SUR LES FONCTIONS DONT LES INTÉGRALES ÉTENDUES AUX SURFACES SPHÉRIQUES SONT NULLES

PAR

W. WOLIBNER (WROCŁAW)

Comme on le sait, il existe des fonctions continues dans tout l'espace ne s'annulant pas identiquement, telles que leurs intégrales sur chaque sphère, respectivement sur chaque surface sphérique de rayon R, sont nulles[1]). Évidemment, si l'int grale s'annulait sur chaque surface sphérique, alors la fonction continue devrait s'annuler identiquement.

Néanmoins, il résulte immédiatement de l'intégrale de Poisson que l'intégrale de la fonction $f(p)$, sur chaque surface sphérique contenant le point O dans son intérieur ou sur elle-même, s'annule, où

$$f(p)=H(p)/\varrho^m, \qquad H(O)=0,$$

p désignant le point de l'espace euclidien à m dimensions, ϱ la distance entre p et O et $H(p)$ une fonction harmonique arbitraire. Lorsque $H(p)$ s'annule, de plus, $m+1$ fois au point O, $f(p)$ est partout continue.

Pareillement, lorsque $H(p)$ s'annule à l'infini et n'a qu'un point singulier Q, alors $f(p)$ s'annulera en moyenne sur chaque surface sph rique qui contient en son int rieur Q et ne contient pas le point O (évidemment $f(p)$ n'est pas continue au point Q).

Il est évident que $f(p)$ s'annulera en moyenne aussi sur chaque hyperplan à $m-1$ dimensions qui coupe l'espace entre les points Q et O.

Nous considérons dans cette note une vaste classe de fonctions dans les espaces à 3 et 2 dimensions possédant la propriété mentionnée.

Soit

$$f(\varrho,\varphi,\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty}W_n(\varrho)\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(\cos\vartheta)(A_k^{(n)}\cos k\varphi+B_k^{(n)}\sin k\varphi),$$

$\varrho, \varphi, \vartheta$ désignant les coordonnées sphériques, $P_{n,k}$ les fonctions sphériques de Laplace ($P_{n,0}=P_n$ étant le polynôme de Legendre), $W_n(\varrho)$ une fonction rationnelle de la forme

$$W_n(\varrho)=\frac{1}{\varrho^2}\frac{dV_n(\varrho)}{d\varrho}, \qquad V_n(0)=0,$$

et $V_n(\varrho)$ désignant un polynôme arbitraire de degré inférieur à n, pair ou impair selon que n est pair ou impair; enfin $A_k^{(n)}$ et $B_k^{(n)}$ des coefficients arbitraires, pourvu que la série soit presque uniformément convergente dans tout l'espace.

L'intégrale de la fonction $f(p)$ s'annule lorsqu'elle est prise sur une sphère quelconque, respectivement sur une surface sphérique quelconque contenant l'origine des coordonnées dans son intérieur ou sur elle-même.

Démonstration. Vu la convergence presque uniforme, il suffit de démontrer cette proposition pour un terme arbitraire de la série. Soit r la distance du centre de la sphère en question à l'origine des coordonnées, R le rayon de cette sphère, $r\leqslant R$. Considérant un nouveau système de coordonnées sphériques $\varrho, \varphi', \vartheta'$, d'axe passant par le centre de la sphère, nous obtenons, comme il est bien connu,

$$\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(\cos\vartheta)(A_k^{(n)}\cos k\varphi+B_k^{(n)}\sin k\varphi)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(\cos\vartheta')(A_k'^{(n)}\cos k\varphi'+B_k'^{(n)}\sin k\varphi'),$$

$A_k'^{(n)}$ et $B_k'^{(n)}$ désignant des constantes.

L'intégrale du $n^{\text{ième}}$ terme prise sur la sphère donnée devient

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r\cos\vartheta'+O+\sqrt{R^2-r^2\sin^2\vartheta'}}W_n(\varrho)\varrho^2d\varrho\Big[\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(\cos\vartheta')(A_k'^{(n)}\cos k\varphi'+$$
$$+B_k'^{(n)}\sin k\varphi')\Big]d\varphi'\sin\vartheta'\,d\vartheta'$$
$$=2\pi A_0'^{(n)}\int_0^{\pi}V_n\big(r\cos\vartheta'+\sqrt{R^2-r^2\sin^2\vartheta'}\big)P_n(\cos\vartheta')\sin\vartheta'\,d\vartheta'$$
$$=2\pi A_0'^{(n)}\int_{-1}^{+1}V_n(rx+\sqrt{R^2-r^2+r^2x^2})P_n(x)dx.$$

Il suffit donc de démontrer que

$$\int_{-1}^{+1}(rx+\sqrt{R^2-r^2+r^2x^2})^qP_n(x)\,dx=0,$$

pour tout q naturel, $q<n$, q étant pair ou impair selon que n est pair ou impair; on a

[1]) Cf. J. Radon, *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Berichte der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig 69 (1917), p. 262-277, et F. John, *Bestimmung einer Funktion aus ihren Integralen über gewisse Mannigfaltigkeiten*, Math. Annalen 109 (1934), p. 488-520.

$$\int_{-1}^{+1}(rx+\sqrt{R^2-r^2+r^2x^2})^q P_n(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} P_n(x)\Big[\sum_{l=0}^{[q/2]}\binom{q}{2l} r^{q-2l}x^{q-2l}(R^2-r^2+r^2x^2)^l\Big]dx+$$

$$+\int_{-1}^{+1} P_n(x)\Big[\sum_{l=0}^{[(q-1)/2]}\binom{q}{2l+1} r^{q-2l-1}x^{q-2l-1}(R^2-r^2+r^2x^2)^{l+1/2}\Big]dx;$$

la première intégrale s'annule, car l'expression entre crochets est un polynôme de degré moindre que n; la seconde intégrale s'annule aussi, la fonction intégrée étant impaire.

L'intégrale de la fonction $f(p)$ s'annulant sur une sphère de rayon variable, il en résulte que l'intégrale de cette fonction prise sur la surface sphérique s'annule aussi lorsque cette sphère contient l'origine des coordonnées dans son intérieur ou sur elle-même.

Dans le cas du plan, il est aisé de démontrer d'une façon analogue que la fonction $f(p)$ s'annule en moyenne sur chaque cercle contenant à l'intérieur ou sur sa circonférence l'origine des coordonnées où

$$f(\varrho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(\varrho)(A_n\cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

$W_n(\varrho)$ désignant la fonction rationnelle

$$W_n(\varrho) = \frac{1}{\varrho}\frac{dV_n(\varrho)}{d\varrho}, \qquad V_n(0)=0,$$

et $V_n(\varrho)$ étant un polynôme arbitraire de degré moindre que n, pair ou impair selon que n est pair ou impair, finalement A_n et B_n des coefficients arbitraires, pourvu que la série soit presque uniformément convergente dans tout le plan.

Reçu par la Rédaction le 13. 8. 1956

FORMULES GÉNÉRALES DE QUADRATURE MÉCANIQUE DU TYPE DE GAUSS

PAR

L. TCHAKALOFF (SOFIA)

On entend par formule générale de quadrature mécanique une formule approchée de la forme

$$(1)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} f^{(\lambda)}(a_k), \qquad -\infty < a < b < \infty,$$

$m>0$ et $r_k \geqslant 0$ désignant des nombres entiers donnés. Les arguments a_k de la fonction $f(x)$ sont des nombres différents que l'on suppose ordinairement donnés d'avance ou déterminés d'une façon convenable pour que la formule soit plus exacte ou plus commode pour les applications. Quant aux coefficients $A_{k\lambda}$ (dont le nombre est égal à $M=\sum_{k=1}^{m}(r_k+1)$), on tâche de les déterminer de manière que la formule (1) soit exacte pour chaque polynôme de degré $<M$. Comme j'ai montré dans un travail antérieur, cette dernière condition est suffisante pour que les coefficients $A_{k\lambda}$ soient complètement déterminés; leur détermination se réduit essentiellement à la décomposition en fractions simples de la fonction rationnelle

$$R(z) = \frac{1}{P(z)}\int_a^b \frac{P(z)-P(x)}{z-x}\,dx,$$

où

$$P(x) = \prod_{k=1}^{m}(x-a_k)^{r_k+1}.$$

Je me propose dans la présente communication*) de déterminer aussi les arguments a_k dans la formule (1), de manière qu'elle soit exacte pour des polynômes algébriques de degré aussi élevé que possible. D'une façon plus précise, le problème que je me propose de résoudre peut être formulé ainsi: Étant donnés les nombres entiers

*) Présentée au VIII^e Congrès des Mathématiciens Polonais (Varsovie, le 6-12 septembre 1953). Voir aussi [2].