COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. V 1957 FASC. 1

C O M M U N I C A T I O N S

ÜBER ARITHMETISCHE FUNKTIONEN VON UNENDLICH VIELEN VARIABLEN, WELCHE AN JEDER STELLE BLOSS VON EINER ENDLICHEN ANZAHL VON VARIABLEN ABHÄNGIG SIND*

VON

L. KALMÁR (SZEGED)

Ich betrachte die stetigen Funktionen im Baireschen 0-Raum B_0, d. h. in der Menge aller unendlichen Folgen $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ mit positiven ganzen Komponenten x_n, welche auf folgende Weise topologisiert wird: Die k-Umgebung der Stelle x ist die Menge derjenigen Folgen $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, für welche $y_1 = x_1, y_2 = x_2, \ldots, y_k = x_k$ gilt. Bekanntlich ist B_0 ein topologischer, und mit der Abstandsdefinition

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{\mu_k(x_k \neq y_k)}$$

sogar ein metrischer Raum.

Ich beschränke mich auf *arithmetische* Funktionen, die in B_0 definiert sind, d. h. auf solche, deren Werte positive ganze Zahlen sind. Eine solche Funktion $y = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ist also eine Funktion von unendlich vielen positiven ganzen Variablen, die positive ganze Zahlen als Werte annimmt. Die Klasse dieser Funktionen unterscheidet sich nicht wesentlich von der Klasse der Funktionen, die B_0 in B_0 abbilden. Eine solche Funktion $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x}), \ldots)$ läßt sich ja durch eine *Folge* $f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x}), \ldots$ von in B_0 definierten arithmetischen Funktionen angeben, also auch durch *eine* arithmetische Funktion

$$f_n(\boldsymbol{x}) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = g(n, x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$$

der Stelle $(n, x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$, die ebenfalls B_0 angehört. Man sieht leicht ein, daß die Funktion f dann und nur dann stetig ist, falls dasselbe für die Funktion g gilt.

Eine in B_0 definierte arithmetische Funktion ist ersichtlich dann und nur dann überall in B_0 stetig, falls es zu jeder Stelle

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \epsilon B_0$$

* Mitgeteilt dem 8. Polnischen Mathematikerkongreß (6. IX - 12. IX. 1953) in Warschau.

eine positive ganze Zahl $k = k(\boldsymbol{a})$ gibt, derart, daß für eine beliebige Stelle $\boldsymbol{x}$ mit $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_k = a_k$ die Gleichung $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$ gültig ist, d. h. daß

$$f(a_1, a_2, \dots, a_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots)$$

nicht von den Komponenten $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$ abhängig ist. Man kann sagen, der Wert der Funktion f hänge an der Stelle $\boldsymbol{a}$ bloß von den ersten k Komponenten von $\boldsymbol{x}$ ab.

Als Beispiele für in B_0 überall stetige, oder wie ich kurz sagen werde, *finite* Funktionen kann man außer trivialen wie $x_1+x_2+x_3$, $x_1^2x_2+x_2^3x_3+x_3^4x_4$, $x_1x_2\dots x_{100}$ und allgemein $g(x_1, x_2, \dots, x_r)$, wo man die obige Zahl k, unabhängig von der Stelle $\boldsymbol{a}$, bzw. gleich 3, 4, 100 und r wählt, die Funktionen x_{x_1}, $x_1+x_2+\dots+x_{x_1+x_2}$, $x_1x_2\dots x_{x_1+x_2+\dots+x_{x_1}}$ anführen.

Abgesehen von dem topologischen Interesse, die davon herrührt, daß der Raum B_0 sozusagen die einfachste Art eines topologischen Raumes ist, sind die finiten Funktionen auch durch ihren Zusammenhang mit dem konstruktiven Funktionsbegriff interessant. Man kann ja die konstruktivistischen Forderungen, die in erster Linie von der intuitionistischen Schule gestellt worden sind, auch unabhängig von den, für die meisten Mathematiker unannehmbaren, intuitionistischen Thesen, wie Berufung auf die „Urintuition", Ablehnung jedes Nichtkonstruktiven usw., untersuchen. Eine solche Untersuchung, nämlich die des Begriffes einer konstruktiven arithmetischen Funktion von *endlich* vielen Variablen, hat bekanntlich zum Begriff der allgemein-rekursiven Funktionen geführt; eine ähnliche Untersuchung des Begriffes einer konstruktiven arithmetischen Funktion von *unendlich* vielen Variablen könnte vielleicht ebenfalls zu fruchtbaren Begriffen führen. Nun ist offenbar *notwendig* dafür, daß eine arithmetische Funktion von (abzählbar) unendlich vielen Variablen den konstruktivistischen Forderungen genügt, die Bedingung, daß sie finit sei; in der Tat, da man nicht alle Komponenten einer Stelle auf einmal angeben kann, ist es nötig, daß sich der Funktionswert bereits durch Angabe von endlich vielen Komponenten bestimmen läßt. Ich betone, daß diese Bedingung nicht hinreichend ist, wie dies durch das Beispiel der Funktion $f(\boldsymbol{x}) = g(x_1)$ mit beliebigen nicht allgemein-rekursiven g gezeigt wird. Daher macht meine Untersuchung der finiten Funktionen eine Präzisierung und Untersuchung des Begriffes einer allgemein-rekursiven Funktion von unendlich vielen Zahlvariablen, wofür mir übrigens Frl. R. Péter unlängst gewisse Ansätze mitgeteilt hat, gar nicht überflüssig.

Aus der Definition der finiten Funktionen folgert man mit Hilfe von allgemeinen Sätzen über stetige Funktionen in topologischen Räumen, oder auch unmittelbar, die folgenden Sätze:

1. *Sind $f_1, f_2, \dots, f_n$ finite Funktionen und ist g eine arithmetische Funktion von n positiv-ganzzahligen Variablen, so ist die Funktion $g(f_1, f_2, \dots, f_n)$ ebenfalls finit.*

2. *Sind $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ und g finite Funktionen, so ist auch die Funktion $g(f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$ finit.*

3. *Ist f eine finite Funktion und ist g eine Funktion, die jeder endlichen Folge von positiven ganzen Zahlen eine positive ganze Zahl als Funktionswert zuordnet, so ist die Funktion $g(x_1, x_2, \dots, x_{f(\boldsymbol{x})})$ finit.*

Aus diesen Sätzen folgt z. B. sofort, daß die Funktionen $x_1, x_{x_1}, x_{x_{x_1}}, \dots$ sowie daß auch das x_1-te Glied der Folge $x_1, x_{x_1}, x_{x_{x_1}}, \dots$, finite Funktionen von $\boldsymbol{x}$ sind.

Wir nennen die Funktion $f^{(r)}(\boldsymbol{x}) = f^{(r)}(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = f(r, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ die durch r *spezialisierte Funktion* (erster Ordnung) von f. Sie ensteht also aus der Funktion f dadurch, daß man $x_1 = r$ setzt und $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ bzw. in $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \dots$ umnennt. Die durch s spezialisierte Funktion der durch r spezialisierten Funktion von f bezeichnen wir durch $f^{(r,s)}(\boldsymbol{x})$ und nennen sie die durch r und s spezialisierte Funktion *zweiter Ordnung* von f, usw. Augenscheinlich wird die Funktion f durch die Angabe aller ihrer spezialisierten Funktionen (kurz: *Spezialisierten*) $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(r)}, \dots$ erster Ordnung eindeutig bestimmt; es ist ja

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = f^{(x_1)}(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots),$$

das heißt das x_1-te Glied der Folge $f^{(1)}(x_2, x_3, \dots, x^{n+1}, \dots)$, $f^{(2)}(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots), \dots, f^{(r)}(x_2, x_3, \dots, f_{n+1}, \dots), \dots$ Es ist auch klar, daß die Spezialisierten erster Ordnung einer (in B_0 definierten arithmetischen) Funktion beliebig angegeben werden können.

Mit Hilfe der Sätze 1-3, oder auch unmittelbar, beweist man leicht, daß *eine in B_0 definierte arithmetische Funktion dann und nur dann finit ist, wenn ihre Spezialisierten erster Ordnung sämtlich finit sind.*

Nun zeige ich, daß man die finiten Funktionen, d. h. die *im Baireschen 0-Raum stetigen* arithmetischen Funktionen, einer transfiniten Klassifikation unterwerfen kann, die eine gewisse Analogie mit der Klassifikation der im *gewöhnlichen Zahlenraum R_n* Baireschen, also bis auf die 0-te Klasse *unstetigen* Funktionen zeigt. Für eine endliche Ordnungszahl k wird die k-te Klasse aus denjenigen Funktionen bestehen, die bloß von den k ersten Komponenten $x_1, x_2, \dots, x_k$ der Stelle $\boldsymbol{x}$ abhängig sind; der Klasse Nummer ω werden diejenigen Funktionen angehören, bei welchen es noch von x_1 abhängt, wieviel erste Komponenten von $\boldsymbol{x}$ anzugeben sind, um den Funktionswert zu bestimmen. Sozusagen wird durch die Klassennummer die Kompliziertheit der Abhängigkeitsart des Funktioswertes von der Stelle $\boldsymbol{x}$ gemessen.

Die genaue Definition der Klassifizierung, mit Hilfe einer transfiniten Rekursion, lautet wie folgt. *Die* 0*-te Klasse besteht aus den Konstanten, d. h. aus denjenigen Funktionen $f(x)$, die an jeder Stelle x denselben Wert annehmen. Ist α eine Ordnungszahl, für welche bereits die β-te Klasse für jedes $\beta < \alpha$ definiert ist, so besteht die α-te Klasse aus allen in B_0 definierten arithmetischen Funktionen f, die selbst keiner Klasse von Nummer β mit $\beta < \alpha$ angehören, wofür es wohl aber zu jeder positiven ganzen Zahl r eine Ordnungszahl β_r gibt derart, daß die durch r spezialisierte Funktion von f zur β_r-ten Klasse gehört.* Man sieht leicht auf Grund dieser Definition ein, da die α-te Klasse für $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \omega$ wirklich aus den oben angegebenen Funktionen besteht.

Nun kann man folgende Sätze beweisen:

4. *Die α-te Klasse besteht für jede Ordnungszahl α aus finiten Funktionen.*

Dies ist nämlich für $\alpha = 0$ klar. Gilt der Satz für alle Ordnungszahlen $\beta < \alpha$ und ist f ein Element der α-ten Klasse, so gehören sämtliche Spezialisierten erster Ordnung der Funktion f zu gewissen Klassen mit einer Nummer kleiner als α; daher sind sie und mit ihnen auch die Funktion f finit.

5. *Jede finite Funktion gehört einer (und, nach Definition der Klassifizierung, nur einer) Klasse an.*

Gehörte nämlich die finite Funktion f keiner Klasse an, so gäbe es eine positive ganze Zahl r_1 derart, daß die durch r_1 spezialisierte Funktion $f^{(r_1)}$ von f ebenfalls keiner Klasse angehören würde. Daraus folgt ebenso die Existenz einer positiven ganzen Zahl r_2 derart, daß die durch r_2 spezialisierte Funktion von $f^{(r_1)}$, d. h. die Spezialisierte zweiter Ordnung $f^{(r_1,r_2)}$ der Funktion f keiner Klasse angehört, usw. In dieser Weise erhält man eine Stelle $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots) \epsilon B_0$, so daß die Funktionen $f^{(r_1)}, f^{(r_1,r_2)}, \ldots, f^{(r_1,r_2,\ldots,r_n)}, \ldots$ keiner Klasse angehören. Dies steht aber mit dem finiten Charakter der Funktion f im Widerspruch, da die Funktion $f^{(r_1,r_2,\ldots,r_k)}$ für ein gewisses k eine Konstante ist.

Durch denselben Gedankengang zeigt man, daß *jede finite Funktion sogar einer Klasse mit einer Nummer aus der ersten oder zweiten Zahlklasse angehört.* Wäre dies nämlich für die finite Funktion f nicht der Fall, so würde das Gleiche auch für eine ihrer Spezialisierten $f^{(r)}$ erster Ordnung gelten. In der Tat, gehört die Funktion $f^{(r)}$ für $r = 1, 2, 3, \ldots$ der β_r-ten Klasse, an, wo $\beta_r < \Omega$, so gehört die Funktion f ebenfalls einer Klasse mit einer Nummer $\alpha < \Omega$ an, da die abzählbare Folge $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$, von Ordnungszahlen der ersten oder zweiten Zahlklasse eine obere Schranke kleiner als Ω besitzt. Also kann man den indirekten Beweis für Satz 5 auch für unseren Fall wiederholen. Folglich *ist die α-te Klasse für $\alpha \geqslant \Omega$ leer.* Man beweist leicht mit Hilfe des oben formulierten Korollars der Sätze 1-3, daß *für $\alpha < \Omega$ die α-te Klasse nicht leer ist.*

Ich beschließe meinen Bericht mit der Formulierung einiger Probleme über finite Funktionen. Man kann leicht die Nummern der Klassen, denen die in den Sätzen 1-3 figurierenden Funktionen $g(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $g(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$ und $g(x_1, x_2, \ldots, x_{f(x)})$ angehören, auf Grund der analogen Nummern bzw. für die Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$; $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ und g; f abschätzen. Im Falle des Satzes 1 läßt sich leicht eine genaue Abschätzung erzielen, d. h. eine solche, die sich im allgemeinen Fall nicht durch eine bessere ersetzen läßt. In Falle der Sätze 2 und 3 steht aber die Lösung der Frage nach einer genauen Abschätzung noch aus.

Man zeigt leicht, daß sich jede finite Funktion f in der Form $g(x_1, x_2, \ldots, x_{h(x)})$ mit einem finiten h darstellen läßt; dazu hat man nur h als die „Indexfunktion" von f zu wählen, d. h. als die Funktion, welche die *kleinste* unter den in der Definition der finiten Funktionen vorkommenden Zahlen k als Funktion der Stelle x angibt. Man zeigt leicht, daß die Indexfunktion einer finiten Funktion ebenfalls finit ist; ferner, daß die Indexfunktion der Indexfunktion einer finiten Funktion nie größer und wenigstens an einer Stelle kleiner als die Indexfunktion der dieser finiten Funktion selbst ist. Es ist aber ein offenes Problem, ob und wie man durch Iteration der obigen Darstellung eine *Normalform* für beliebige finite Funktionen erzielen kann.

Reçu par la Rédaction le 14. 9. 1956