Du théorème 1 on déduit immédiatement le

THÉORÈME 2. *Soient E un espace, T un clan et $P(A)$ une mesure définie sur T, dénombrablement additive sur la tribu $\mathrm{pr}_I^{-1}(T^I)$, quelle que soit la partie finie $I \subset K$. Si, quels que soient la partie finie $I \subset K$ et $t \in K - I$, la mesure conditionelle $P(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t))$ est quasi-régulière, $P(A)$ est dénombrablement additive sur T.*

4. Problèmes ouverts. On ne sait pas si le théorème 2 est vrai si l'on suppose que $P(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t))$ est régulière par rapport aux tribus $(T^I, \mathcal{T}_t)$, quelle que soit la tribu séparable $\mathcal{T}_t \subset T_t$ (**P 196**). S'il en étant ainsi, les résultats de Ionescu Tulcea [5], de Marczewski[6]) [6], de Ryll-Nardzewski [7] et de cette note en seraient des cas particuliers. En ce qui concerne les résultats de Marczewski et de Ryll-Nardzewski, ce fait se déduit en tenant compte de [7], théorèmes I, III et IV, et de [2], théorème 3.1, p. 96-98.

On pourait aussi demander un exemple de mesure conditionelle $P(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t))$ qui soit régulière par rapport aux tribus $(T^I, \mathcal{T}_t)$ quelle que soit la tribu séparable $\mathcal{T}_t \subset T_t$, et qui ne soit pas régulière ou quasi-régulière (**P 197**).

TRAVAUX CITÉS

[1] E. Sparre Andersen and B. Jessen, *On the introduction of measures in infinite product sets*, Danske Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd. 25 (1948), Nr 4.

[2] J. L. Doob, *Stochastic processes with an integral-valued parameter*, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), p. 87-149.

[3] — *Stochastic processes*, New York 1953.

[4] P. R. Halmos, *Measure theory*, New York 1950.

[5] C. T. Ionescu-Tulcea, *Mesures dans les espaces produits*, Rend. Acad. Naz. Lincei 7 (1949), p. 208-211.

[6] E. Marczewski, *On compact measures*, Fund. Math. 40 (1953), p. 113-124.

[7] C. Ryll-Nardzewski, *On quasi-compact measures*, ibidem 40 (1953), p. 125-130.

Reçu par la Rédaction le 1. 7. 1956

[6]) En ce qui concerne l'additivité dénombrable de la mesure.

BEMERKUNGEN ÜBER HAUSDORFFSCHE MASSE UND HAUSDORFFSCHE DIMENSIONEN IN LIESCHEN GRUPPEN

VON

A. GOETZ (WROCŁAW)

Einleitung. In der vorliegenden Arbeit werden linksinvariante Hausdorffsche Maße in Lieschen Gruppen behandelt. Die Konstruktionsidee von invarianten Maßen in topologischen Gruppen hat Oxtoby in [5] entwickelt.

In § 1 wird der Begriff des Hausdorffschen Maßes und der Hausdorffschen Dimension eingeführt und es werden einige Hilfssätze bewiesen, die im weiteren angewendet werden.

In § 2 wird bewiesen, daß für die „Riemannsche" linksinvariante Metrik in einer n-gliedrigen Lieschen Gruppe (eine solche Metrik kann man z. B. mit Hilfe der Maurer-Cartanschen Formen $\omega^1, \ldots, \omega^n$ bilden, indem man $ds^2 = (\omega^1)^2 + \ldots + (\omega^n)^2$ setzt) das n-dimensionale Hausdorffsche Maß gleich dem Haarschen Maß ist, und daraus wird abgeleitet, daß das n-dimensionale Hausdorffsche Maß in einem n-dimensionalen Riemannschen Raume dem klassischen Inhalt proportional ist[1]).

In § 3 wird bewiesen, daß für die Hausdorffsche Dimension h_ϱ einer n-gliedrigen Lieschen Gruppe G mit einer beliebigen linksinvarianten Metrik $\varrho(x, y)$, welche die Topologie von G nicht ändert, die Ungleichungen gelten:

$$\frac{n}{\log_2\left[\limsup\limits_{x\to e}\dfrac{\varrho(e, x^2)}{\varrho(e, x)}\right]} \leqslant h_\varrho \leqslant \frac{n}{\log_2\left[\liminf\limits_{x\to e}\dfrac{\varrho(e, x^2)}{\varrho(e, x)}\right]},$$

wo e das Einheitselement der Gruppe ist. Wenn

$$\liminf_{x\to e}\frac{\varrho(e, x^2)}{\varrho(e, x)} \leqslant 1$$

ist, so gilt nur die erste Ungleichung, die im Falle von

$$\limsup_{x\to e}\frac{\varrho(e, x^2)}{\varrho(e, x)} = 1$$

[1]) Vergleiche [4], wo das letztgenannte Resultat auf eine andere Weise abgeleitet wird.

als $h_\varrho = \infty$ zu verstehen ist. Die erste Ungleichung ist eine Verstärkung der bekannten Ungleichung $h \geqslant n$ ([3], S. 107), die für alle metrischen Räume gilt.

Das h_ϱ-dimensionale Hausdorffsche Maß braucht aber kein Haarsches Maß zu sein. Wenn aber eine Umgebung des Einheitselements vorhanden ist, in welcher die Gleichheit $\varrho(e, x^2)/\varrho(e, x) = A$ gilt, so ist $1 < A \leqslant 2$ und das $n/\log_2 A$-dimensionale Hausdorffsche Maß ist dann ein Haarsches Maß.

1. In einem separablen metrischen Raume M mit der Entfernungsfunktion $\varrho(x, y)$ wird das w-dimensionale Hausdorffsche Maß einer Menge E folgenderweise definiert (siehe z. B. [6], S. 53):

Es sei eine fixierte Zahl $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir zerlegen die Menge E in abzählbar viele Mengen E_i $(i = 1, 2, \ldots)$, die paarweise punktfremd sind und deren Durchmesser $\delta(E_i) < \varepsilon$ ist, und bilden die Summen $\sum_{i=1}^{\infty} [\delta(E_i)]^w$. Das Infimum dieser Summen in bezug auf alle derartigen Zerlegungen bezeichnen wir mit

$$\Lambda_w^{(\varepsilon)}(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} [\delta(E_i)]^w .$$

$\Lambda_w^{(\varepsilon)}(E)$, als Funktion der Veränderlichen ε betrachtet, ist monoton und deswegen existiert der endliche oder unendliche Grenzwert

$$\Lambda_w(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Lambda_w^{(\varepsilon)}(E) .$$

Dieser Grenzwert wird das *w-dimensionale Hausdorffsche Maß von E* genannt. Das Maß $\Lambda_w(E)$ erfüllt alle Bedingungen, die ein Carathéodorysches äußeres Maß charakterisieren ([6], S. 43); betrachtet man es nur für meßbare Mengen, zu denen auch alle Borelsche Mengen gehören, so ist es σ-additiv.

Ist $\Lambda_{w_0}(E) = 0$, so ist auch für jedes $w > w_0$: $\Lambda_w(E) = 0$, ist dagegen $\Lambda_{w_0}(E) > 0$, so ist, für jedes $v < w_0$, $\Lambda_v(E) = \infty$. Das Supremum der Zahlen w, für welche $\Lambda_w(E) = \infty$ ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, das Infimum der Zahlen v, für welche $\Lambda_v(E) = 0$ ist, heißt *Hausdorffsche Dimension der Menge E*. Wir bezeichnen sie mit $h_\varrho(E)$. Im Falle $E = M$, schreiben wir einfach h_ϱ.

Es ist bekannt, daß im n-dimensionalen Euklidischen Raum die Hausdorffsche Dimension jeder offenen Menge gleich n und das n-dimensionale Hausdorffsche Maß dem Lebesgueschen Maße proportional ist[2]).

[2]) Wir benutzen hier nur eine schwächere Eigenschaft, nämlich: Das n-dimensionale Hausdorffsche und das Lebesguesche Maß sind *äquivalent*, d. h. das eine ist dann und nur dann gleich 0 oder ∞, wenn das andere gleich 0 bzw. ∞ ist. Siehe [6], S. 54.

Weiter werden wir es in einem gegebenen Raume mit zwei topologisch äquivalenten Metriken $\varrho(x, y)$ und $r(x, y)$ zu tun haben. Die Hausdorffschen Maße, deren Approximationen, die Hausdorffschen Dimensionen und die Durchmesser der Mengen werden wir für die Metrik $\varrho(x, y)$ mit Λ_w, $\Lambda_w^{(\varepsilon)}$, h_ϱ, δ und mit L_w, $L_w^{(\varepsilon)}$, h_r, d für die Metrik $r(x, y)$ bezeichnen.

Hilfssatz 1. *Gilt für hinreichend kleine $r(x, y)$ die Ungleichung*

$$\varrho(x, y) \geqslant A[r(x, y)]^\alpha, \quad A, \alpha > 0, \tag{1.1}$$

so ist auch für jede Menge $E \subset M$

$$\Lambda_{w/\alpha}(E) \geqslant A^{w/\alpha} L_w(E); \tag{1.2}$$

gilt die Ungleichung

$$\varrho(x, y) \leqslant B[r(x, y)]^\beta, \quad \beta > 0, \tag{1.3}$$

so ist

$$\Lambda_{w/\beta}(E) \leqslant B^{w/\beta} L_w(E). \tag{1.4}$$

Beweis. Aus (1.1) folgt eine ähnliche Ungleichung für die Durchmesser der Mengen $Z \subset M$ mit hinreichend kleinem $d(Z)$:

$$\delta(Z) \geqslant A[d(Z)]^\alpha. \tag{1.5}$$

Für jede Zerlegung der Menge E in abzählbar viele Mengen E_i von hinreichend kleinem Durchmesser $d(E_i)$ gilt dann

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\delta(E_i)]^{w/\alpha} \geqslant A^{w/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} [d(E)]^w. \tag{1.6}$$

Aus (1.5) folgt auch, daß, falls $\delta(E_i) < \varepsilon$, $d(E_i) < (\varepsilon/A)^{1/\alpha}$ ist. Daraus und aus (1.6) leiten wir die Ungleichung

$$\Lambda_{w/\alpha}^{(\varepsilon)}(E) \geqslant A^{w/\alpha} L_w^{([\varepsilon/A])^{1/\alpha}}(E)$$

ab. Nach dem Grenzübergang für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir daraus (1.2), da $\lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon/A)^{1/\alpha} = 0$ ist.

Der Beweis der Folgerung (1.8) → (1.4) verläuft ganz ähnlich.

Einen Sonderfall dieses Hilfssatzes bildet der

Hilfssatz 2. *Gelten für hinreichend kleine $r(x, y)$ die Ungleichungen*

$$A[r(x, y)]^\alpha \leqslant \varrho(x, y) \leqslant B[r(x, y)]^\alpha, \quad A, B, \alpha > 0, \tag{1.7}$$

so gilt für jede Menge $E \subset M$

$$A^{w/\alpha} L_w(E) \leqslant \Lambda_{w/\alpha}(E) \leqslant B^{w/\alpha} L_w(E), \tag{1.8}$$

und folglich sind die Maße $L_w(E)$ und $\Lambda_{w/\alpha}(E)$ äquivalent.

Hilfssatz 3. *Gilt für hinreichend kleine* $r(x,y)$ *die Ungleichung* (1.1), *so ist*

$$h_\varrho(E) \geqslant \frac{h_r(E)}{\alpha}; \tag{1.9}$$

gilt (1.3), *so ist*

$$h_\varrho(E) \leqslant \frac{h_r(E)}{\beta}. \tag{1.10}$$

Beweis. Wir werden nur die Folgerung $(1.1)\to(1.9)$ beweisen. Der Beweis der anderen $(1.3)\to(1.10)$ ist ähnlich.

Nach dem Hilfssatze 1 folgt aus (1.1)

$$\Lambda_{w/\alpha}(E) \geqslant A^{w/\alpha} L_w(E).$$

Für jede reelle Zahl $\eta>0$ ist weiter $L_{h_r(E)-\eta}(E)=\infty$, also auch $\Lambda_{\frac{h_r(E)-\eta}{\alpha}}(E)=\infty$ und deswegen ist

$$h_\varrho(E) \geqslant \frac{h_r(E)-\eta}{\alpha}.$$

Nach dem Grenzübergang für $\eta\to 0$ erhält man (1.9).

Hilfssatz 4. *Existiert zu jeder hinreichend kleinen reellen Zahl* $\varepsilon>0$ *eine Zahl* $\eta>0$ *derart, daß für* $r(x,y)<\eta$ *die Ungleichung*

$$\varrho(x,y) \geqslant A[r(x,y)]^{\alpha+\varepsilon}, \quad A,\alpha>0, \tag{1.11}$$

gilt, so ist für die Hausdorffsche Dimension die Ungleichung (1.9) *erfüllt.*

Ist (1.11) *durch* $\alpha=0$ *und* $h_r(E)>0$ *erfüllt, so ist* $h_\varrho(E)=\infty$.

Gilt die Ungleichung

$$\varrho(x,y) \leqslant B[r(x,y)]^{\beta-\varepsilon}, \quad \beta-\varepsilon>0, \tag{1.12}$$

so ist (1.10) *erfüllt.*

Beweis. Wir beweisen wieder nur die Folgerungen $(1.11)\to(1.9)$ und $\alpha=0\to h_\varrho(E)=\infty$. Der Beweis der Folgerung $(1.12)\to(1.10)$ ist volständig analog.

Aus (1.11) folgt nach Hilfssatz 2

$$h_\varrho(E) \geqslant \frac{h_r(E)}{\alpha+\varepsilon}, \quad \alpha\geqslant 0,$$

und daraus erhalten wir beim Grenzübergang $\varepsilon\to 0$ die Ungleichung (1.9) oder, wenn $\alpha=0$ und $h_r(E)>0$ ist, die Gleichung $h_\varrho(E)=\infty$.

2. Es sei ein n-dimensionaler Riemannscher Raum M gegeben. In einer Umgebung eines fixierten Punktes $p_0\in M$ kann man ein in p_0 geodätisches Koordinatensystem einführen, in welchem der Punkt p_0 die Koordinaten $x^i=0$ hat und $g_{ij}(p_0)=\delta_{ij}$, $\partial g_{ij}(p_0)/\partial x^k=0$ ist. In diesem Koordinatensystem haben wir also

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij}+l_{ij}(x), \tag{2.1}$$

wo

$$\lim_{(x^1)^2+\ldots+(x^n)^2\to 0} \frac{l_{ij}}{\sqrt{(x^1)^2+\ldots+(x^n)^2}} = 0.$$

Zu einer gegebenen reellen Zahl ε $(0<\varepsilon<1)$ kann man eine Umgebung V von p_0 derart wählen, daß in ihr

$$|l_{ij}(x)| < \frac{\varepsilon}{n^2} \tag{2.2}$$

ist. Durch eine Beschränkung der Umgebung V auf eine kleinere Umgebung U können wir erreichen, daß für je zwei Punkte x_1, x_2 aus U die sie verbindende geodätische Linie, wie auch die Linie $x^i=x_1^i t+x_2^i(1-t)$, $(0\leqslant t\leqslant 1)$, in V liegen.

In V betrachten wir die Riemannsche Metrik $\varrho(x_1,x_2)$, die dem Infimum der Längen $\int\sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}$ aller Bögen der Klasse C^1, die die beiden Punkte verbinden, gleich ist, und die Euklidische Metrik

$$r(x_1,x_2) = \sqrt{(x_1^1-x_2^1)^2+\ldots+(x_1^n-x_2^n)^2} = \sqrt{\delta_{ij}(x_1^i-x_2^i)(x_1^j-x_2^j)}.$$

Wenn die Punkte x_1 und x_2 zu der Umgebung U gehören, kann man sich bei $\varrho(x_1,x_2)$ nur auf die in V liegenden Bögen beschränken.

Hilfssatz 5. *In der Umgebung* U *gelten die Ungleichungen*

$$(1-\varepsilon)r(x_1,x_2) \leqslant \varrho(x_1,x_2) \leqslant (1+\varepsilon)r(x_1,x_2). \tag{2.3}$$

Beweis. Es sei C ein Kurvenbogen in V, der zwei Punkte aus U verbindet. Seine Gleichung sei $x=x(s)$, wo der Parameter s die r-*Bogenlänge* (d. h. die Bogenlänge in Bezug auf die Metrik $r(x,y)$) bedeutet. Deswegen gilt

$$\delta_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=1 \quad\text{und}\quad \left|\frac{dx^i}{ds}\right|\leqslant 1. \tag{2.4}$$

Die r-Länge des ganzen Bogens C bezeichnen wir mit l. Dann gilt für die ϱ-Länge λ des Bogens die Formel

$$\lambda = \int_0^l \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\cdot\frac{dx^j}{ds}}\,ds = \int_0^l \sqrt{(\delta_{ij}+l_{ij})\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}}\,ds$$
$$= \int_0^l \sqrt{1+l_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}}\,ds.$$

Jetzt schätzen wir die Differenz $|\lambda - l|$ ab. Es ist

$$|\lambda - l| = \left|\int_0^l \left(\sqrt{1 + l_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}} - 1\right) ds\right| = \left|\int_0^l \frac{l_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}}{\sqrt{1 + l_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}} + 1} ds\right|$$

$$\leqslant \int_0^l \frac{|l_{ij}|\left|\frac{dx^i}{ds}\right|\left|\frac{dx^j}{ds}\right|}{\sqrt{1 + l_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}} + 1} ds.$$

Da der Nenner des Integrandes größer als 1 ist, haben wir unter Berücksichtigung von (2.2) und (2.4)

$$|\lambda - l| < n^2 \frac{\varepsilon}{n^2} l = \varepsilon l,$$

d. h.

$$(1-\varepsilon) l < \lambda < (1+\varepsilon) l,$$

woraus leicht die Ungleichung (2.3) folgt.

HILFSSATZ 6. *Das n-dimensionale Hausdorffsche Maß im n-dimensionalen Riemannschen Raume ist für offene Mengen positiv und für kompakte endlich.*

Beweis. Für Mengen, die in U enthalten sind, sind die Maße Λ_n und L_n zufolge von (2.3) und des Hilfssatzes 2 äquivalent, und es ist

$$(1-\varepsilon)^n L_n(E) \leqslant \Lambda_n(E) \leqslant (1+\varepsilon)^n L_n(E), \tag{2.5}$$

das Maß L_n ist aber dem Lebesgueschen Maße äquivalent und deswegen sind die beiden Maße Λ_n und L_n positiv für offene und endlich für kompakte Mengen. Da abzählbar viele Umgebungen vom Typus der Umgebung U den ganzen Raum M bedecken und da Λ_n σ-additiv ist, gilt dasselbe für beliebige offene oder kompakte Mengen, ohne Beschränkung.

Aus diesem Hilfssatz und aus der Einzigkeit (bis auf einen konstanten Faktor) des linksinvarianten Haarschen Maßes folgt unmittelbar der

SATZ 1. *Ist $r(x, y)$ eine Riemannsche linksinvariante Metrik in der Einheitskomponente einer n-gliedrigen Lieschen Gruppe G, so ist das n-dimensionale Hausdorffsche Maß L_n ein linksinvariantes Haarsches Maß in G.*

Wendet man diesen Satz auf die n-dimensionale Vektorengruppe an, so erhält man das bekannte Ergebnis, daß L_n und das Lebesguesche Maß

proportional zueinander sind (das Lebesguesche Maß ist ja ein Haarsches Maß in der Vektorengruppe). Daraus und aus (2.4) folgt nach einer Abschätzung des Inhaltselements in der Umgebung U leicht die

FOLGERUNG. *Das n-dimensionale Hausdorffsche Maß und der klassische Inhalt in einem n-dimensionalen Riemannschen Raume sind zueinander proportional.*

3. Betrachten wir jetzt in einer n-gliedrigen Lieschen Gruppe G eine beliebige, mit der Topologie in G übereinstimmende, linksinvariante Metrik $\varrho(x, y)$, sowie eine Riemannsche Metrik $r(x, y)$ in der Einheitskomponente von G. Führen wir die Bezeichnungen

$$\varrho(e, x) = N(x), \qquad r(e, x) = |x| \tag{3.1}$$

ein. Dann ist $\varrho(x, y) = N(x^{-1}y)$, $r(x, y) = |x^{-1}y|$.

Die Funktionen $N(x)$ und $|x|$ sind in G stetig und erfüllen die folgenden Bedingungen ([2], S. 5):

(A) $N(x) \geqslant 0$ und $N(x) = 0$ dann und nur dann, wenn $x = e$ ist;

(B) $N(xy) \leqslant N(x) + N(y)$;

(C) $N(x^{-1}) = N(x)$.

Dasselbe gilt für $|x|$.

In einer hinreichend kleinen Umgebung V des Einheitselements e der Gruppe G liegt jedes Element x in einer lokalen einparametrigen Untergruppe und diese Untergruppen sind geodätische Linien für die Riemannsche linksinvariante Metrik $r(x, y)$ ([1], S. 14 u. f.). Deswegen haben wir für alle $x \in U$, wobei U eine Umgebung von e ist, für welche $U^2 \subset V$ gilt,

$$|x^2| = \varrho(e, x^2) = \varrho(e, x) + \varrho(x, x^2) = 2\varrho(e, x) = 2|x|, \tag{3.2}$$

liegen doch die Elemente e, x, x^2 in derselben Untergruppe. Aus (B) folgt $N(x^2) \leqslant 2N(x)$ für alle x. In U haben wir also

$$|x^2| = 2|x|, \qquad N(x^2) \leqslant 2N(x). \tag{3.3}$$

HILFSSATZ 7. *In jeder Umgebung V des Einheitselements e der Lieschen Gruppe G gibt es Elemente x, für welche $N(x^2)/N(x) > 1$ ist.*

Beweis. Wäre in einer Umgebung V_0 immer $N(x^2) \leqslant N(x)$, so könnte man eine solche Zahl $\eta_0 > 0$ finden, daß für jedes positive $\eta < \eta_0$ die Umgebung $U_\eta = \underset{x}{E}\{N(x) < \eta\}$ in V_0 enthalten wäre. Wir nehmen jetzt eine lokale einparametrige Untergruppe $x(t)$ $(-a < t < a,\ a > 0)$, die in U_η enthalten ist, und wollen sie auf bekannte Weise auf alle t ausbreiten. Da für $t \in (-a, a)$, $x(t) \in U_\eta$ und folglich $N(x(t)) < \eta$ ist, hätten wir nach unserer Voraussetzung $N(x(2t)) = N\left((x(t))^2\right) \leqslant N(x(t)) < \eta$, und das heißt, daß auch für alle $t\epsilon(-2a, 2a)$, $x(t)\epsilon U_\eta$ ist. Die Wiederholung dieses Verfahrens führt zum Schluß, daß die ganze Ausbreitung von $x(t)$ in U_η und folglich auch ihre abgeschlossene Hülle, die eine topologische Untergruppe von G ist, in $\overline{U}_\eta$ enthalten ist. Es wäre dann in jeder Umgebung des Einheitselements eine nichttriviale Untergruppe von G enthalten, was bekanntlich für Liesche Gruppen unmöglich ist.

Aus dem Hilfssatz folgt unmittelbar, daß

$$\limsup_{x\to e} \frac{N(x^2)}{N(x)} \geqslant 1$$

ist.

Wir führen noch die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\limsup_{x\to e} \frac{N(x^2)}{N(x)} = 2^\alpha, \qquad \liminf_{x\to e} \frac{N(x^2)}{N(x)} = 2^\beta. \tag{3.4}$$

Es ist immer $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Hilfssatz 8. *Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine solche Umgebung V des Einheitselements e und derartige positive Zahlen A und B, daß in V_1*

$$A|x|^{\alpha+\varepsilon} \leqslant N(x) \leqslant B|x|^{\beta-\varepsilon} \tag{3.5}$$

gilt.

Beweis. Wir nehmen eine hinreichend kleine Umgebung U von e, für welche die Ungleichheiten

$$2^{\beta-\varepsilon} N(x) < N(x^2) < 2^{\alpha+\varepsilon} N(x) \tag{3.6}$$

und auch (3.3) gelten, was nach der Definition der oberen und unteren Grenzen immer möglich ist.

Wir wählen jetzt eine Zahl $\eta > 0$ derart, daß alle Gruppenelemente x, für welche $|x| \leqslant \eta$, zu U gehören. Es sei jetzt

$$V_n = \underset{x}{E}\left\{|x| < \frac{\eta}{2^n}\right\} \quad \text{und} \quad Z_n = \overline{V}_n \setminus V_{n+1}. \tag{3.7}$$

Es ist leicht einzusehen, daß alle $\overline{V}_n \subset U$, daß

$$\overline{V}_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i \cup (e)$$

ist, und daß die Mengen Z_n kompakt sind.

Aus der Kompaktheit der Menge Z_1 folgt, daß die Funktionen $N(x)/|x|^{\alpha+\varepsilon}$ und $N(x)/|x|^{\beta-\varepsilon}$ ihre Suprema und Infima, die wegen der Bedingung (A) positiv sind, in Z_1 erreichen. Es sei

$$A = \inf_{x\epsilon Z_1} \frac{N(x)}{|x|^{\alpha+\varepsilon}} \quad \text{und} \quad B = \sup_{x\epsilon Z_1} \frac{N(x)}{|x|^{\beta-\varepsilon}}.$$

Es gelten dann in Z_1 die Ungleichheiten (3.5). Wir werden mittels der Induktion beweisen, daß (3.5) in allen Z_h und folglich im ganzen V_1 gilt.

Setzen wir in Z_m die Richtigkeit von (3.5) voraus. Für jedes $x\epsilon Z_{m+1}$ ist nach (3.7) und (3.3) $x^2 \epsilon Z_m$. Nach (3.6) haben wir

$$\frac{N(x^2)}{2^{\alpha+\varepsilon}} < N(x) < \frac{N(x^2)}{2^{\beta-\varepsilon}}.$$

Nach der Induktionsvoraussetzung ist für $x\epsilon Z_{n+1}$

$$2^{\alpha+\varepsilon}A|x|^{\alpha+\varepsilon} = A|x^2|^{\alpha+\varepsilon} \leqslant N(x^2) \leqslant B|x^2|^{\beta-\varepsilon} = 2^{\beta-\varepsilon}B|x|^{\beta-\varepsilon}$$

erfüllt, wobei zugleich (3.3) berücksichtigt wurde. Setzen wir die obigen Ungleichungen zusammen, so erhalten wir die Richtigkeit von (3.5) in Z_{m+1}, w. z. b. w.

Aus dem Hilfssatz 8, dem Hilfssatz 3, und dem Satz 1 folgt der

Satz 2. *Für die Hausdorffsche Dimension jeder offenen Menge in einer n-gliedrigen Lieschen Gruppe G mit der linksinvarianten Metrik $\varrho(x, y)$ gilt die Ungleichung*

$$h_\varrho \geqslant \frac{n}{\alpha} = \frac{n}{\log_2 \limsup_{x\to e} \frac{N(x^2)}{N(x)}}, \tag{3.9}$$

die im Falle von $\alpha = 0$, d. h.

$$\limsup_{x\to e} \frac{N(x^2)}{N(x)} = 1,$$

als $h_\varrho = \infty$ zu verstehen ist.

Ist dabei $\beta > 0$, d. h.

$$\liminf_{x\to e} \frac{N(x^2)}{N(x)} > 1,$$

so gilt auch

$$h_\varrho \leqslant \frac{n}{\beta} = \frac{n}{\log_2 \left(\liminf_{x\to e} \frac{N(x^2)}{N(x)}\right)}. \tag{3.10}$$

Wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to e} \frac{N(x^2)}{N(x)} = 2^\alpha$$

existiert und $\alpha > 0$ ist, so ist die Hausdorffsche Dimension gleich n/α. Das n/α-dimensionale Hausdorffsche Maß braucht aber kein Haarsches Maß zu sein, was man am folgenden Beispiel sehen kann[3]).

[3]) Dieses Beispiel verdanke ich Herrn K. Urbanik.

Als Gruppe betrachten wir die additive Gruppe R der reellen Zahlen (für diese Gruppe wenden wir die additive Schreibweise, d. h. $x+y$ für xy, $2x$ für x^2, 0 für e, an). Die invariante Metrik in R sei

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} -|x-y|\log|x-y| & \text{für} \quad |x-y| < 1/e, \\ 1/e & \text{für} \quad |x-y| \geqslant 1/e, \end{cases}$$

wo e die Nepersche Zahl und $|x|$ den absoluten Betrag von x bedeuten. Es ist leicht einzusehen, daß für diese Metrik

$$\lim_{x\to e} \frac{N(2x)}{N(x)} = 2,$$

folglich $\alpha = 1$ und $h_\varrho = 1$ ist. Das 1-dimensionale Hausdorffsche Maß ist aber bei dieser Metrik für jedes Intervall unendlich und kann daher kein Haarsches Maß sein.

Es gilt dagegen der

SATZ 3. *Existiert eine solche Umgebung V des Einheitselements e einer n-gliedrigen Lieschen Gruppe, daß, für jedes $x \epsilon V$, $N(x^2)/N(x) = M = 2^\alpha$ gilt, so ist $M > 1$ (also $\alpha > 0$) und das n/α-dimensionale Hausdorffsche Maß ist ein Haarsches Maß.*

Beweis. $M > 1$ folgt unmittelbar aus dem Hilfssatz 7. Das weitere folgt aus Hilfssatz 2, Satz 1 und der Einzigkeit des Haarschen Maßes, da in diesem Fall statt (3.5) die Ungleichungen

$$A|x|^\alpha \leqslant N(x) \leqslant B|x|^\alpha$$

richtig sind, was man ganz ähnlich wie (3.5) in Hilfssatz 8 beweisen kann.

Als Beispiel einer Metrik, die den Voraussetzungen des Satzes 3 genügt, kann die Minkowskische Metrik in der n-dimensionalen Vektorengruppe dienen. Für sie ist immer $N(2x)/N(x) = 2$, wie bei der Euklidischen Metrik.

ZITIERTE WERKE

[1] E. Cartan, *La géométrie des groupes de transformations*, Journal de mathématiques pures et appliquées, Serie 9, 6 (1927), S. 1-119.

[2] М. И. Граев, *Теория топологических групп I*, Успехи Математических Наук 5,2 (1950), S. 3-56.

[3] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton 1941.

[4] L. H. Loomis, *The instrinsic measure theory of Riemannian and Euclidean metric spaces*, Annals of Mathematics 45 (1944), S. 367-374.

[5] J. C. Oxtoby, *Invariant measures in groups which are not locally compact*, Trans. Amer. Math. Soc. 60 (1946), S. 215-237.

[6] S. Saks, *Theory of the Integral*, Warszawa-Lwów 1937.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Reçu par la Rédaction le 10. 4. 1956