SUR LES FONCTIONS APPROXIMATIVEMENT CONTINUES

PAR

J. S. LIPIŃSKI (ŁÓDŹ)

La notion de continuité approximative d'une fonction a été définie par A. Denjoy. Elle s'appuie sur la notion d'*épaisseur* d'un ensemble et, par suite, indirectement sur celle de la mesure. Voici la définition de Denjoy: nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est *approximativement continue en un point* x_0 si, quel que soit le nombre positif ε, l'ensemble $\{x: |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon\}$ est d'épaisseur égale à 1 en x_0 (Denjoy [1], p. 165, et [2], p. 141).

Comme il résulte de cette définition, aucun point x' tel que $|f(x')| = \infty$ ne peut être un point de continuité approximative. Dans des travaux ultérieurs (Kempisty [3], Saks [6]) on a défini les limites approximatives inférieure et supérieure d'une fonction; de même que dans les cas de la continuité ordinaire, ceci permet de considérer certains points de l'ensemble $\{x: |f(\dot{x})| = \infty\}$ comme des points de continuité approximative. Denjoy a énoncé deux conditions nécessaires et suffisantes de la continuité approximative en admettant, sans le dire expressément, que la fonction admet des valeurs finies. En rejettant cette hypothèse on obtient les conditions nécessaires et suffisantes telles que les a formulées Kempisty. Voici une de ces conditions dont je vais profiter dans la suite: une fonction f est dite *approximativement continue*, si quel que soit a les ensembles $\{x: f(x) > a\}$ et $\{x: f(x) < a\}$ ont respectivement d'épaisseur 1 en chacun de leurs points ([1], p. 169, [2], p. 145).

Observons ici qu'une condition nécessaire et suffisante analogue a été énoncé par Maximoff [4], [5]. Cet auteur considère non pas tous les nombres a, mais un ensemble dense de ces nombres. Il admet, par contre, que pour un nombre a de cet ensemble les ensembles $\{x: f(x) > a\}$ et $\{x: f(x) < a\}$ sont les limites de suites ascendantes d'ensembles parfaits et que chaque terme d'une suite est composé des points de densité du terme suivant. Une caractérisation des ensembles $\{x: f(x) > a\}$ pour les fonctions approximativement continues a été donnée par Zahorski ([7], théorème 6, p. 25, et lemme 11, p. 26).

Dans ce travail je me propose d'énoncer une condition nécessaire et suffisante de la continuité approximative qui ne fait pas appel aux notions de la théorie de la mesure, mais utilise la notion de dérivée. Selon Denjoy, toute fonction approximativement continue et bornée est une dérivée ([1], p. 173, [2], p. 149), mais, en même temps il existe des dérivées bornées qui ne sont pas approximativement continues ([1], p. 178, [2], p. 154). Dans le travail [3] Kempisty a montré que la classe des fonctions approximativement continues, bornées et semi-continues est identique à celle des dérivées bornées et semi-continues. Je vais établir la proposition suivante:

Pour que la fonction $f(x)$ (pas nécessairement finie) soit approximativement continue, il faut et il suffit que toutes les fonctions $f_a^b(x) = \max\{a, \min[b, f(x)]\}$ soient des dérivées.

D é m o n s t r a t i o n. La condition est évidemment nécessaire, puisque le minimum ou le maximum de deux fonctions approximativement continues est une fonction approximativement continue et chaque fonction approximativement continue et bornée est une dérivée. Il reste à démontrer que pour toute fonction $f(x)$ approximativement discontinue, ne fût-ce qu'en un point, il existe un couple de nombres a, b tel que $f_a^b(x)$ n'ait pas de primitive. Si la fonction $f(x)$ est non-mesurable, il suffit de remarquer qu'il existe un nombre a_0 tel que l'ensemble $\{x: f(x) > a_0\}$ est non-mesurable. La fonction $f_{a_0-1}^{a_0+1}(x)$ étant alors non-mesurable, elle n'ait pas de primitive. Dans le cas de $f(x)$ mesurable je distinguerai deux cas:

1) Il existe un point x_0 de discontinuité approximative tel que $|f(x_0)| < \infty$;

2) En tout point de discontinuité approximative la fonction admet des valeurs infinies.

P r e m i e r c a s. Il existe un point x_0 et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que l'ensemble

$$\{x: |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon\} = \{x: f(x) > f(x_0)-\varepsilon\}\cdot\{x: f(x) < f(x_0)+\varepsilon\}$$

ait au point x_0 une épaisseur inférieure plus petite que 1. Dès lors, au moins un des ensembles figurant au membre droit de la dernière égalité doit avoir une épaisseur inférieure plus petite que 1. Supposons que ce soit l'ensemble $\{x: f(x) < f(x_0)+\varepsilon\}$ et soit $d < 1$ cette épaisseur inférieure. Si l'on avait, pour cet ensemble, $d = 1$ on pourrait considérer l'ensemble $\{x: f(x) > f(x_0)-\varepsilon\}$ et la démonstration sera analogue. Posons $a = f(x_0)-1$, $b_1 = f(x_0)+\varepsilon$. Si la fonction $f_a^{b_1}(x)$ n'est pas une dérivée, les nombres a et $b = b_1$ constituent le couple demandé. Si la fonction $f_a^{b_1}(x)$ est une dérivée, je pose $b = \frac{1}{2}[f(x_0)+b_1] = f(x_0)+\varepsilon/2$. La fonction $f_a^{b_1}(x)$, en tant que dérivée bornée, est en tout point la dérivée de son intégrale indéfinie de Lebesgue, c'est-à-dire

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f_a^{b_1}(t)\,dt = f_a^{b_1}(x_0).$$

Si la fonction $f_a^b(x)$ était une dérivée, nous aurions

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f_a^{b}(t)\,dt = f_a^{b}(x_0) = f_a^{b_1}(x_0).$$

La fonction $\varphi(x) = f_a^{b_1}(x) - f_a^b(x)$, en tant que différence de deux dérivées, serait aussi une dérivée et nous aurions

$$(1)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varphi(t)\,dt = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f_a^{b_1}(t)\,dt - \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f_a^{b}(t)\,dt = 0.$$

D'autre part, la fonction $\varphi(x)$ admet des valeurs non-négatives et elle prend sur l'ensemble $E = \{x: f(x) \geqslant df(x_0)+\varepsilon\}$ la valeur positive $b_1 - b = \varepsilon/2$. L'ensemble E étant le complément d'un ensemble dont l'épaisseur inférieure au point x_0 est < 1, son épaisseur supérieure au point x_0 est $1-d > 0$. Il existe donc une suite de points x_n tels que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ et

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{|E\cdot(x_0, x_n)|}{|x_0 - x_n|} = 1-d > 0.$$

(Si $x_0 > x_n$, l'expression (x_0, x_n) désigne l'intervalle (x_n, x_0).) Nous avons ensuite

$$[\operatorname{sign}(x_n - x_0)]\cdot\int_{x_0}^{x_n}\varphi(t)\,dt \geqslant \int_{E\cdot(x_0,x_n)}\varphi(t)\,dt \geqslant |E\cdot(x_0, x_n)|\cdot\frac{\varepsilon}{2}.$$

En vertu de (2) on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n - x_0}\int_{x_0}^{x_n}\varphi(t)\,dt \geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n - x_0|}\,|E\cdot(x_0, x_n)|\,\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}(1-d) > 0,$$

ce qui est en contradiction avec (1).

Deuxième cas. La fonction n'étant pas approximativement continue, il existe un nombre α tel que l'ensemble $\{x: f(x) > \alpha\}$ ou l'ensemble $\{x: f(x) < \alpha\}$ n'est pas composé exclusivement de points d'épaisseur un.

Considérons la fonction $f_{\alpha-1}^{\alpha+1}(x)$. Si elle n'est pas une dérivée, je pose $a = \alpha-1$, $b = \alpha+1$. Dans le cas contraire je raisonne comme il suit. La fonction $f_{\alpha-1}^{\alpha+1}(x)$ n'est pas approximativement continue, car au moins l'un des ensembles $\{x: f_{\alpha-1}^{\alpha+1}(x) > \alpha\} = \{x: f(x) > \alpha\}$ et $\{x: f_{\alpha-1}^{\alpha+1}(x) < \alpha\} = \{x: f(x) < \alpha\}$ ne satisfait pas à la condition nécessaire de continuité approximative. Cette fonction est finie en tout point, elle a donc les propriétés de la fonction considérée dans le premier cas. Il existe donc un couple de nombres u, v $(u < v)$ tel que

$$\overset{v}{\underset{u}{[}} f_{\alpha-1}^{\alpha+1}(x)] = \max\{u, \min[v, f_{\alpha-1}^{\alpha+1}(x)]\}$$

n'est pas une dérivée. En posant $a = \max(\alpha-1, u)$, $b = \min(\alpha+1, v)$ nous concluons que

$$\overset{b}{\underset{a}{[}} f_{\alpha-1}^{\alpha+1}(x)] = \overset{v}{\underset{u}{[}} f_{\alpha-1}^{\alpha+1}(x)]$$

n'est pas une dérivée. Puisque $\alpha-1 \leqslant a < b \leqslant \alpha+1$ on a

$$\overset{b}{\underset{a}{[}} f_{\alpha-1}^{\alpha+1}(x)] = f_a^b(x),$$

d'où l'on conclut que cette dernière fonction n'est pas, elle aussi, une dérivée. Nous avons ainsi trouvé le couple de nombres demandé.

TRAVAUX CITÉS

[1] A. Denjoy, *Sur les fonctions dérivées sommables*, Bull. Soc. Math. France 43 (1915), p. 161-248.

[2] — *Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse*, Paris 1954.

[3] S. Kempisty, *Sur la continuité approximative des fonctions dérivées*, Prace Tow. Przyj. Nauk w Wilnie, Wydz. nauk mat. i przyr. I (1922) (en polonais, avec un résumé français).

[4] I. Maximoff, *On approximately continuous functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 45 (1939), p. 264-268.

[5] — *On density points and approximately continuous functions*, Tôhoku Math. Journ. 47 (1940), p. 237-250.

[6] S. Saks, *Theory of the integral*, Warszawa 1937.

[7] Z. Zahorski, *Sur la première dérivée*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), p. 1-54.

UNIVERSITÉ DE ŁÓDŹ

Reçu par la Rédaction le 3. 12. 1956