L'OEUVRE SCIENTIFIQUE DE KAZIMIERZ ŻORAWSKI

PAR

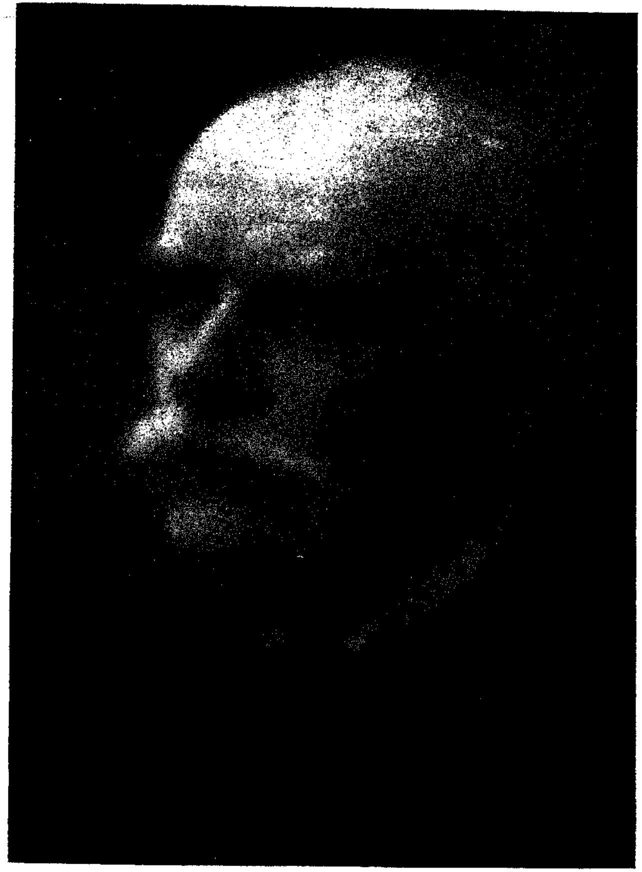
W. ŚLEBODZIŃSKI (WROCŁAW)

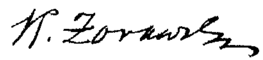
Kazimierz Żorawski est né le 22 juin 1866 à Szczuczyn, dans l'arrondissement de Ciechanów. Ses études secondaires achevées, il étudia les mathématiques, de 1884 à 1888, à l'Université, alors russe, de Varsovie. C'est là qu'il obtint sa licence des sciences mathématiques, ayant présenté une thèse d'astronomie, fondée sur ses propres observations. Dans les trois années qui suivirent, il continua ses études mathématiques en Allemagne, aux universités de Leipzig et de Goettingue. Le séjour de Leipzig allait décider de son essor scientifique et en déterminer la direction; c'est là que professait alors Sophus Lie, fondateur de la théorie des groupes continus. Le premier travail scientifique de Żorawski [1][1]) était dû à l'initiative de l'éminent Norvégien; le travail a valu au jeune savant le grade de docteur, accordé en 1891 par l'Université de Leipzig. Presque immédiatement, car en 1892, Żorawski débuta dans le haut enseignement, d'abord agrégé à l'École Polytechnique de Lwów et à partir de depuis 1895, professeur extraordinaire à l'Université Jagellone de Cracovie. Il y fut nommé en 1898 professeur ordinaire et remplit ensuite la charge de doyen de la Faculté de philosophie (1905/06) et celle de recteur (1917/18). Rentré en 1919 à Varsovie, il professa successivement à l'École Polytechnique et à l'Université, jusqu'à sa retraite en 1936. A ce moment, il fut nommé professeur honoraire de l'Université de Varsovie. La retraite n'interrompit point son activité scientifique; il s'y voua jusqu'à ses derniers jours. Il mourut le 23 janvier 1953, en laissant de nombreux manuscrits.

Ses mérites scientifiques lui ont valu l'invitation de la part de plusieurs sociétés scientifiques: il fut membre de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres à Cracovie, de la Société Royale Tchèque des Sciences et des Lettres, de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie; en 1951, il fut nommé membre honoraire de l'Académie Polonaise des Sciences.

Nous venons de dire que Żorawski eût pour maitre Sophus Lie, fondateur de la théorie des groupes continus. Rappelons que cette théorie doit son origine au problème suivant: quelles simplifications peut-on

[1]) Les nombres en crochets se rapportent à la bibliographie.





obtenir dans le procédé d'intégration des équations différentielles et de celles aux dérivées partielles, si l'on en soumet les variables à de diverses transformations, et comment peut-on classifier de telles équations, d'après divers genres de transformations? Une analyse méthodique et approfondie du problème avait amené Lie à construire la théorie des groupes continus, discipline autonome de mathématiques ayant des notions et des problèmes propres à elle. Lorsque Żorawski arriva à Leipzig, pour y suivre les cours de Lie, cette théorie représentait un champ de recherches récemment découvert: plusieurs mathématiciens éminents s'y vouaient avec grand intérêt, en poussant les recherches dans deux sens principaux. Les uns — surtout Engel, Killing, Cartan — s'occupaient de la structure des groupes finis de Lie, comme on l'appelle de nos jours, ils étudiaient donc les groupes, abstraction faite de leur réalisation, au moyen de diverses transformations; les autres, Klein, Picard, Vessiot, Tresse et Żorawski, s'intéressaient avant tout aux applications de la théorie des groupes à la géométrie et aux divers domaines de l'analyse. Pour Żorawski, le problème préféré fut celui de l'équivalence de deux êtres analytiques ou géométriques, par rapport à un groupe de transformations; en d'autres termes, le problème de construire un système complet d'invariants différentiels de tels objets. Un autre domaine de son travail créateur a été la théorie d'invariants intégraux, due à Poincaré et à Lie, constituant, elle aussi, à cette époque, un champ de recherches récemment découvert. Dans les deux branches de mathématiques, Żorawski a abouti à des résultats importants que nous allons présenter dans la suite. Il convient de remarquer que quelques-uns de ces résultats, publiés uniquement en polonais et par conséquent inconnus aux savants étrangers, ont été ensuite obtenus indépendamment par d'autres mathématiciens.

Passons à l'analyse des travaux les plus importants de Żorawski.

I. *THÉORIE DES FORMES DIFFÉRENTIELLES*

C'est de ce domaine que relève le premier ouvrage du savant, sa thèse de doctorat [1] déjà mentionnée, publiée en polonais et en allemand. L'objet en fut le problème suivant: étant donné deux surfaces d'espace ordinaire, peut-on en obtenir l'une de l'autre par la déformation, à une symétrie près? En termes plus précis: peut-on établir, entre les points des deux surfaces, une correspondance biunivoque et différentiable, telle que la métrique soit identique sur les deux surfaces? Il s'agit, bien entendu, d'une métrique induite par celle de l'espace euclidien ambiant. Une telle métrique est déterminée, sur les deux surfaces respectivement, par les formes différentielles de deuxième degré:

$$(1)\qquad ds = Edu + 2Fdudv + Gdv, \qquad ds = \bar{E}d\bar{u} + 2\bar{F}d\bar{u}d\bar{v} + \bar{G}d\bar{v}.$$

Du point de vue de l'analyse, le problème se réduit à étudier s'il existe la transformation de la forme

(2) $$\bar{u}=\varphi(u,v), \qquad \bar{v}=\psi(u,v),$$

qui traduit l'une des formes (1) en l'autre et, si tel est le cas, à déterminer cette transformation. D'habitude, le problème s'exprime plus brièvement: constater si les formes (1) sont équivalentes par rapport au groupe général de transformations de la forme (2). Le problème se réduit donc à celui de construire un système complet d'invariants différentiels de la forme ds^2 par rapport au groupe général. Nous appelons *invariant différentiel d'ordre p* chaque expression

$$\Phi\left(u,v,E,F,G,\frac{\partial E}{\partial u},\ldots\right),$$

composée des variables u,v, des coefficients E, F, G et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre p, si cette expression ne change pas de valeur pour les transformations du groupe, c'est-à-dire s'il y a l'équation

$$\Phi\left(u,v,E,F,G,\frac{\partial F}{\partial u},\ldots\right)=\Phi\left(\bar{u},\bar{v},\bar{E},\bar{F},\bar{G},\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{u}},\ldots\right),$$

où $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G},\ldots$ désignent des valeurs, établies pour la forme dérivant de ds^2 par transformation (2). Or, Żorawski a montré comment il faut déterminer les invariants en question; il a établi le nombre d'indépendants pour chaque ordre; il a aussi évalué effectivement quelques-uns de ces invariants d'ordres inférieurs. Il les a appelés *invariants de Gauss*, l'infime d'entre eux, d'ordre 2, ayant été découvert par Gauss (la courbure de Gauss). Le même travail contient aussi des considérations sur deux problèmes étroitement liés. Admettons notamment qu'à la forme ds^2 viennent s'ajouter des fonctions $f_1, f_2, \ldots$ des variables u, v, ou bien une équation de la forme $v=f(u)$; pour le système composé de la forme et des fonctions, ou pour celui qui l'est de la forme et de l'équation, il se laisse formuler des problèmes analogues au précédent. Ces problèmes ont été résolus par Żorawski qui montra comment évaluer les invariants de l'un et de l'autre système (invariants de Beltrami et de Minding).

Ce travail de Żorawski peut être, avec raison, appelé classique: telle en est la construction et la méthode; chaque considération, chaque calcul sont poussés jusqu'à ce que le problème soit entièrement épuisé. Aussi le travail a-t-il été toujours très apprécié des spécialistes; on le cite encore aujourd'hui. Sophus Lie, dans l'analyse qu'il faisait, au troisième volume de son oeuvre fondamentale[2]), de divers travaux consacrés aux groupes de transformations, a écrit à propos de cet ouvrage: „Parmi les dissertations leipzigoises, notons encore le bel ouvrage de Żorawski sur les invariants de la déformation... Très habilement, Żorawski y a effectué des calculs difficiles et compliqués, indispensables à la résolution du problème. Ce travail relevant des invariants différentiels, je ne fais ici que le mentionner, dans l'intention d'y revenir dans un livre que je me propose d'écrire sur les invariants différentiels"[3]). Dans son livre sur le développement des mathématiques au XIX[e] siècle[4]), F. Klein a remarqué avec raison en quoi consiste l'importance de la thèse de Żorawski, notamment en la démonstration qu'il n'y a pas d'autres invariants d'ordres inférieurs, outre ceux dont le sens géométrique est simple et qui avaient été connus depuis longtemps.

Aux formes différentielles de deuxième degré, Żorawski a consacré encore trois autres travaux [32, I, II] et [48], publiés dans les comptes rendus de la Société Royale Saxonne des Sciences. Dans sa thèse de doctorat, notre savant s'était servi des transformations infinitésimales de Lie: ici, dans le premier des travaux cités, il a montré comment on peut résoudre le problème des invariants de la déformation, en se servant des transformations finies. A l'occasion, il a rectifié quelques erreurs qu'avait commises le mathématicien allemand J. Knoblauch, dans un de ses travaux voués au même problème[5]). Les deux autres travaux mentionnés ont été consacrés aux problèmes généralisés: aux invariants différentiels de la forme différentielle quadratique à n variables, et à ceux d'un couple de telles formes.

II. THÉORIE DES INVARIANTS INTÉGRAUX

La notion d'invariant intégral est due à H. Poincaré, qui l'a formulée dans un de ses travaux sur la mécanique céleste. Il en diffère quelque peu la notion d'invariant intégral, relevant de celle de groupe continu, qui provient de S. Lie; notons cependant que la différence est insignifiante et que, des deux notions, l'une se laisse aisément réduire à l'autre. On sait que, de nos jours, la notion d'invariant intégral joue un rôle important dans la théorie des équations différentielles, dans celle des groupes continus, dans la topologie, dans les problèmes globaux de la géometrie différentielle, dans la mécanique enfin. Un des premiers qui ont apprécié avec justesse l'importance de la nouvelle notion, Żorawski publia, déjà

[2]) S. Lie, *Transformationsgruppen*, 3. Abschnitt, p. 810.

[3]) La maladie et la mort de Lie ont empeché la publication du livre.

[4]) F. Klein, *Die Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Teil II, p. 202.

[5]) J. Knoblauch, *Die Biegungs-Invarianten und Kovarianten von gegebener Ordnung*, Jahrbuch für reine und angewandte Mathematik 131 (1906), p. 247-267.

en 1895, dans le mémoire [12], de nouveaux et importants théorèmes sur les invariants des groupes finis et infinis, en employant cette notion dans le sens de Lie. Il y démontra notamment, et c'est un théorème fondamental, qu'un groupe de transformations à un paramètre, déterminé par le système d'équations

$$\frac{dx^h}{dt} = f^h(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

a des invariants intégraux de chaque degré; il montra encore, comment construire ces invariants. Le théorème en question, démontré pour la première fois par Żorawski, est à trouver dans le livre de Goursat [6]), au chapitre traitant des invariants intégraux.

Quelques années après, en 1902, parut le deuxième travail de Żorawski sur les invariants intégraux [26], apportant lui aussi des résultats nouveaux et importants. Pour en rappeler le théorème principal, figurons-nous une intégrale multiple d'ordre p

$$(1) \qquad \int_S \sum_{h_1, h_2 \ldots h_p = 1}^{n} A_{h_1 h_2 \ldots h_p} dx^{h_1} dx^{h_2} \ldots dx^{h_p}$$

étendue à une multiplicité S à p dimensions, dans l'espace à n dimensions. Les points de la multiplicité S, mis en mouvement stationnaire, déterminé par des équations

$$(2) \qquad \frac{dx^h}{dt} = \xi^h(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

la multiplicité passe en une autre, S_t. L'intégrale (1) constitue l'invariant pour le système (2), si la valeur de cette intégrale établie pour S_t est, pour chaque t, égale à celle pour S. Le premier problème qui se pose est comment reconnaître si l'intégrale (1) est un invariant pour les transformations (2). Le travail de Żorawski y donne la réponse, en établissant les critères différentiels que doivent remplir les coefficients A. Le travail ayant été publié uniquement en polonais, sans résumé en langue étrangère, il resta inconnu aux mathématiciens étrangers; six ans après, en 1908, les formules de Żorawski ont été découvertes de nouveau par E. Goursat. Dans un de ses travaux sur les invariants intégraux, Lie a cité le travail de Żorawski, en ajoutant: Sans doute, c'est un travail de valeur sur les invariants intégraux. Malheureusement, je n'en ai pu lire que les formules, sans le texte qui est en polonais". De la Vallée Poussin ayant remarqué, dans son analyse des travaux de De Donder, que celui de Żorawski est difficile à aborder à cause de sa langue, notre savant en

[6]) E. Goursat, *Leçons sur le problème de Pfaff*, Paris 1922, p. 212.

publia en 1913 un résumé allemand [43]. Mais cette publication tardive n'a pas pu sauver la priorité des résultats: dans le livre de Goursat que nous venons de citer, les formules en question sont données sans que les résultats de Żorawski soient mentionnés.

Outre le résultat principal, le travail en question contient d'intéressantes généralisations des théorèmes cinématiques sur les lignes et les intensités des tourbillons; ces théorèmes se trouvent dans un autre travail [22], auquel nous reviendrons encore. Quelques résultats de l'ouvrage [26] allaient être découverts indépendemment de nouveau, mais dans un degré moins général, par le mathématicien belge Th. De Donder.

En 1909 parut le troisième travail [38] de Żorawski sur les invariants intégraux. Il contient diverses généralisations des résultats du travail précédent, ainsi que des applications à la théorie du multiplicateur des systèmes complets d'équations linéaires à dérivées partielles du premier ordre.

III. THÉORIE DES MOUVEMENTS DES MILIEUX CONTINUS ET DES CORPS RIGIDES

Pour Żorawski, ce domaine de mathématiques a été, de 1900 à 1926, le principal objet d'intérêt et de recherches scientifiques. Il a publié, dans cette prériode, plus d'une dizaine de travaux portant sur divers problèmes de cinématique: [22], [24], [39]-[42], [46], [47], [52], [53], [56], [60] et [64].

Le premier de ces travaux a pour l'objet les propriétés des lignes des tourbillons du mouvement d'un liquide parfait et incompressible, ce mouvement étant déterminé par des équations de la forme

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t), \qquad \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t), \qquad \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t).$$

Les lignes des tourbillons du mouvement (1) sont déterminées par des équations

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta},$$

où

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

et la tension — par la valeur de l'intégrale

$$\iint \xi \, dy \, dz + \eta \, dz \, dx + \zeta \, dx \, dy.$$

Nous devons à Helmholtz deux théorèmes fondamentaux sur les propriétés des tourbillons, à savoir: 1° que les lignes des tourbillons se composent constamment des mêmes particules de la matière et 2° que la tension des lignes des tourbillons est constante dans le temps et dans l'espace, quel que soit le mouvement. Ces théorèmes classiques ont suggéré à Kelvin l'idée de concevoir les atomes comme tourbillons d'un liquide parfait.

Helmholtz avait démontré ses théorèmes à l'aide de quelques hypothèses dynamiques sur les forces extérieures agissant sur le milieu continu. Ces théorèmes ayant un caractère cinématique, il se pose tout naturellement le problème suivant: quelles propriétés doit avoir le mouvement (1) pour que le premier ou le second des théorèmes de Helmholtz soit vrai, indépendamment de toutes hypothèses dynamiques, et quelle est la relation entre ces deux théorèmes? Żorawski fut le premier à formuler ce problème, dans une forme aussi générale; encore y donna-t-il la réponse. Dernièrement, deux mathématiciens américains viennent d'écrire un article sur les théorèmes de Żorawski et d'en donner, entre autres, de nouvelles démonstrations plus simples [7]). En 1902, dans la partie II de son travail [26] déjà mentionné, Żorawski a généralisé ses théorèmes sur les lignes des tourbillons, au cas de l'espace à n dimensions.

L'objet des trois travaux suivants qui concernent la cinématique, [39], [40], et [41], est un problème d'équivalence de deux mouvements du liquide, dans l'espace euclidien à n dimensions. Imaginons-nous deux tels mouvements, déterminés respectivement par les systèmes d'équations différentielles

$$(2)\qquad \frac{dx^h}{dt}=u^h(x^1,x^2,\ldots,x^n,t)\qquad (h=1,2,\ldots,n)$$

et

$$(2')\qquad \frac{d\bar{x}^h}{dt}=\bar{u}^h(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\ldots,\bar{x}^n,t)\qquad (h=1,2,\ldots,n).$$

Peut-on transformer l'un de ces mouvements en l'autre, par une transformation définie au moyen des formules

$$(3)\qquad x^i=\sum_{j=1}^{n}A_j^i(t)\bar{x}^j+A^j(t)$$

dont les coefficients sont des fonctions du temps t, remplissant les conditions d'orthogonalité et au déterminant $|A_j^i(t)|=+1$? Les équations (3) représentent un mouvement continu du corps rigide, dans l'espace aux coordonnées x^i; le problème peut être donc énoncé en termes suivants: est-il possible de trouver un tel mouvement du corps rigide pour que, pour l'observateur qui y est lié, le mouvement (2′) soit le même qu'est le mouvement (2) pour l'observateur immobile? Ceci se laisse réduire, à son tour, au problème analytique suivant: construire un système complet d'invariants différentiels du système (2), par rapport au groupe infini de transformations (3) qui dépendent de $n(n+1)/2$ fonctions arbitraires de la variable t. Or, l'auteur a construit un système fondamental d'invariants différentiels, ainsi que des opérateurs différentiels, permettant d'évaluer ensuite des invariants d'ordres supérieurs. Encore a-t-il déduit, dans le dernier travail, un système de relations différentielles entre les invariants fondamentaux. Ces relations caractérisent entièrement le mouvement et s'appellent ses *équations naturelles*. Il en résulte le théorème suivant: *pour que les deux mouvements* (2) *et* (2′) *soient équivalents, il est nécessaire et suffisant que leurs équations naturelles soient identiques*. Le terme „équations naturelles" se justifie par une analogie très étroite qui existe entre ces équations et les équations naturelles des courbes et des surfaces de l'espace euclidien. Par l'application de la théorie générale, le problème suivant fut résolu en même temps: quelles propriétés doit avoir le mouvement (2), pour qu'il se présente comme stationnaire à l'observateur qui est lié à un corps rigide convenablement choisi, c'est-à-dire pour que les fonctions $\bar{u}^h$ dans les formules (2′) soient indépendantes du temps?

Dans ces trois travaux, de même que dans les autres qui traitent de la cinématique, il y a à la base du raisonement la dilatation de l'élément linéaire ds de l'espace euclidien, c'est-à-dire le rapport entre l'accroissement de cet élément, dû au mouvement (2), et sa longueur originale. La dilatation s'exprime par la formule

$$\alpha=\frac{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,dx^i\,dx^j}{ds^2}\qquad \text{où}\qquad a_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}+\frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right).$$

Il résulte immédiatement de la définition de la grandeur α que la forme différentielle quadratique, au numérateur, est liée invariablement au mouvement du milieu continu. Ainsi, les considérations sur un tel mouvement se lient à la théorie des formes différentielles quadratiques et de leurs familles. En effet, les travaux concernant cette théorie, que nous avons cités à la section I, devaient leur origine à ce que la recherche sur le mouvement du milieu continu avait nécessité un appareil auxiliaire.

Le travail [46], de 1914, apporte la résolution d'un problème plus général: l'auteur y admet, dans l'espace de Riemann, une déformation finie ou une famille de déformations continue à un paramètre. De plus,

[7]) C. A. Truesdell and R. C. Prim, *Żorawski's kinematic theorems*, Naval Ordonance Laboratory Memorandum 9354, 1947; les mêmes, *A derivation of Żorawski's criterion for permanent lines*, Proc. Am. Math. Soc. 1 (1950), p. 32-34.

il résout le problème de l'équivalence de deux objets dont chacun se compose de la forme différentielle quadratique et des équations de déformation.

Parmi les autres travaux de Żorawski, qui concernent les mouvements et la déformation du milieu continu, celui indiqué comme [43] est d'une importance particulière. Il y fut résolu, dans sa pleine généralité, le problème suivant: soit

$$ds^2 = \sum_{hi=1}^{n} a_{hi}(x)\, dx^h\, dx^i$$

un élément linéaire, de l'espace euclidien rapporté aux coordonnées curvilignes x^h; en soumettant l'espace à la déformation que déterminent les formules $\bar{x}^i = x^i + \varphi^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ nous parvenons, pour l'élément déformé, à la formule

$$ds^2 = \sum_{hi=1}^{n} a_{hi}(\bar{x})\, d\bar{x}^h\, dx^i = \sum_{hi=1}^{n} [a_{hi}(x) + 2b_{hi}(x)]\, dx^h\, dx^i$$

dont les coefficients b_{hi} s'appellent *composantes* de la déformation. Supposons ensuite qu'il soit donné un système de fonctions $b_{hi}(x)$; quelles conditions doivent-elles remplir pour qu'il existe une déformation aux composantes $b_{hi}(x)$, et comment déterminer cette déformation? Żorawski répond à ces deux questions qui, pour le cas de l'espace à trois dimensions et de coordonnées rectangulaires, avaient été l'objet de nombreux travaux de Beltrami, de Kirchhoff, de Barré de Saint Venant et d'autres.

Les problèmes que Żorawski a cherché à résoudre dans ses travaux de cinématique appartiennent au domaine ouvert à la recherche par les travaux de Lie. Il convient cependant de remarquer expressément que le choix des problèmes, ainsi que celui des méthodes convenables à leur solution, ont été des contributions propres et originales de Żorawski. Avec habilité, il s'acquittait de calculs longs et compliqués qui, à cette époque, étaient indispensables, un instrument plus parfait — la théorie des formes extérieures de E. Cartan — n'étant alors qu'en germe.

IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

C'est encore dans ce domaine que Żorawski a laissé plusieurs travaux; nous en relevons deux qui sont les plus importants, [14] et [54]. Le premier a pour objet l'intégration d'une classe spéciale d'équations différentielles du troisième ordre. Supposons que l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right)$$

puisse être réduite à la forme

$$(2) \qquad \frac{d^3 v}{du^3} = 0,$$

lorsqu'on se sert de la transformation des variables selon les formules

$$(3) \qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v)$$

et que celles-ci nous soient connues. L'intégrale générale de l'équation (3) étant donnée immédiatement, nous connaissons par conséquent l'intégrale de l'équation (1). Cette simple remarque donne naissance au problème suivant: trouver les critères permettant de discerner si l'équation (1) se laisse transformer en (2) et, dans le cas où les conditions respectives sont remplies, donner la construction des équations (3). Or, Żorawski a résolu ce problème complètement, en se servant des invariants différentiels du groupe de transformations qui laissent invariante l'équation (2); il à trouvé notamment la forme générale de l'équation qui se laisse transformer en (2) et a exposé la méthode de déterminer la transformation (3). Il s'est montré que ce dernier problème, donc aussi l'intégration de l'équation de cette catégorie, se ramène à l'intégration de l'équation de Ricatti et à quelques quadratures. Remarquons que c'est d'un problème pareil, au cas de l'équation du deuxième ordre, que s'étaient occupés S. Lie et A. Tresse; toutefois, il faut remarquer que le passage du deuxième ordre au troisième ne fut point, dans ce cas une extension banale; les résultats ne montrent pas non plus une analogie évidente. Ajoutons que, dans l'aspect algorithmique, notre savant a poussé le problème plus loin que ne l'avaient fait les deux mathématiciens.

Passons aux travaux [54] et [49], qui sont d'une importance beaucoup plus grande. Le premier s'occupe de deux problèmes: construire les invariants différentiels du système d'équations

$$(4) \qquad \frac{d^2 x^i}{dt^2} = f^i\left(t, x^1, x^2, \ldots, x^n, \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt}\right)$$

par rapport au groupe général de transformations ponctuelles $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et appliquer ces invariants à un problème d'équivalence correspondant; Żorawski a résolu ces deux problèmes dans le cas général.

Le travail en question a beaucoup de commun avec quelques branches de géométrie différentielle, qui furent inaugurées et développées quelques ans après la publication du travail. Car il est évident que le système (4) contient, comme cas spécial, celui d'équations des géodésiques d'un espace à connexion affine; pour obtenir ce cas, il faut admettre que les fonctions f^i, dans les équations (4), sont des polynômes du deuxième degré, par rapport aux dérivées dx^h/dt, à coefficients indépendants de t. Ainsi la théorie de Żorawski, ayant rapport aux équations (4), contient implicitement celle qui, sous le nom de *Geometry of paths*, est cultivée par l'École de Princeton; elle la contient, évidemment, dans une version purement analytique, sans interprétation géométrique. Il n'est pas étonnant non plus de constater qu'il y a, dans les recherches de Żorawski, les grandeurs qu'il désigne par les symboles $A_{\lambda\mu\nu}$ et qui sont une généralisation des coefficients du transport parallèle dans l'espace à connexion affine; encore y trouvons-nous un opérateur, généralisation de la dérivée covariante, et une grandeur analogue au tenseur de courbure. On peut donc conclure que le travail de Żorawski contentait, comme cas spécial, la théorie de l'espace à connexion affine, que fondèrent ensuite J. A. Schouten et H. Weyl; ceci doit être entendu de la manière que Żorawski a posé le problème uniquement au point de vue de la théorie des invariants, sans donner une interprétation géométrique aux diverses grandeurs ni aux divers opérateurs. Le fait que nous venons de constater donne naissance à la question, si le travail de Żorawski ne pouvait être le fondement d'une géométrie à connexion plus générale que la connexion affine. Cette idée trouva sa réalisation dans les travaux de plusieurs mathématiciens[8]); l'éminent géomètre italien, E. Bartolotti, annonça qu'il donnerait d'autres généralisations fondées sur l'équation à dérivées partielles du deuxième degré. Malheureusement, la mort prématurée du savant italien ne lui permit pas de réaliser son dessein; il ne laissa que trois courtes notes.

V. *GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE*

C'est dans ce domaine encore que l'héritage de Żorawski comporte quelques travaux. Le plus important en est sans doute [30], exposant le système complet d'invariants différentiels d'une surface de l'espace affine à trois dimensions. La géométrie différentielle de l'espace affine trouva son développement dans la deuxième décade de notre siècle, notamment dans les travaux des géométres allemands, W. Blaschke, G. Pick, L. Berwald et autres. Pour tout ce qui concerne le rapport du travail de Żorawski à la théorie de ces auteurs, on peut répéter *mutatis mutandis* ce que nous avons dit dans la section IV sur le système d'équations (4): la théorie de Żorawski est équivalente, du point de vue de la théorie des invariants, à la théorie géométrique de la surface dans l'espace affine.

[8]) D. D. Kosambi, *Parallelism and Path-spaces*, Mathematische Zeitschrift 33 (1933),p. 608-618; E. Cartan, *Observation sur le Mémoire précédent*, ibidem, p. 619-622; W. Ślebodziński, *Sur deux connexions généralisées*, Prace matematyczno-fizyczne 43 (1936), p. 167-205. L'article de M. Kosambi a été écrit indépendamment du Mémoire de Żorawski.

Nous venons d'achever l'analyse de l'oeuvre scientifique de Żorawski, qui cependant, serait incomplète s'il y manquait la mention d'un cours de géométrie analytique, en deux volumes [67]; travail très original, qui se distingue par l'ample intérêt voué au domaine des éléments imaginaires, vecteurs, droites et cercles imaginaires, et à leur interprétation dans la domaine réel.

TRAVAUX SCIENTIFIQUES DE KAZIMIERZ ŻORAWSKI

ABRÉVIATIONS:

BAC — Bulletin de l'Académie de Cracovie, Classe des Sciences mathématiques et naturelles.

CRV — Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III.

MMPh — Monatshefte für Mathematik und Physik.

PMF — Prace matematyczno-fizyczne.

RAU — Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności w Krakowie (Travaux de la Classe des Sciences mathématiques et naturelles de l'Académie de Cracovie).

SGW — Berichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.

WM — Wiadomości Matematyczne.

Lorsqu'un travail est publié en deux langues, le polonais et l'allemand ou le tchèque et l'allemand, il est placé sous un seul numéro. Pour les travaux qui ne sont publiés qu'en polonais, les titres en sont suivis des traductions françaises.

1. *O pewnym odkształceniu powierzchni*, RAU 23 (1891), p. 225-291.
Über Biegungsinvarianten. Eine Anwendung der Lieschen Gruppentheorie, Acta Mathematica 16 (1892), p. 1-67.

2. *O całkowaniu układów równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego liniowych i jednorodnych (Sur l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires et homogènes)*, PMF 3 (1892), p. 1-32.

3. *Uzupełnianie ciągłych grup przekształceń (Prolongement des groupes continus de transformations)*, RAU 24 (1892), p. 32-40.

4. *Niezmienniki różniczkowe pewnej nieskończonej ciągłej grupy przekształceń (Invariants différentiels d'un groupe continu infini de transformations)*, RAU 24 (1892), p. 41-55.

5. *Przyczynek do teoryi zmiany zmiennych w równaniach różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego (Contribution à la théorie du changement des variables dans les équations différentielles du premier ordre)*, RAU 26 (1893), p. 67-99.

6. *O zbieżności iteracyi (Sur la convergence des itérations)*, RAU 26 (1893), p. 271-288.

7. *Drobne przyczynki do teoryi przekształceń i jej zastosowań (Contributions à la théorie des transformations et aux applications de cette théorie)*, RAU 26 (1893), p. 289-300.

8. *O pochodnych nieskończenie wielkiego rzędu (Sur les dérivées d'ordre infini)*, RAU 26 (1893), p. 419-433.

9. *O szeregach odwracających (Sur les séries renversantes)*, PMF 5 (1894), p. 146-159.

10. *Iteracye i szeregi odwracające (Itérations et séries renversantes)*, RAU 27 (1894), p. 240-249.

11. *O wielkościach zasadniczych ogólnej teoryi powierzchni (Sur les grandeurs fondamentales de la théorie générale des surfaces)*, RAU 28 (1895), p. 1-7

12. *O całkach niezmiennych ciągłych grup przekształceń*, RAU 28 (1895), p. 232-273.

Über Integralinvarianten der continuierlichen Transformationsgruppen, BAC (1895), p. 127-130.

13. *O linii wskazującej krzywiznę powierzchni (Sur l'indicatrice de la courbure d'une surface)*, RAU 29 (1896), p. 250-265.

14. *O całkowaniu pewnej kategoryi równań różniczkowych zwyczajnych rzędu trzeciego (Sur l'intégration d'une famille d'équations différentielles du troisième ordre)*, RAU 34 (1898), p. 141-205.

15. *Przyczynek do teoryi nieskończenie małych przekształceń (Contribution à la théorie des transformations infinitésimales)*, RAU 34 (1898), p. 218-232.

16. *O pewnych prądach matematyki współczesnej (Sur quelques courants dans les mathématiques contemporaines)*, WM 3 (1899), p. 48-53.

17. *O działalności naukowej Sophusa Liego (Sur l'activité scientifique de Sophus Lie)*, WM 3 (1899), p. 85-119.

18. *O zbieżności szeregów odwracających (Sur la convergence des séries renversantes)*, RAU 37 (1900), p. 139-153.

19. *Przyczynek do geometryi nieskończenie małych przekształceń (Contribution à la géométrie des transformations infinitésimales)*, RAU 37 (1900), p. 153-175.

20. *Über einige Kategorien infinitesimaler Transformationen der Ebene*, SGW 1, §§ 77-96.

21. *Über infinitesimale Transformationen der Ebene, welche gewissen geometrischen Bedingungen genügen*, MMPh 12 (1900), p. 185-202.

22. *O zachowaniu ruchu wirowego*, Dziennik IX Zjazdu Lekarzy i przyrodników polskich, Kraków 1900, p. 99.

Über die Erhaltung der Wirbelbewegung, BAC 1900, p. 335-342.

O zachowaniu ruchu wirowego, RAU 39 (1901), p. 236-250.

23. *O pewnym zagadnieniu z teoryi podobnego odwzorowania powierzchni*, RAU 39 (1901), p. 218-235.

Über ein Problem der Theorie der conformen Abbildung von Flächen, BAC 1900, p. 325-335.

24. *O pewnych zmianach długości liniowych elementów podczas ruchu ciągłego układu materialnego punktów*, RAU I, 38 (1901), p. 353-365; II, 42 (1902), p. 170-211.

Über gewisse Änderungsgeschwindigkeiten von Linienelementen bei der Bewegung eines continuierlichen materiellen Systems, BAC I (1900), p. 367-372; II (1901), p. 486-499.

25. *O warunkach niezmienności pewnych równań różniczkowych przy nieskończenie małych przekształceniach (Sur les conditions de l'invariance de quelques équations différentielles, par rapport aux transformations infinitésimales)*, PFM 12 (1901), p. 1-10.

26. *O własnościach pewnej całki wielokrotnej będących uogólnieniem dwóch twierdzeń z teoryi wirów (Sur les propriétés d'une intégrale multiple, qui sont une généralisation de deux théorèmes de la théorie des tourbillons)*, PMF 13 (1902), p. 107-153.

27. *Notiz über Translationsflächen*, SGW 57 (1905), p. 233-245.

28. *Aufstellung einiger Krümmungsformeln, die Integralflächen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung betreffen*, Archiv der Mathematik u. Physik, 3. Reihe, 11 (1906), p. 197-205.

29. *Über Krümmungseigenschaften der Scharen von Linienelementen*, PFM 17 (1906), p. 41-76.

30. *Über die Differentialinvarianten der Flächen in Bezug auf die lineare Gruppe und über Translationsflächen*, BAC 1906, p. 865-901.

31. *Über eine die partiellen Differentialgleichungen betreffende Relation*, BAC 1907, p. 1040-1052.

32. *Zur Invariantentheorie der Differentialformen zweiten Grades*, SGW I, 59 (1907), p. 160-186: II, 60 (1908), p. 20-52.

33. *Notizen aus dem Gebiete der Differentialgeometrie*, PMF I, 18 (1907), p. 143-169; II, 22 (1911), p. 35-58.

34. *O pewnych badaniach z teoryi form różniczkowych stopnia drugiego (Sur quelques recherches dans la théorie des formes différentielles du deuxième degré)*, Sprawozdanie z posiedzeń naukowych w Sekcyach X Zjazdu lekarzy i przyrodników polskich (Comptes rendus des séances de sections du X Congrès des médecins et des naturalistes polonais), Lwów 1908.

35. *O pewnym związku dotyczącym równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego (Sur une relation concernant les équations aux dérivées partielles du premier ordre)*, ibidem.

36. *Stanisław Kępiński (Wspomnienie pośmiertne) (Stanisław Kępiński (nécrologue))*, WM 12 (1908), p. 161-167.

37. *Über konforme Abbildungen von Flächen*, BAC 1909, p. 311-334.

38. *Über gewisse Transformationseigenschaften der vielfachen Integrale*, BAC 1909, p. 483-492.

39. *Über stationäre Bewegungen kontinuierlichen Medien*, BAC 1911, p. 1-17.

40. *Invariantentheoretische Untersuchungen gewisser Eigenschaften der Bewegungen kontinuierlichen Medien*, BAC 1911, p. 175-218.

41. *Über gewisse Eigenschaften der Bewegungen kontinuierlichen Medien*, BAC 1912, p. 269-292.

42. *Über gewisse Pfaffsche Systeme, welche bei Bewegungen kontinuierlicher Medien invariant bleiben*, BAC 1912, p. 436-461.

43. *Über Deformationskomponenten*, BAC 1912, p. 721-754.

44. *Über Eigenschaften eines vielfachen Integrals, welche Verallgemeinerungen zweier Sätze der Theorie der Wirbelbewegung sind*, MMPh 24 (1913), p. 277-299.

45. *O jistých vlastnostach polár*, Rozpravy Česke Akademie, Třida 2, 23 (1914).

Über gewisse Eigenschaften der Polaren, Bulletin International de l'Académie des Sciences de Bohême, 19 (1914).

46. *Über Invarianten der Deformationen und kontinuierlicher Bewegungen von Medien*, BAC 1914, p. 107-161.

47. *Über Bewegungen kontinuierlicher Medien mit vorgelegten invarianten Kurvenscharen*, BAC 1914, p. 220-240.

48. *Über Invarianten gewisser Formensysteme*, SGW 46 (1914), p. 103-117.

49. *O jistých differenciálních invariantech systemu obycejných differenciálnich rovnic druhého pořádu*, Rozpravy Česke Akademie, Třida 2, 24 (1915).

Über gewisse Differentialinvarianten der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Bulletin International de l'Académie des Sciences de Bohême 20 (1915).

50. *O obloukových elementach soustav plosných, ktore vyhovujé uróitym podminkam*, Rozpravy České Akademie, Třida 2, 24 (1915).

Über Linienelemente der Flächenscharen, die gewissen Bedingungen genügen, Bulletin International de l'Académie des Sciences de Bohême 20 (1915).

51. *Über gewisse Kategorien von Differentialinvarianten der Flächenisometrie*, BAC 1915, p. 77-92.

52. *Über gewisse Relationen, welche Deformationen und kontinuierliche Bewegungen von Medien betreffen*, BAC 1915, p. 122-163.

53. *Über gewisse Eigenschaften der Wirbel*, BAC 1915, p. 188-206.

54. *Über Differentialinvarianten gewisser Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen gegenüber Punkttransformationen*, BAC 1915, p. 241-274.

55. *O warunkach nakładalności linij krzywych (Sur les conditions de l'applicabilité des courbes)*, Księga pamiątkowa ku czci Bolesława Orzechowicza, Lwów 1916, p. 639-661.

56. *Über Einteilung der Bewegungen kontinuierlicher Medien in gewisse Kategorien*, BAC 1917, p. 1-36.

57. *O zastosowaniach teoryi grup przekształceń w innych dziedzinach matematyki (Sur les applications de la théorie des groupes de transformations dans les autres domaines des mathématiques)*, Poradnik dla samouków, Warszawa 1923, volume 3, p. 99-130.

58. *O pewnej własności ruchów sztywnych i kompleksów liniowych (Sur une propriété des mouvements rigides et des complexes linéaires)*, CRV 1926, p. 105-122.

59. *Własności pewnej kategorji przekształceń punktowych w płaszczyźnie (Propriétés d'une espèce de transformations ponctuelles dans le plan)*, RAU 65/66 (1926), p. 37-69.

60. *Ruchy sztywne i kompleksy liniowe (Mouvements rigides et complexes linéaires)*, RAU 65/66 (1926), p. 287-339.

61. *Spółzmienne punkty rzeczywiste punktów zespolonych (Points réels covariants aux points imaginaires)*, CRV 1926, p. 113-132.

62. *Über Transformationen, welche eine partielle Differentialgleichung von besonderer Form erfüllen*, CRV 20 (1927), p. 421-433.

63. *O wektorach zespolonych (Sur les vecteurs imaginaires)*, CRV 20 (1927), p. 531-547.

64. *Cztery przyczynki z zakresu kinematyki ciał sztywnych (Quatre contributions à la cinématique des corps rigides)*, Akademia Nauk Technicznych 2 (1929).

65. *O pewnych przekształceniach czterowymiarowej przestrzeni, będących w związku z własnościami funkcyj zmiennych zespolonych (Sur quelques transformations de l'espace à quatre dimensions, liées aux propriétés des fonctions des variables complexes)*, RAU 68 (1928), p. 1-30.

66. *Über ein System zweier partieller Differentialgleichungen von einer besonderen Form* (avec un résumé en polonais), CRV 22 (1929), p. 67-104.

67. *Wykład geometrii analitycznej (Cours de géométrie analytique)*, Warszawa, volume I (1930), volume II (1934).