$$\int_{-1}^{+1} \left(rx+\sqrt{R^2-r^2+r^2x^2}\right)^q P_n(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} P_n(x)\left[\sum_{l=0}^{[q/2]} \binom{q}{2l} r^{q-2l}x^{q-2l}(R^2-r^2+r^2x^2)^l\right]dx+$$

$$+\int_{-1}^{+1} P_n(x)\left[\sum_{l=0}^{[(q-1)/2]} \binom{q}{2l+1} r^{q-2l-1}x^{q-2l-1}(R^2-r^2+r^2x^2)^{l+1/2}\right]dx;$$

la première intégrale s'annule, car l'expression entre crochets est un polynôme de degré moindre que n; la seconde intégrale s'annule aussi, la fonction intégrée étant impaire.

L'intégrale de la fonction $f(p)$ s'annulant sur une sphère de rayon variable, il en résulte que l'intégrale de cette fonction prise sur la surface sphérique s'annule aussi lorsque cette sphère contient l'origine des coordonnées dans son intérieur ou sur elle-même.

Dans le cas du plan, il est aisé de démontrer d'une façon analogue que la fonction $f(p)$ s'annule en moyenne sur chaque cercle contenant à l'intérieur ou sur sa circonférence l'origine des coordonnées où

$$f(\varrho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(\varrho)(A_n\cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

$W_n(\varrho)$ désignant la fonction rationnelle

$$W_n(\varrho) = \frac{1}{\varrho}\frac{dV_n(\varrho)}{d\varrho}, \qquad V_n(0)=0,$$

et $V_n(\varrho)$ étant un polynôme arbitraire de degré moindre que n, pair ou impair selon que n est pair ou impair, finalement A_n et B_n des coefficients arbitraires, pourvu que la série soit presque uniformément convergente dans tout le plan.

Reçu par la Rédaction le 13. 8. 1956

FORMULES GÉNÉRALES DE QUADRATURE MÉCANIQUE DU TYPE DE GAUSS

PAR

L. TCHAKALOFF (SOFIA)

On entend par formule générale de quadrature mécanique une formule approchée de la forme

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} f^{(\lambda)}(a_k), \qquad -\infty < a < b < \infty,$$

$m > 0$ et $r_k \geqslant 0$ désignant des nombres entiers donnés. Les arguments a_k de la fonction $f(x)$ sont des nombres différents que l'on suppose ordinairement donnés d'avance ou déterminés d'une façon convenable pour que la formule soit plus exacte ou plus commode pour les applications. Quant aux coefficients $A_{k\lambda}$ (dont le nombre est égal à $M = \sum_{k=1}^{m}(r_k+1)$), on tâche de les déterminer de manière que la formule (1) soit exacte pour chaque polynôme de degré $< M$. Comme j'ai montré dans un travail antérieur, cette dernière condition est suffisante pour que les coefficients $A_{k\lambda}$ soient complètement déterminés; leur détermination se réduit essentiellement à la décomposition en fractions simples de la fonction rationnelle

$$R(z) = \frac{1}{P(z)}\int_a^b \frac{P(z)-P(x)}{z-x}\,dx,$$

où

$$P(x) = \prod_{k=1}^{m}(x-a_k)^{r_k+1}.$$

Je me propose dans la présente communication*) de déterminer aussi les arguments a_k dans la formule (1), de manière qu'elle soit exacte pour des polynômes algébriques de degré aussi élevé que possible. D'une façon plus précise, le problème que je me propose de résoudre peut être formulé ainsi: Étant donnés les nombres entiers

*) Présentée au VIII[e] Congrès des Mathématiciens Polonais (Varsovie, le 6-12 septembre 1953). Voir aussi [2].

$m > 0$ et $r_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, déterminer le plus grand entier N auquel on puisse faire correspondre m nombres réels a_k et M coefficients $A_{k\lambda}$, où

$$M = \sum_{k=1}^{m} (r_k+1)$$

de façon que la formule (1) soit exacte pour chaque polynôme $f(x)$ de degré $< N$; après avoir déterminé le nombre N assujetti aux conditions ci-dessus, trouver une méthode pour la détermination des nombres a_k et $A_{k\lambda}$.

On voit immédiatement que l'équation (1) ne pourrait être satisfaite par un polynôme de la forme

$$f(x) = \prod_{k=1}^{m} (x-a_k)^{2s_k},$$

où les exposants pairs $2s_k$ sont plus grands que les nombres correspondants r_k, et cela quels que soient les arguments réels a_k et les coefficients $A_{k\lambda}$. Les inégalités $2s_k > r_k$ étant vérifiées pour $s_k = 1+[r_k/2]$, il en résulte la relation

$$N \leqslant \sum_{k=1}^{m} (2+2[r_k/2]).$$

Nous allons montrer que c'est le signe d'égalité qui reste en vigueur dans cette relation.

Considérons d'abord le cas où tous les nombres r_k sont pairs. Le nombre total des arguments a_k et des coefficients $A_{k\lambda}$ étant égal à

$$L = m + \sum_{k=1}^{m} (r_k+1) = \sum_{k=1}^{m} (r_k+2),$$

il est bien naturel que l'on tâche de déterminer les inconnues a_k et $A_{k\lambda}$ de sorte que l'équation (1) soit vérifiée lorsqu'on remplace $f(x)$ successivement par $1, x, x^2, \ldots, x^{L-1}$, c'est-à-dire qu'elle soit satisfaite par chaque polynôme $f(x)$ de degré $< \sum_{k=1}^{m} (r_k+2)$.

Désignons par $P(x)$ le polynôme

$$P(x) = \prod_{k=1}^{m} (x-a_k)^{r_k+1} \tag{2}$$

de degré

$$M = \sum_{1}^{m} (r_k+1) = L-m.$$

Pour que l'équation (1) soit vérifiée pour chaque polynôme $f(x)$ de degré $< L = M+m$, il faut que l'on ait

$$\int_a^b P(x) x^l dx = 0 \quad \text{pour} \quad l = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{3}$$

On obtient ainsi le système (3) de m équations algébriques aux inconnues $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Pour démontrer que ce système a une solution réelle, nous profiterons du lemme suivant:

Lemme. *Étant donnés m nombres pairs non négatifs $r_1, r_2, \ldots, r_m$ il existe m nombres réels différents $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dans l'intervalle ouvert (a, b), tels que le polynôme (2) soit orthogonal dans cet intervalle à chaque polynôme algébrique de degré $< m$.*

Démonstration. Considérons la fonction

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \int_a^b \prod_{k=1}^{m} (x-x_k)^{r_k+2} dx \tag{4}$$

des variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Les exposants r_k+2 étant pairs, cette fonction est toujours positive. On démontre facilement qu'il existe un cube $-R \leqslant x_k \leqslant R$ dans l'espace à m dimensions, tel que les valeurs de cette fonction en dehors de ce cube soient supérieures à $F(0, 0, \ldots, 0)$. Il s'ensuit qu'il existe un point $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ à l'intérieur du cube où la fonction $f(x)$ atteint son minimum absolu. On peut aussi démontrer que les coordonnées $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de ce point sont toutes différentes, c'est-à-dire que $a_k \neq a_l$ pour $k \neq l$. On doit donc avoir

$$0 = \frac{\partial F}{\partial a_k} = (r_k+2) \int_a^b \prod_{l=1}^{m} (x-a_l)^{r_l+2} \frac{dx}{a_k-x}$$

ou bien

$$\int_a^b P(x) L_k(x) dx = 0,$$

$P(x)$ étant le polynôme défini par (2) et $L_1(x), L_2(x), \ldots, L_m(x)$ désignant les polynômes fondamentaux de Lagrange correspondant aux noeuds $a_1, a_2, \ldots \ldots, a_m$. Chaque polynôme de degré inférieur à m pouvant être représenté comme combinaison linéaire des polynômes $L_k(x)$ il est évident que le polynôme $P(x)$ est orthogonal à chaque polynôme de degré inférieur à m.

Il nous reste encore à démontrer que les zéros a_k de $P(x)$ sont situés à l'intérieur de l'intervalle (a, b). Dans ce but désignerons par $b_1, b_2, \ldots, b_\mu$ les zéros de ce polynôme situés entre a et b. Si leur nombre μ était inférieur à m on devrait avoir

$$\int_a^b P(x)(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_\mu) dx = 0,$$

ce qui est impossible, le polynôme sous le signe d'intégration ne changeant pas de signe lorsque x varie entre a et b. On doit donc avoir $\mu = m$, ce qu'il fallait démontrer.

Les raisonnements ci-dessus conduisent donc au résultat suivant:

Étant donnés m nombres pairs et non négatifs $r_1, r_2, \ldots, r_m$, le système (3) *aux m inconnues $a_1, a_2, \ldots, a_m$ possède toujours une solution réelle, composée de nombres différents situés à l'intérieur de l'intervalle* (a, b).

D'autre part, comme j'ai déjà remarqué au début, on peut déterminer les coefficients $A_{k\lambda}$ dans la formule (1) (et cela d'une manière univoque) de façon qu'elle soit exacte pour chaque polynôme $f(x)$ de degré inférieur à

$$M = \sum_{k=1}^{m} (r_k+1).$$

Les nombres a_k et $A_{k\lambda}$ étant déterminés comme nous l'avons expliqué, il est facile de vérifier que la formule (1) est exacte pour chaque polynôme $f(x)$ de degré $< M+m = L$. Soit en effet $f(x)$ un tel polynôme, que l'on peut représenter sous la forme

$$f(x) = P(x)Q(x)+R(x),$$

les degrés des polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ étant respectivement inférieurs à m et à M. D'après les équations (3) on a

$$\int_a^b P(x)Q(x)\,dx = 0;$$

d'autre part, d'après le choix des coefficients $A_{k\lambda}$, on a

$$\int_a^b R(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} R^{(\lambda)}(a_k).$$

Or, en tenant compte du fait que a_k est un zéro de $P(x)$ d'ordre de multiplicité r_k+1, il est évident que $f^{(\lambda)}(a_k) = R^{(\lambda)}(a_k)$ pour $\lambda = 0, 1, \ldots, r_k$, de sorte que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} f^{(\lambda)}(a_k).$$

Passons maintenant au cas où les nombres r_k sont de parité quelconque et posons $r_k' = 2[r_k/2]$. En déterminant les arguments réels a_k et les coefficients $A_{k\lambda}$ de sorte que, la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_k'} A_{k\lambda} f^{(\lambda)}(a_k)$$

soit exacte pour chaque polynôme de degré $< L' = \sum_{k=1}^{m}(r_k'+2)$ et en posant $A_{kr_k} = 0$ chaque fois que r_k est impair, la formule (1) sera exacte pour chaque polynôme $f(x)$ dont le degré est inférieur à

$$L' = \sum_{k=1}^{m} \left(2\left[\frac{r_k}{2}\right]+2\right).$$

Au contraire, elle ne peut être exacte lorsque l'on remplace $f(x)$ par un polynôme de degré L', comme nous l'avons déjà remarqué au début. On a donc dans tous les cas $N = L'$.

Il serait aussi important pour les applications d'avoir une expression commode pour l'erreur que l'on commet en appliquant la formule (1) à une fonction arbitraire, c'est-à-dire une expression pour la différence des deux membres de la formule (1). En supposant que $f(x)$ a des dérivées continues jusqu'à l'ordre

$$N = \sum_{k=1}^{m} \left(2\left[\frac{r_k}{2}\right]+2\right),$$

on peut démontrer la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} f^{(\lambda)}(a_k) + \int_a^b u(x) f^{(N)}(x)\,dx,$$

$u(x)$ désignant une fonction continue indépendante de $f(x)$ et ne changeant pas de signe dans l'intervalle (a, b).

TRAVAUX CITÉS

[1] P. Turán, *On the theory of mechanical quadrature*, Acta Sci. Math. Szeged 12 (1950), p. 30-37.

[2] Л. Чакалов, *Общи квадратурни формули от Гаусов тип*, Известия на Математически институт, Бълг. акад. на науките I,2 (1954), p. 67-88.

Reçu par la Rédaction le 14. 8. 1956