SUR CERTAINES REPRÉSENTATIONS DES FONCTIONS D'ENSEMBLE À VARIATION BORNÉE (II)

(FONCTIONS σ-NORMALES)

PAR

J. POPRUŽENKO (ŁÓDŹ)

1. Préliminaires. Soient $\mathcal{M}$ un espace abstrait, E un ensemble variable dans $\mathcal{M}$, $\mathfrak{M}$ un σ-corps (= famille σ-additive et complémentative) d'ensembles de $\mathcal{M}$.

DÉFINITION I. Une fonction réelle d'ensemble $\chi(E)$ sera dite *totalement singulière dans* $\mathfrak{M}$ lorsqu'il existe un ensemble M de puissance $< \overline{\overline{\mathcal{M}}}$ appartenant à $\mathfrak{M}$ et tel que $\chi(E) = \chi(EM)$ pour tout $E \in \mathfrak{M}$.

DÉFINITION II. Une fonction $F(E)$ à variation bornée dans $\mathfrak{M}$ sera dite *σ-normale dans* $\mathfrak{M}$ lorsqu'on a

$$(*) \qquad \Big| F\Big(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\Big)\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |F(E_n)|$$

pour toute suite $\{E_n\}$ d'ensembles de $\mathfrak{M}$, disjoints deux à deux.

La première de ces définitions correspond à celle des fonctions purement singulières au sens de la Théorie de la mesure. La seconde provient de Banach et ne fournit qu'une modification de sa notion de normalité (voir [1], p. 177, Définition).

Outre cela, nous aurons besoin de la notion d'ensemble fondamental de nombres irrationnels. En voici la définition:

Un ensemble N composé de nombres irrationnels de l'intervalle $(0,1)$ est dit *fondamental* lorsque ses sous-ensembles de puissance $< \overline{\overline{N}}$ sont caractérisés par la propriété d'être borné selon la relation $\prec$ [1]).

[1]) $a = (a_1, a_2, \ldots)$ et $b = (b_1, b_2, \ldots)$ étant deux suites d'entiers positifs, la relation $a \prec b$ exprime que l'on a $a_k < b_k$ à partir d'un certain indice $k = k_0$.

Un ensemble de suites est dit *borné selon la relation* $\prec$ lorsqu'il existe une suite fixe, c, qui remplit $a \prec c$ quelle que soit la suite a appartenant à l'ensemble considéré.

On applique ces notions aux nombres irrationnels de l'intervalle $(0,1)$ au moyen du développement en fractions continues.

Pour cette définition, et pour d'autres détails, consulter [4], 1, surtout p. 323-324; ici, notons seulement ces trois propriétés, qui sont indispensables pour nos raisonnements:

(j_1) *L'ensemble N étant fondamental, si l'on pose $\overline{\overline{N}} = \aleph_\alpha$, le nombre initial ω_α n'est pas confinal avec ω_0.*

(j_2) *N étant un ensemble fondamental, tout son sous-ensemble de puissance $\overline{\overline{N}}$ l'est aussi.*

(j_3) *Il existe une suite fixe $\{P_n(x)\}$ de polynômes entiers [2]) convergente partout et ayant la propriété suivante:*

Quel que soit l'ensemble fondamental (de nombres irrationnels) N, la suite $\{P_n(x)\}$ converge non-uniformément dans tout sous-ensemble de N de puissance $\overline{\overline{N}}$.

Les propriétés (j_1) et (j_2) résultent immédiatement de la définition; pour la démonstration de (j_3) voir [4], p. 329, Théorème II.

Enfin, X étant un ensemble de nombres réels, convenons de désigner par $\mathfrak{B}_X$ le σ-corps des ensembles boreliens relativement à X.

2. Lemmes. Démontrons maintenant deux théorèmes auxiliaires.

LEMME I. *Soit T une famille d'ensembles contenue dans $\mathfrak{M}$ et jouissant des propriétés σ et ϱ [3]).*

Alors, une fonction $F(E)$ étant à variation bornée dans $\mathfrak{M}$, on lui peut attribuer deux fonctions d'ensemble, $\chi(E)$ et $\Phi(E)$, également à variation bornée dans $\mathfrak{M}$, de sorte que la première satisfasse à l'égalité

$$(1) \qquad \chi(E) = \chi(EH)$$

pour tout $E \in \mathfrak{M}$ et pour un certain ensemble fixe H de T et la seconde s'annule identiquement dans T.

Démonstration. Représentons par $V_F(E)$ la variation totale de $F(E)$; $V_F(E)$ est alors une fonction non-négative et jamais décroissante d'ensemble E, qui est, elle-même, à variation bornée dans $\mathfrak{M}$ ([5], p. 43, (i_2)-(i_1)). De là et de la propriété σ de T il résulte que, en posant

$$\lambda = \operatorname*{supr}_{E \in T} V_F(E),$$

on obtient un nombre non-négatif fini, qui est atteint par $V_F(E)$ pour un certain ensemble $E = H$ de T. En symboles:

$$(2) \qquad \lambda = \operatorname*{Max}_{E \in T} V_F(E) = V_F(H) < \infty \qquad (H \in T).$$

[2]) On peut ajouter: à coefficients rationnels.

[3]) PROPRIÉTÉ σ. *Une somme au plus dénombrable d'ensembles appartenant à la famille T lui appartient aussi.*

PROPRIÉTÉ ϱ. *La différence de deux ensembles appartenant à la famille T lui appartient aussi.*

On en conclut qu'il est

(3) $$F(E) = 0 \quad \text{lorsque} \quad E \subset \mathcal{M} - H, \quad E \in T,$$

car la relation $F(E_0) \neq 0$ pour un certain $E = E_0$ assujetti à ces conditions entraînerait $V_F(E_0) > 0$ et, comme $E_0 H = 0$,

$$V_F(H+E_0) > V_F(H) = \lambda \quad ((H+E_0) \in T),$$

contrairement à (2).

Donc, si l'on pose

(4) $$\Phi(E) = F[E(\mathcal{M}-H)] \quad (E \in \mathfrak{M}),$$

la fonction $\Phi(E)$ satisfaira aux conditions du Lemme I en vertu de (3) et de la propriété ϱ de T.

Il en est de même de la fonction

(5) $$\chi(E) = F(EH) \quad (E \in \mathfrak{M}),$$

qui remplit évidemment (1) et qui est à variation bornée dans $\mathfrak{M}$.

Le Lemme I est ainsi démontré.

Lemme II (Théorème d'Egoroff généralisé, [3], p. 34-35).

Prémisses.

(α_1) *Soit $\Psi(E)$ une fonction σ-normale dans $\mathfrak{M}$;*

(α_2) *Soit $f_n(x) \to f(x)$ $(x \in \mathcal{M})$ une suite convergente de fonctions réelles mesurables relativement à $\mathfrak{M}$;*

(α_3) *Soit $\delta > 0$ un nombre arbitraire.*

Thèse. *E_0 étant un ensemble de $\mathfrak{M}$ pour lequel $\Psi(E_0) \neq 0$, il existe un ensemble E_1 ayant les propriétés suivantes:*

(β_1) $E_1 \subset E_0$, $E_1 \in \mathfrak{M}$;

(β_2) $|\Psi(E_1)| > |\Psi(E_0)| - \delta$;

(β_3) *$\{f_n(x)\}$ converge uniformément dans E_1.*

Démonstration. Pour le démontrer, choisissons tout d'abord un entier positif m_0 de sorte que l'on ait

(6) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m_0+k}} < \delta.$$

Cela fait, posons

(7) $$R_{n,m} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathop{E}_{x} \left\{ |f_{n+i}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2^m}; x \in E_0 \right\}$$

pour $n = 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$ et considérons la suite d'ensembles $R_n^1 = R_{n,m_0+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Selon (α_2), tous ces ensembles appartiennent à $\mathfrak{M}$; selon (7), on a les relations $R_n^1 \supset R_{n+1}^1$ et $\lim_{n\to\infty} R_n^1 = 0$ qui entraînent l'égalité

(8) $$R_n^1 = \sum_{s=0}^{\infty} (R_{n+s}^1 - R_{n+s+1}^1) \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

selon (α_1), on a $V_\Psi(R_1^1) < \infty$. Il en résulte que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi(R_n^1 - R_{n+1}^1)|$$

est convergente en vertu de la formule (8) (avec $n = 1$) et de la notion même de fonction à variation bornée. Par conséquent, il existe un indice $n = n_1$ tel que

$$\sum_{s=0}^{\infty} |\Psi(R_{n_1+s}^1 - R_{n_1+s+1}^1)| < \frac{1}{2^{m_0+1}};$$

d'après l'égalité (8) pour $n = n_1$, on en conclut comme ci-dessus que l'on a $|\Psi(R_{n_1}^1)| < 1/2^{m_0+1}$ conformément à l'inégalité (*) (avec $F = \Psi$ et $E_n = R_{n_1+n-1}^1 - R_{n_1+n}^1$).

Considérons la suite d'ensembles

$$R_n^2 = (R_{n_1,m_0+1} + R_{n,m_0+2}) - R_{n_1,m_0+1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

On a encore:

$$R_n^2 \supset R_{n+1}^2, \quad \lim_{n\to\infty} R_n^2 = 0,$$

$$R_n^2 = \sum_{s=0}^{\infty} (R_{n+s}^2 - R_{n+s+1}^2) \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$V_\Psi(R_1^2) < \infty;$$

donc, en raisonnant comme auparavant, on détermine un indice $n = n_2$ tel que l'on ait

$$\sum_{s=0}^{\infty} |\Psi(R_{n_2+s}^2 - R_{n_2+s+1}^2)| < \frac{1}{2^{m_0+2}},$$

d'où

$$|\Psi(R_{n_2}^2)| < \frac{1}{2^{m_0+2}}.$$

D'une manière générale, on définit par induction une suite $\{n_k\}$ d'indices naturels et une suite $\{R^k_{n_k}\}$ de sous-ensembles de E_0 satisfaisant aux conditions:

$$R^k_{n_k}\in\mathfrak{M},\qquad R^k_{n_k}R^l_{n_l}=0\quad\text{pour}\quad k\neq l,$$

$$|\Psi(R^k_{n_k})|<\frac{1}{2^{m_0+k}},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}R^k_{n_k}=\sum_{k=1}^{\infty}R_{n_k,m_0+k}.$$

De là résulte, en vertu de (6) et de la σ-normalité supposée de Ψ, l'inégalité

$$\Big|\Psi\Big(\sum_{k=1}^{\infty}R_{n_k,m_0+k}\Big)\Big|<\delta.$$

En posant

$$E_1=E_0-\sum_{k=1}^{\infty}R_{n_k,m_0+k},$$

on obtient un ensemble satisfaisant à (β_1)-(β_3).

La démonstration est peu différente de celle du Théorème d'Egoroff.

Le Lemme II se trouve ainsi démontré.

3. Problèmes de l'existence. Dans la Note présente, je reprends les problèmes de l'existence de la Théorie de la mesure qui ont été étudiés dès 1929 par plusieurs auteurs.

Abstraction faite de certaines propositions hypothétiques, on a dans ce domaine deux résultats fondamentaux: M. Ulam a démontré, en 1930, que, lorsqu'un espace est de puissance inférieure au premier aleph inaccessible, il n'existe aucune fonction réelle d'ensemble qui soit σ-additive dans la famille de tous les sous-ensembles de cet espace, sauf des fonctions triviales ([7, p. 145-146]); en 1936, M. M. Sierpiński et Szpilrajn-Marczewski ont établi la même propriété pour la famille des ensembles boreliens d'un certain espace métrique séparable de puissance $\aleph_1$ ([6], p. 257-260).

Ces résultats m'ont suggeré les raisonnements qui vont suivre.

Théorème I. *Il est supposé que:*

1° *Le nombre cardinal* $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}=\mathfrak{m}\geqslant\aleph_1$ *est inférieur au plus petit aleph inaccessible;*

2° $F(E)$ *est une fonction σ-normale dans la famille de tous les sous-ensembles de* $\mathfrak{M}$.

Dans ces hypothèses:

A. *Si $F(E)$ s'annule pour tout ensemble se composant d'un seul élément, elle s'annule identiquement.*

B. *S'il existe un élément x_0 de $\mathfrak{M}$ tel que $F((x_0))\neq0$, alors il existe une fonction totalement singulière $\chi(E)$ et un ensemble au plus dénombrable E_0, $E_0\subset\mathfrak{M}$, satisfaisant aux conditions*

(9) $$|F(E)|\leqslant|\chi(E)|\qquad(E\subset\mathfrak{M})$$

et

(10) $$F(E_0)=\chi(E_0)\neq0.$$

Démonstration. Selon 2°, $F(E)$ est à variation bornée; nous pouvons donc appliquer le Lemme I.

Admettons que, dans ce Lemme, T représente la famille de tous les ensembles dénombrables de l'espace $\mathfrak{M}$; alors on a, pour l'ensemble H qui figure dans les formules (1)-(5), $\overline{\overline{H}}\leqslant\aleph_0$. Par conséquent, comme $\mathfrak{M}$ est indénombrable, la fonction $\chi(E)$ définie par (5) est totalement singulière en vertu de (1) et de la Définition I (avec $M=H$). De plus, les fonctions définies par (4)-(5) satisfont à l'inégalité

(11) $$|F(E)|\leqslant|\chi(E)|+|\Phi(E)|$$

pour chaque fonction $F(E)$ satisfaisant à l'inégalité (*).

Cela étant, supposons que nous ayons déjà démontré le cas A et que, pour une fonction σ-normale $F(E)$, la condition exigée dans le cas B soit réalisée. Alors la fonction $\Phi(E)$ s'annule identiquement, car elle satisfait aux conditions du cas A en tant que σ-normale (lorsque $F(E)$ l'est) et disparaissant en tout point. La formule (11) se confond alors avec (9).

D'autre part on a d'après (2): $V_F(H)\geqslant V_F((x_0))=|F((x_0))|>0$; par conséquent, il existe un ensemble $E_0\subset H$, donc au plus dénombrable, tel que $F(E_0)\neq0$ et, en vertu de (5), $\chi(E_0)=F(E_0H)=F(E_0)$. De là la formule (10).

Le cas B ce trouve ainsi démontré.

Pour achever la démonstration du Théorème I, reste à démontrer le cas A. Or, la condition 1° admise, il n'est qu'une conséquence immédiate du Lemme II, [5], p. 47, rapproché de l'inégalité (*).

Le Théorème I est entièrement démontré [4]).

Lorsque $F(E)\geqslant0$, la formule (9) donne $0\leqslant F(E)\leqslant\chi(E)$, ce qui devient, pour les fonctions F non-décroissantes: $F(E)=\chi(E)$. On en tire ce

Corollaire I. *S'il n'existe aucun aleph inaccessible $\leqslant\mathfrak{m}=\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$, il n'existe dans l'espace $\mathfrak{M}$ aucune mesure extérieure $\mu^*(E)$ qui soit à variation bornée et qui disparaisse pour tout ensemble composé d'un seul élé-*

[4]) Comp. [2], surtout le Théorème I et ses conséquences, p. 232-234.

ment, sauf celles qui sont représentables par des fonctions totalement singulières, $\mu^*(E)=\chi(E)=\chi(ED)$, où D est au plus dénombrable.

Vu [5], (i_5), p. 43, ceci implique le résultat précité de M. Ulam.

Démontrons maintenant un théorème analogue pour les fonctions σ-normales définies dans les σ-corps boreliens de certains espaces singuliers.

THÉORÈME II. *Il est supposé que:*

1° *N est un ensemble fondamental de nombres irrationnels;*

2° *$F(E)$ est une fonction σ-normale dans $\mathfrak{B}_N$.*

Dans ces hypothèses:

A. *Si $F(E)$ s'annule pour tous les ensembles E de $\mathfrak{B}_N$ de puissance $<\overline{\overline{N}}$, elle s'annule identiquement.*

B. *S'il existe un ensemble E de la famille $\mathfrak{B}_N$ tel que $\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{N}}$ et $F(E)\neq 0$, alors il existe une fonction $\chi(E)$ totalement singulière dans $\mathfrak{B}_N$ et un ensemble E' de $\mathfrak{B}_N$ de puissance $<\overline{\overline{N}}$ satisfaisant aux conditions $|F(E)|\leqslant|\chi(E)|$ $(E\in\mathfrak{B}_N)$ et $F(E')=\chi(E')\neq 0$.*

D é m o n s t r a t i o n. Posons dans le Lemme I: $\mathcal{M}=N$, $\mathfrak{M}=\mathfrak{B}_N$, $T=$ famille des ensembles de $\mathfrak{B}_N$ qui sont de puissance $<\overline{\overline{N}}$.

Cette dernière position est légitime puisque la famille T ainsi définie jouit évidemment de la propriété ϱ et, d'après (j_1), de la propriété σ. On aura alors, pour l'ensemble H que l'on rencontre dans les formules (1)-(5), $\overline{\overline{H}}<\overline{\overline{N}}$.

Cela étant, on prouve en raisonnant comme plus haut que, pour ce Théorème de même que pour le Théorème précédant, la démonstration se ramène à celle du cas A.

Nous avons donc une fonction $F(E)$ qui est σ-normale dans $\mathfrak{B}_N$ et qui s'annule pour tout ensemble E tel que $E\in\mathfrak{B}_N$ et $\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{N}}$. Il est à démontrer qu'elle s'annule identiquement.

A cet effet, supposons qu'il existe un ensemble E_0 appartenant à $\mathfrak{B}_N$ et tel que $F(E_0)\neq 0$; on a alors par hypothèse $\overline{\overline{E}}=\overline{\overline{N}}$, d'où il résulte en vertu de 1° et (j_2) que l'ensemble E_0 est fondamental.

Définissons les ensembles E_{nk} par la formule

$$(12)\qquad E_{nk}=\underset{x}{E}\{P_n(x)>r_k;\ x\in E_0\}\qquad (n=1,2,\ldots;\ k=1,2,\ldots),$$

où $P_n(x)$ sont les polynômes qui figurent dans (j_3) et r_k parcourt tous les nombres rationnels, et désignons par $\mathfrak{R}$ le plus petit σ-corps contenant la famille $\{E_{nk}\}$. Comme les ensembles (12) sont ouverts dans E_0, on a

$$(13)\qquad \mathfrak{R}\subset\mathfrak{B}_{E_0}\subset\mathfrak{B}_N.$$

Posons

$$(14)\qquad f_n(x)=P_n(x|E_0),$$

$$(15)\qquad f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\qquad (x\in E_0),$$

$$(16)\qquad \Psi(E)=F(E)\quad\text{pour}\quad E\in\mathfrak{R},$$

$$(17)\qquad \delta=\tfrac{1}{2}|\Psi(E_0)|.$$

Alors, si l'on pose encore, dans le Lemme II, $\mathcal{M}=E_0$ et $\mathfrak{M}=\mathfrak{R}$, on obtient une réalisation exacte des prémisses (α_1)-(α_3).

Soit E_1 un ensemble satisfaisant aux conditions (β_1)-(β_3). D'après (β_2) et (17), on a $|\Psi(E_1)|>0$. D'après (13) et (16), la fonction $\Psi(E)$ est définie pour tout ensemble E de $\mathfrak{M}$ et s'annule lorsque $\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{N}}$; d'après ($\beta_1$), on a donc nécessairement $\overline{\overline{E}}_1=\overline{\overline{N}}$. Il en résulte en vertu de (β_3) et (14)-(15) que la convergence de la suite $\{P_n(x)\}$ est uniforme dans un ensemble de puissance $\overline{\overline{N}}$, contrairement à (j_3).

Cette contradiction démontre que, dans le cas A, la fonction $F(E)$ disparaît identiquement. Ceci achève la démonstration du Théorème II.

On en déduit facilement les Corollaires qui suivent:

COROLLAIRE II. *N étant un ensemble fondamental de nombres irrationnels, il n'existe, dans la famille des fonctions réelles définies dans $\mathfrak{B}_N$, aucune fonction qui soit σ-normale dans $\mathfrak{B}_N$ et qui s'annule pour tout ensemble de puissance $<\overline{\overline{N}}$, sauf la fonction identiquement nulle.*

La classe de fonctions envisagée dans ce Corollaire renferme évidemment celle de fonctions σ-additives soumises à la même restriction.

COROLLAIRE III. *Il n'existe, dans la même famille qu'auparavant, aucune fonction $F(E)$ qui soit:*

1° *σ-normale dans $\mathfrak{B}_N$,*

2° *non-négative,*

3° *non-décroissante,*

4° *différente de 0 pour un certain ensemble de puissance $<\overline{\overline{N}}$,*

sauf celles qui sont représentables par des fonctions totalement singulières dans $\mathfrak{B}_N$:

$$F(E)=\chi(E)=\chi(EH)\qquad (E\in\mathfrak{B}_N),$$

où H est de puissance $<\overline{\overline{N}}$.

TRAVAUX CITÉS

[1] S. Banach, *Sur une classe de fonctions d'ensemble*, Fund. Math. 6 (1924), p. 170-188.

[2] S. Mazur, *On continuous mappings on Cartesian products*, ibidem 39 (1952), p. 229-238.

[3] J. Popruženko, *Sur le phénomène de convergence de M. Sierpiński*, ibidem 41 (1954), p. 29-37.

[4] — *Sur certains ensembles indénombrables singuliers de nombres irrationnels*, ibidem 42 (1955), p. 319-338.

[5] — *Sur certaines représentations des fonctions d'ensemble à variation bornée (I)*, Coll. Math. 5 (1957), p. 43-50.

[6]. W. Sierpiński et E. Szpilrajn-Marczewski, *Remarques sur le problème de la mesure*, Fund. Math. 26 (1936), p. 256-261.

[7] S. Ulam, *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, ibidem 16 (1930), p. 140-150.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 17. 12. 1956

ON THE INTERSECTION OF A LINEAR SET WITH THE TRANSLATION OF ITS COMPLEMENT

BY

S. ŚWIERCZKOWSKI (WROCŁAW)

(a, b) denotes the closed interval $\{x: a \leqslant x \leqslant b\}$ and $[a, b]$ denotes the set of integers which belong to (a, b). The set $[a, b]$ is also called an *interval*. If E is a set of numbers then we denote by E_t the translated set $\{x+t: x \in E\}$. For a finite set S let $|S|$ be the number of elements in S. For a Lebesgue measurable set Z we denote by mZ the measure of Z. We suppose now that X is any measurable subset of an interval $I = (a, b)$, that $Y = I \setminus X$ and that similarly A and B are any complementary subsets of $[1, N]$. It is the purpose of this paper to prove the following theorems:

THEOREM 1. *There exists such an integer n that*

$$|A_n \cap B| \geqslant \frac{N}{5}\left(2-\sqrt{4-10|A|\,|B|/N^2}\right). \tag{1}$$

THEOREM 2. *There exists such a number t that*

$$m(X_t \cap Y) \geqslant \frac{mI}{5}\left(2-\sqrt{4-10mXmY/(mI)^2}\right). \tag{2}$$

Estimations similar to that which we give in Theorem 1 were first considered by P. Erdös and P. Scherk[1]). P. Erdös found that if $|A| = |B|$, then $\max\limits_n M_n > N/8$ where $M_n = |A_n \cap B|$. This was improved by P. Scherk, who obtained $\max\limits_n M_n > N(2-\sqrt{2})/4$. From Theorem 1 follows the stronger result $\max\limits_n M_n > N(4-\sqrt{6})/10$.

Jan Mycielski proved that if X, Y are measurable subsets of the interval $I = (0, 1)$, then for some t

$$m(X_t \cap Y) \geqslant 1-\sqrt{1-mXmY}.$$

[1]) P. Erdös, *Some remarks on number theory*, Riveon Lematematika 9 (1955), p. 45-48.