PREMIERS

PAR

J. BROWKIN (VARSOVIE)

Soit $P(n)$ le nombre des décompositions du nombre n en sommes de nombres premiers (distincts ou non), où l'on ne considère pas comme différentes les décompositions qui diffèrent seulement par l'ordre de leurs termes. P. T. Bateman et P. Erdös [1, 2] ont démontré récemment que

(1) $$P(n+1) \geqslant P(n) \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

et que

(2) $$\lim_{n=\infty}[P(n+1)-P(n)] = +\infty.$$

Le but de cette Note est de donner une démonstration tout à fait élémentaire de ces deux formules[1]) ainsi que de la formule

(3) $$P(n+1) > P(n) \quad \text{pour} \quad n = 8, 9, 10, \ldots$$

Comme $P(2) = 1 > 0 = P(1)$, pour démontrer la formule (1) il suffira évidemment de faire correspondre d'une facon biunivoque à toute décomposition du nombre naturel $n > 1$ en une somme de nombres premiers une décomposition du nombre $n+1$ en une somme de nombres premiers. Dans ce but distinguons les cinq cas suivants:

1° Dans la décomposition du nombre n figure au moins une fois le nombre 2. On remplace alors un terme égal à 2 par le terme 3 et on obtient ainsi une décomposition du nombre $n+1$ en une somme de nombres premiers.

2° Le nombre 2 ne figure pas dans la décomposition du nombre n, mais le nombre 3 y figure un nombre impair de fois, soit $2k+1$ fois. On remplace alors les $2k+1$ termes 3 par $3k+2$ termes 2 et, comme $(3k+2)2 = (2k+1)3+1$, on obtient une décomposition du nombre $n+1$ en une somme de nombres premiers.

[1]) Quelques idées dans mes démonstrations sont dues à A. Schinzel.