[3] A. Alexiewicz and W. Orlicz, *On analytic vector-valued functions of a real variable*, ibidem 12 (1951), p. 108-111.

[4] — *Sur la continuité et la classification de Baire des fonctions abstraites*, Fund. Math. 25 (1948), p. 105-126.

Reçu par la Rédaction le 30. 6. 1956

SUR L'UNICITÉ DE LA MOYENNE DE DOSS DES VARIABLES ALÉATOIRES SITUÉES DANS QUELQUES ESPACES DE BANACH

PAR

SAAD K. NASR (ALEXANDRIE)

1. Introduction. Mourier [3] a donné une définition de la moyenne pour une variable aléatoire située dans un espace de Banach. Doss [1] en a donné une autre pour des variables aléatoires situées dans un espace métrique (D). Il a appelé l'élément *a moyenne de la variable aléatoire x* si $(a,\lambda)\leqslant E(x,\lambda)$ quel que soit l'élément fixe $\lambda\epsilon(D)$, où (x,y) désigne la distance entre deux éléments quelconques x et y de (D), et E la moyenne classique d'un nombre aléatoire.

On sait que dans un espace de Banach, dans lequel les sphéroïdes sont mesurables, une moyenne quelconque de Mourier est aussi une moyenne de Doss.

La moyenne de Mourier a été déterminée [4] pour quelques classes de variables aléatoires situées dans les espaces de Banach suivants: l'espace (C) des fonctions continues dans $[0,1]$, l'espace (c) des suites convergentes, l'espace (l) des suites $\{h_i\}$ telles que $\sum|h_i|<\infty$, et l'espace (L) des fonctions sommables dans $[0,1]$, où certaines conditions sont imposées.

La moyenne de Doss d'une variable aléatoire située dans n'importe lequel des espaces mentionnés ci-dessus est par conséquent déterminée. L'unicité d'une telle moyenne est démontrée dans les théorèmes 1, 2, 3 et 4.

2. Nous aurons à nous appuyer sur les lemmes suivants:

LEMME 1. *Si le nombre aléatoire x est tel que $E|x|<+\infty$, $\varepsilon>0$ étant donné, il existe un entier positif n, tel que*

$$|E(x)-\lambda|\leqslant E|x-\lambda|<|E(x)-\lambda|+2\left(1+\frac{|\lambda|}{n}\right)\varepsilon;$$

où λ est un nombre réel quelconque tel que $[|\lambda|]=n\geqslant n_1$ ($[\lambda]$ étant la partie entière du nombre réel λ).

Démonstration. Comme

$$\int_S |x|\,dP < +\infty,$$

où S est l'ensemble[1]) des événements élémentaires ξ dans la terminologie de Kolmogoroff [2], en posant $S_n = S_\xi[|_\xi x| < n]$[2]), nous pouvons déterminer n_1 tel que

$$(1)\qquad n\cdot \Pr(S-S_n) \leqslant \int_{S-S_n} |x|\,dP < \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant n_1.$$

Il en résulte que, pour $n \geqslant n_1$,

$$(2)\qquad \int_{S-S_n} |x-\lambda|\,dP \leqslant \int_{S-S_n} |x|\,dP + |\lambda|\cdot \Pr(S-S_n) < \left(1+\frac{|\lambda|}{n}\right)\varepsilon.$$

Posons

$$\varepsilon_\lambda = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad \lambda > 0, \\ -1 & \text{si} \quad \lambda < 0; \end{cases}$$

alors, pour λ satisfaisant à $[|\lambda|] = n \geqslant n_1$, on aura

$$(3)\qquad \int_{S_n} |x-\lambda|\,dP = \int_{S_n} \varepsilon_\lambda(\lambda - x)\,dP = \varepsilon_\lambda \int_{S_n} (\lambda - x)\,dP$$

$$= \varepsilon_\lambda\big(\lambda - E(x)\big) - \varepsilon_\lambda \int_{S-S_n} (\lambda - x)\,dP \leqslant |\lambda - E(x)| + \int_{S-S_n} |\lambda - x|\,dP.$$

Puisque

$$E|x-\lambda| = \Big\{\int_{S_n} + \int_{S-S_n}\Big\} |x-\lambda|\,dP,$$

de (2) et de (3) nous obtenons bien le résultat demandé.

Remarque. Observons que n_1 peut être pris comme le plus petit n pour lequel

$$\int_{S-S_n} |x|\,dP < \varepsilon,$$

et que pour $\lambda = n \geqslant n_1$ nous aurons

$$|E(x)-n| \leqslant E|x-n| < |E(x)-n| + 4\varepsilon.$$

[1]) Dans ce qui suit S sera entendu au sens ci-dessus.

[2]) $S_\xi[A]$ désignera dans la suite l'ensemble des points ξ pour lesquels la propriété A est vérifiée.

Lemme 2. *Soit a la moyenne classique du nombre aléatoire x; pour tout nombre $b \neq a$ on peut déterminer un $\varepsilon > 0$ et un nombre positif A tel que*

$$|b-\lambda| > E|x-\lambda| + \varepsilon$$

pour tout $\lambda > A$, si $a > b$ et tout $\lambda < -A$ si $a < b$.

Ce lemme apporte une légère précision à un théorème donné par Doss ([1], th. 1). Sa démonstration est implicitement contenue dans la démonstration de Doss.

Lemme 3. *Si la variable aléatoire $x = \{\zeta_i\} \epsilon (l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$ est telle que*

$$E\|x\| = E\sum_{i=1}^{\infty} |\zeta_i|^p < +\infty,$$

on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} E|\zeta_i - \lambda_i|^p = E\sum_{i=1}^{\infty} |\zeta_i - \lambda_i|^p, \qquad \lambda = \{\lambda_i\} \epsilon (l^{(p)}).$$

Démonstration. Considérons la suite non décroissante des fonctions non négatives mesurables

$$s_n(\xi) = \sum_{i=1}^{n} |_\xi\zeta_i - \lambda_i|^p.$$

Si

$$s(\xi) = \lim_{n\to\infty} s_n(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} |_\xi\zeta_i - \lambda_i|^p,$$

d'après le théorème de Lebesgue on aura

$$\int_S s(\xi)\,dP = \lim_{n\to\infty} \int_S s_n(\xi)\,dP,$$

ce qui donne

$$+\infty > E\sum_{i=1}^{\infty} |\zeta_i - \lambda_i|^p = \lim_{n\to\infty} E\sum_{i=1}^{n} |\zeta_i - \lambda_i|^p$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} E|\zeta_i - \lambda_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty} E|\zeta_i - \lambda_i|^p,$$

c. q. f. d.

3. Nous avons maintenant les théorèmes suivants:

Théorème 1. *Etant donné la variable aléatoire $x \epsilon (C)$ telle que $E\|x\| < +\infty$, il existe une et une seule moyenne $\bar{x}(t) = E(x(t))$, $(t \epsilon [0,1])$, au sens de Doss.*

Démonstration. La moyenne $\bar{x}(t) = E(x(t))$, $t \epsilon [0,1]$, de Mourier de la variable aléatoire $x \epsilon (C)$ étant déterminée [4], nous avons en conséquence $\|\bar{x}-\lambda\| \leqslant E\|x-\lambda\|$, λ étant un élément fixé quelconque de (C).

Maintenant, si b est élément de (C) différent de $\bar{x}$, il existe un point $t_1 \epsilon [0,1]$ pour lequel $b(t_1) \neq \bar{x}(t_1)$. Donc, d'après le lemme 2, il existe un $\varepsilon > 0$, tel que

$$(1) \qquad |b(t_1)-\lambda| > E|x(t_1)-\lambda|+\varepsilon$$

pour tout $\lambda > A > 0$, si $\bar{x}(t_1) > b(t_1)$, et $-\lambda > A > 0$ si $\bar{x}(t_1) < b(t_1)$.

La variable aléatoire x étant telle que $E\|x\| < +\infty$ et $\varepsilon > 0$ déterminé, il existe un entier positif n tel que

$$(2) \qquad n\cdot \Pr(S-S_n) \leqslant \int_{S-S_n} \|x\|\,dP < \varepsilon/9,$$

avec $n > A/3$ et $S_n = S_\xi[\|_\xi x\| < n]$.

La fonction aléatoire x étant continue, le nombre aléatoire $x(t)$ tend vers le nombre aléatoire $x(t_1)$, lorsque $t \to t_1$, pour tous les événements ξ.

Donc, pour un $\varepsilon' > 0$ quelconque on a

$$(3) \qquad \lim_{\delta'\to 0} \{\Pr[|x(t)-x(t_1)| \leqslant \varepsilon' \text{ pour tout } t \text{ satisfaisant à } |t-t_1| < \delta]\} = 1.$$

Prenons $\varepsilon' = \varepsilon/6$; il existe $\delta > 0$ tel que

$$(4) \qquad \Pr(S(t_1, \varepsilon)) < \varepsilon/18n,$$

où $S(t_1, \varepsilon)$ désigne l'ensemble des événements élémentaires pour lesquels l'inégalité $|x(t)-x(t_1)| > \varepsilon/6$ est remplie pour au moins un t satisfaisant à $|t-t_1| < \delta$.

Définissons maintenant la fonction continue $\lambda \epsilon (C)$ de la manière suivante:

$$(5) \qquad \lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant t_1-\delta, \\ \pm\dfrac{3n}{\delta}(t-t_1+\delta), & \text{si } t_1-\delta \leqslant t \leqslant t_1, \\ \pm\dfrac{3n}{\delta}(t_1-t+\delta), & \text{si } t_1 \leqslant t \leqslant t_1+\delta, \\ 0, & \text{si } t_1+\delta \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

où le signe $+$ ou $-$ est à prendre selon que $\bar{x}(t_1) >$ ou $< b(t_1)$.

Considérons, pour la fonction $\lambda \epsilon (C)$ définie par (5), l'égalité

$$(6) \qquad E\|x-\lambda\| = \Big\{\int_{S_n^{(1)}} + \int_{S_n^{(2)}} + \int_{S-S_n}\Big\} \|x-\lambda\|\,dP,$$

où $S_n^{(1)} = S_n - S(t_1,\varepsilon)$, $S_n^{(2)} = S_n \cap S(t_1,\varepsilon)$ et $S_n = S_n^{(1)} \cup S_n^{(2)}$.

On tire de (2) et de (5)

$$(7) \qquad \int_{S-S_n} \|x-\lambda\|\,dP \leqslant \int_{S-S_n} \|x\|\,dP + \|\lambda\|\cdot \Pr(S-S_n) < \frac{\varepsilon}{9}+\frac{\varepsilon}{3};$$

et de (4) et de (5), nous obtenons

$$(8) \qquad \int_{S_n^{(2)}} \|x-\lambda\|\,dP \leqslant \int_{S_n^{(2)}} \{\|x\|+\|\lambda\|\}\,dP < 4n\frac{\varepsilon}{18n} = \frac{2\varepsilon}{9}.$$

Remarquons maintenant que $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |_\xi x(t)-\lambda(t)|$, $\xi \epsilon S_n^{(1)}$, est toujours atteint pour un point t dans l'intervalle $[t_1-\delta, t_1+\delta]$. De plus, comme

$$|_\xi x(t)-\lambda(t)| \leqslant |_\xi x(t)-{}_\xi x(t_1)|+|_\xi x(t_1)-\lambda(t)|$$

pour $\xi \epsilon S_n^{(1)}$ et $t \epsilon [t_1-\delta, t_1+\delta]$, nous obtenons[3])

$$|_\xi x(t)-\lambda(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}+|_\xi x(t_1)-\lambda(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}+|_\xi x(t_1)-\lambda(t_1)|,$$

donc

$$(9) \qquad \|_\xi x-\lambda\| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}+|_\xi x(t_1)-\lambda(t_1)|, \qquad \xi \epsilon S_n^{(1)}.$$

De (6), (7), (8) et (9) nous tirons

$$(10) \qquad E\|x-\lambda\| < \frac{2\varepsilon}{9}+\frac{\varepsilon}{9}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{6}+\int_{S_n^{(1)}} |x(t_1)-\lambda(t_1)|\,dP$$

$$\leqslant \frac{5\varepsilon}{6}+\int_S |x(t_1)-\lambda(t_1)|\,dP.$$

Donc, de (1) il s'ensuit pour $n > A/3$,

$$E\|x-\lambda\| < |b(t_1)-\lambda(t_1)| \leqslant \|b-\lambda\|,$$

ce qui montre que b n'est pas une moyenne au sens de Doss, c. q. f. d.

Théorème 2. *La variable aléatoire $x = \{\zeta_i\} \epsilon (c)$ étant telle que $E\|x\| < +\infty$, il existe une et une seule moyenne $\bar{x} = \{E(\zeta_i)\}$ au sens de Doss.*

[3]) Supposons $\lambda(t_1) = 3n$; dans ce cas, si $\lambda(t) > x(t_1)$, nous avons $|\lambda(t)-x(t_1)| = \lambda(t)-x(t_1) \leqslant \lambda(t_1)-x(t_1)$; et si $\lambda(t) \leqslant x(t_1) \leqslant n$, nous avons $|\lambda(t)-x(t_1)| = x(t_1)-\lambda(t) \leqslant n < \lambda(t_1)-x(t_1)$.

Lorsque $\lambda(t_1) = -3n$, nous avons de même $|x(t_1)-\lambda(t)| = x(t_1)-\lambda(t) \leqslant x(t_1)-\lambda(t_1)$, si $\lambda(t) < x(t_1)$; et $|x(t_1)-\lambda(t)| = \lambda(t)-x(t_1) \leqslant n < x(t_1)-\lambda(t_1)$, si $\lambda(t) \geqslant x(t_1) \geqslant -n$.

Démonstration. La moyenne de Mourier $\bar{x} = \{E(\zeta_i)\}$ de la variable aléatoire $x \in (c)$ étant déterminée [4], nous avons en conséquence

$$\|\bar{x}-\lambda\| \leqslant E\|x-\lambda\|, \tag{11}$$

λ étant un élément fixé quelconque de (c).

Or, si b est un élément de (c) différent de $\bar{x}$, il existe au moins un entier positif N pour lequel $b_N \neq E(\zeta_N) = \bar{\zeta}_N$. Donc, en vertu du lemme 2, on peut déterminer un $\varepsilon > 0$ tel que

$$|b_N-\lambda| > E|\zeta_N-\lambda|+\varepsilon, \tag{12}$$

pour tout $\lambda > A > 0$ si $\bar{\zeta}_N > b_N$, et $-\lambda > A > 0$ si $\bar{\zeta}_N < b_N$.

Maintenant, $\varepsilon > 0$ étant déterminé et $E\|x\| < +\infty$, on peut trouver un entier n pour lequel

$$n\cdot \Pr(S-S_n) \leqslant \int\limits_{S-S_n} \|x\|\,dP < \varepsilon/6, \tag{13}$$

où $n > A/3$ et $S_n = S_\xi[\|_\xi x\| < n]$.

Définissons donc un élément $\lambda = \{\lambda_i\} \in (c)$, comme il suit:

$$\lambda_i = \begin{cases} \pm\, 3n, & \text{si} \quad i = N, \\ 0, & \text{si} \quad i \neq N, \end{cases} \tag{14}$$

où le signe $+$ ou $-$ est à prendre selon que $\bar{\zeta}_N$ est $>$ ou $< b_N$.

Nous avons en vertu de (13)

$$\int\limits_{S-S_n} \|x-\lambda\|\,dP \leqslant \|\lambda\|\cdot \Pr(S-S_n) + \int\limits_{S-S_n} \|x\|\,dP < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{6} = \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{15}$$

Nous voyons facilement que

$$\int\limits_{S_n} \|x-\lambda\|\,dP = \int\limits_{S_n} |\zeta_N-\lambda_N|\,dP < E|\zeta_N-\lambda_N|. \tag{16}$$

Donc, de (12), (15) et (16) nous obtenons

$$E\|x-\lambda\| = \Big\{\int\limits_{S_n} + \int\limits_{S-S_n}\Big\} \|x-\lambda\|\,dP < \frac{2\varepsilon}{3} + E|\zeta_N-\lambda_N| < |b_N-\lambda_N|, \tag{17}$$

c'est-à-dire $E\|x-\lambda\| < \|b-\lambda\|$, ce qui montre que b n'est pas une moyenne au sens de Doss, c. q. f. d.

THÉORÈME 3. *La variable aléatoire $x = \{\zeta_i\} \in (l)$ étant telle que $E\|x\| < +\infty$, il existe une et une seule moyenne $\bar{x} = \{E(\zeta_i)\}$ au sens de Doss.*

Démonstration. La moyenne de Mourier $\bar{x} = \{E(\zeta_i)\}$ de la variable aléatoire $x \in (l)$ étant déterminée [4], nous avons en conséquence

$$\|\bar{x}-\lambda\| \leqslant E\|x-\lambda\|, \tag{18}$$

λ étant un élément fixé quelconque de (l).

Or, si b est un élément de (l) différent de $\bar{x}$, il existe au moins un entier N pour lequel $b_N \neq E(\zeta_N) = \bar{\zeta}_N$. Par conséquent, d'après le lemme 2, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon + E|\zeta_N-\lambda_N| < |b_N-\lambda_N|$$

pour tout $\lambda_N \geqslant A_N > 0$ si $\bar{\zeta}_N > b_N$, et $-\lambda_N \geqslant A_N > 0$ si $\bar{\zeta}_N < b_N$.

En vertu du lemme 3 nous avons

$$\sum_{i=1}^{\infty} E|\zeta_i| = E\sum_{i=1}^{\infty} |\zeta_i| = E\|x\| < +\infty.$$

Donc, $\varepsilon > 0$ étant choisi, on peut déterminer $i_1 > N$ tel que

$$\sum_{i=i_1}^{\infty} E|\zeta_i| < \varepsilon/6. \tag{19}$$

Définissons maintenant l'élément $\lambda = \{\lambda_i\}$ comme il suit: $\lambda_i = 0$ pour $i \geqslant i_1$. Posons $\bar{\zeta}_i = E(\zeta_i)$ et désignons par i' les valeurs de $i < i_1$ pour lesquelles $b_i = \bar{\zeta}_i$ et par i'' les valeurs de $i < i_1$ pour lesquelles $b_i \neq \bar{\zeta}_i$; nous posons ensuite $\lambda_{i'} = R_{i'}$ où $R_{i'}$ est le plus petit entier pour lequel

$$\int\limits_{S-S_{R_{i'}}} |\zeta_{i'}|\,dP < \frac{\varepsilon}{3\cdot 2^{i'+3}}, \qquad \text{avec} \qquad S_R = S_\xi[|\zeta_{i'}| < R],$$

et $\lambda_{i''} = \varepsilon_{i''}A_{i''}$, où $A_{i''} > 0$ satisfait, comme dans le lemme 2, aux conditions $E|\zeta_{i''}-\varepsilon_{i''}A_{i''}| < |b_{i''}-\varepsilon_{i''}A_{i''}|$; $1 \leqslant i'' \leqslant N-1$ ou $N+1 \leqslant i'' < i_1$, $\varepsilon + E|\zeta_N-\varepsilon_N A_N| < |b_N-\varepsilon_N A_N|$, $\varepsilon_{i''}$ étant $+1$ ou -1 selon que $\bar{\zeta}_{i''} >$ ou $< b_{i''}$.

Donc, nous voyons bien que λ appartient à l'espace (l). En conséquence, de (19) nous obtenons

$$E\|x-\lambda\| = \sum_{i=1}^{i_1-1} E|\zeta_i-\lambda_i| + \sum_{i=i_1}^{\infty} E|\zeta_i| < \frac{\varepsilon}{6} + \sum_{i=1}^{i_1-1} E|\zeta_i-\lambda_i| \tag{20}$$

$$= \frac{\varepsilon}{6} + \sum_{i'} E|\zeta_{i'}-R_{i'}| + \sum_{i''} E|\zeta_{i''}-\varepsilon_{i''}A_{i''}|.$$

En tenant compte de la remarque de lemme 1, nous avons

$$\sum_{i'} E|\zeta_{i'}-R_{i'}| \leqslant \sum_{i'} |\zeta_{i'}-R_{i'}| + \sum_{i'} \varepsilon/3\cdot 2^{i'+1} \tag{21}$$
$$< \frac{\varepsilon}{6} + \sum_{i'} |\zeta_{i'}-R_{i'}| = \frac{\varepsilon}{6} + \sum_{i'} |b_{i'}-\lambda_{i'}|;$$

comme

$$\varepsilon + \sum_{i''} E|\zeta_{i''}-\varepsilon_{i''}A_{i''}| < \sum_{i''} |b_{i''}-\varepsilon_{i''}A_{i''}| = \sum_{i''} |b_{i''}-\lambda_{i''}|; \tag{22}$$

alors de (20), (21) et (22), nous tirons

$$\frac{2\varepsilon}{3} + E\|x-\lambda\| = \frac{2\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^{\infty} E|\zeta_i-\lambda_i| < \sum_{i=1}^{i_1-1} |b_i-\lambda_i| \leqslant \|b-\lambda\|,$$

c'est-à-dire $E\|b-\lambda\| < \|b-\lambda\|$, ce qui montre que b n'est pas une moyenne au sens de Doss, c. q. f. d.

THÉORÈME 4. *Si la variable aléatoire $x\in(L)$ est telle que $x(\xi,t)$ est mesurable (ξ,t), $\max_t|x(\xi,t)| < +\infty$ pour tout $\xi\in S$, et mesurable, et si $E\|x\| < +\infty$, il existe une et une seule moyenne $\overline{x}(t) = E(x(\xi,t))$ au sens de Doss.*

Démonstration. La moyenne de Mourier $\overline{x}(t) = E(x(\xi,t))$, $t\in[0,1]$ de la variable aléatoire $x\in(L)$ étant déterminée [4], nous avons en conséquence $\|\overline{x}-\lambda\| \leqslant E\|x-\lambda\|$, λ étant un élément fixé quelconque de (L). Soit maintenant b un élément de (L) différent de $\overline{x}$ et considérons les ensembles

$$s^{(1)} = S_t\,[\overline{x}(t) > b(t) > -\infty],$$
$$s^{(2)} = S_t\,[\overline{x}(t) < b(t) < +\infty],$$
$$s^{(3)} = S_t\,[\overline{x}(t) = b(t)].$$

Définissons la fonction $\lambda_n(t)\in(L)$, pour $t\in[0,1]$, comme il suit:

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} n, & \text{si} \quad t\in s^{(1)}\cup s^{(3)}, \\ -n, & \text{si} \quad t\in s^{(2)}, \\ 0, & \text{si} \quad t\in I_0 - (\bigcup_{i=1}^{3} s^{(i)}), \text{ avec } I_0 \equiv [0,1]. \end{cases}$$

Puisque $b\in(L)$, il existe une fonction continue $b_1\in(L)$ telle que $\|b-b_1\| < \frac{1}{4}\|b-\overline{x}\| = k/4$; si nous posons

$$S_n = S_\xi[\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(\xi,t)| < n],$$

nous aurons, avec $n > \max_t|b_1(t)|$,

$$\int_{s^{(1)}}\int_{S_n} |x(t)-\lambda_n(t)|\,dP\,dt = \int_{s^{(1)}}\int_{S_n} \{n-x(t)\}\,dP\,dt \tag{23}$$
$$= \int_{s^{(1)}} |\lambda_n(t)-b_1(t)|\,dt + \int_{s^{(1)}}\int_{S-S_n} x(t)\,dP\,dt +$$
$$+ \int_{s^{(1)}} \{b_1(t)-b(t)\}\,dt - k_1 - n\cdot \operatorname{mes}(S-S_n)\cdot \operatorname{mes}(s^{(1)});$$

où

$$\int_{s^{(1)}} \{\overline{x}(t)-b(t)\}\,dt = k_1 \geqslant 0.$$

De même, nous avons

$$\int_{s^{(2)}}\int_{S_n} |x(t)-\lambda_n(t)|\,dP\,dt = \int_{s^{(2)}} |\lambda_n(t)-b_1(t)|\,dt - \int_{s^{(2)}}\int_{S-S_n} x(t)\,dP\,dt + \tag{24}$$
$$+ \int_{s^{(2)}} \{b(t)-b_1(t)\}\,dt - k_2 - n\cdot \operatorname{mes}(S-S_n)\cdot \operatorname{mes}(s^{(2)});$$

où

$$\int_{s^{(2)}} \{b(t)-\overline{x}(t)\}\,dt = k_2 \geqslant 0 \quad \text{ et } \quad k_1+k_2 = k = \|b-\overline{x}\| > 0.$$

Finalement

$$\int_{s^{(3)}}\int_{S_n} |x(t)-\lambda_n(t)|\,dP\,dt = \int_{s^{(3)}} |\lambda_n(t)-b_1(t)|\,dt + \int_{s^{(3)}}\int_{S-S_n} x(t)\,dP\,dt + \tag{25}$$
$$+ \int_{s^{(3)}} \{b_1(t)-b(t)\}\,dt - n\cdot \operatorname{mes}(S-S_n)\cdot \operatorname{mes}(s^{(3)}).$$

Ajoutons (1), (2) et (3) et appliquons le théorème de Fubini; nous obtenons alors

$$\int_{S_n}\int_0^1 |x(t)-\lambda_n(t)|\,dt\,dP = \Big\{\int_{s^{(1)}} + \int_{s^{(2)}} + \int_{s^{(3)}}\Big\}\Big\{\int_{S_n} |x(t)-\lambda_n(t)|\,dP\Big\}\,dt$$
$$= \int_0^1 |\lambda_n(t)-b_1(t)|\,dt + \int_{s^{(1)}\cup s^{(3)}}\int_{S-S_n} x(t)\,dP\,dt - \int_{s^{(2)}}\int_{S-S_n} x(t)\,dP\,dt +$$
$$+ \int_{s^{(1)}\cup s^{(3)}} \{b_1(t)-b(t)\}\,dt + \int_{s^{(2)}} \{b(t)-b_1(t)\}\,dt - k_1 - k_2 -$$
$$- n\cdot \operatorname{mes}(S-S_n)\cdot \operatorname{mes}(\bigcup_{i=1}^{3} s^{(i)}),$$

donc

$$k + \int_{S_n} \|x-\lambda_n\|\,dP \leqslant \|b-\lambda_n\| + \int_{\bigcup_{i=1}^{3} s^{(i)}}\int_{S-S_n} |x(t)|\,dP\,dt + 2\|b-b_1\| -$$
$$- n\cdot \operatorname{mes}(S-S_n).$$

Nous avons ainsi

$$\tfrac{1}{2}k+\int_{S_n}\|x-\lambda_n\|\,dP\leqslant\|b-\lambda_n\|+\int_{S-S_n}\|x\|\,dP-n\cdot\operatorname{mes}(S-S_n);$$

et en conséquence [4])

$$\tfrac{1}{2}k+\int_{S}\|x-\lambda_n\|\,dP\leqslant\|b-\lambda_n\|+2\int_{S-S_n}\|x\|\,dP.$$

Comme $E\|x\|<+\infty$ pour n assez grand, nous obtenons

$$E\|x-\lambda_n\|<\|b-\lambda_n\|,$$

ce qui montre que b n'est pas une moyenne au sens de Doss.

TRAVAUX CITÉS

[1] S. Doss, *Sur la moyenne d'un élément aléatoire dans un espace distancié*, Bull. Sc. Math. 73 (1949), p. 48-72.

[2] A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin 1933.

[3] E. Mourier, *Sur l'espérance mathématique d'un élément aléatoire dans un espace de Banach*, C. R. Acad. Sc. Paris 229 (1949), p. 1300-1301.

[4] Saad K. Nasr, *Détermination of the Mourier mean of random variables situated in some Banach spaces*, Proc. of Math. and Physical Soc. of Egypt, sous presse.

Reçu par la Rédaction le 28. 5. 1956

[4]) $n\cdot\operatorname{mes}(S-S_n) = \|\lambda_n\|\cdot\Pr(S-S_n)$.

REMARKS ON THE DOSS INTEGRAL

BY

K. URBANIK (WROCŁAW)

I. In this note $\mathcal{X}$ will denote a metric space, I — the interval $0\leqslant t\leqslant 1$ and $\mathcal{X}^I$ — the set of all $\mathcal{X}$-valued functions defined on I.

A function f ($f\in\mathcal{X}^I$) is called *measurable* if for every open subset U ($U\subset\mathcal{X}$) $f^{-1}(U)$ is a Lebesgue measurable subset of I.

A measurable function f ($f\in\mathcal{X}^I$) is called *Doss integrable* (see [1]) if there exists a *unique* element $a_f\in\mathcal{X}$ such that for every $z\in\mathcal{X}$ the inequality

$$\varrho(a_f,z)\leqslant\int_0^1\varrho(f(t),z)\,dt$$

holds (ϱ denotes the distance in $\mathcal{X}$). The element a_f is called the *Doss integral* of the function f. We use the notation

$$a_f=\int_0^1 f(t)\,dt.$$

Suppose the following intepretation: t is a random parameter, and consequently a measurable function f is a random variable. The Doss integral a_f is the expectation of a random variable f. The purpose of this note is to prove that, with some natural assumptions concerning a space $\mathcal{X}$, if for every finitely-valued random variable there exists an expectation, then $\mathcal{X}$ is a normed linear space.

Finally we remark that the result of the present note is also true if the interval I with the Lebesgue measure is replaced by an arbitrary measure space with a non-atomic probability measure.

II. Suppose that $\mathcal{X}$ is an abelian metric group. Let $+$ denote the group-addition and Θ the zero element. It is well known that for every metric group there exists an invariant distance, *i. e.*, a distance satisfying for all $x,y,z\in\mathcal{X}$ the condition $\varrho(x+z,y+z)=\varrho(x,y)$ (see [2]).

$\mathfrak{A}$ will denote the set of all measurable functions belonging to $\mathcal{X}^I$ which only take a finite number of values.