$$\sum_{2}^{\infty}\frac{b(n)}{n^s}=\sum_{P}\frac{1}{P^s+P^{-s}-2}=\sum_{1}^{\infty}\varphi(m)\big(\zeta(ms)-1\big), \tag{18}$$

$$\sum_{P}\frac{1}{P^s}=\sum_{1}^{\infty}\mu(m)\big(\zeta(ms)-1\big), \tag{19}$$

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n^x\big((a(n))^y-1\big)}=\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n^y\big((a(n))^x-1\big)} \quad \text{pour} \quad x,y>1. \tag{20}$$

Remarque. Les identités (6), (8), (10), (12), (13), (15), (16), (17) et (20), qui sont de la forme

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{r_n}{k_n^s-1}=F(s),$$

peuvent être représentées dans la forme équivalente

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{r_n}{k_n^s+1}=F(s)-2F(2s).$$

TRAVAUX CITÉS

[1] Jan Mycielski, *Sur les représentations des nombres naturels par des puissances à base et exposants naturels*, Colloquium Mathematicum 2 (1951), p. 254-260.

[2] — *On powers*, Bulletin de l'Académie Polonaise de Sciences, Cl. III 3 (1955), p. 129-132.

SUR L'ÉQUATION $x^2+x+1=3y^2$

PAR

A. SCHINZEL ET W. SIERPIŃSKI (VARSOVIE)

L'équation $x^2+x+1=3y^2$ a déjà son histoire. En 1950 R. Obláth supposait que cette équation n'a pas de solutions en nombres naturels x,y, où x est impair, sauf $x=y=1$ [1]). Or, la même année, T. Nagell a communiqué la solution $x=313$, $y=181$ [2]). Le but de la note présente est de trouver toutes les solutions de cette équation en nombres naturels x,y. Nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME. *Toutes les solutions de l'équation*

$$x^2+x+1=3y^2 \tag{1}$$

en nombres naturels x,y *sont contenues dans la suite infinie* (x_n,y_n) $(n=1,2,\ldots)$, *où* $x_1=y_1=1$ *et où les nombres* x_n *et* y_n *pour* $n=2,3,\ldots$ *sont définis par les formules de recurrence*

$$x_{n+1}=7x_n+12y_n+3, \qquad y_{n+1}=4x_n+7y_n+2, \tag{2}$$

pour $n=1,2,\ldots$

Démonstration. Supposons que x,y est une solution de l'équation (1) en nombres naturels, où $x>1$. On vérifie sans peine que l'équation (1) n'a pas de solutions en nombres naturels x,y, où $x=2,3,4,5,6,7,8$ ou 9. Donc, si $x>1$, on a $x\geqslant 10$.

Nous prouverons qu'on a les inégalités

$$12y<7x+3, \qquad 7y>4x+2, \qquad 4y>2x+1. \tag{3}$$

S'il était $12y\geqslant 7x+3$, on aurait $144y^2\geqslant 49x^2+42x+9$, et, comme, d'après (1), $144y^2=48x^2+48x+48$, on aurait $x^2\leqslant 6x+39$, d'où $(x-3)^2\leqslant 48$ et, comme $x\geqslant 10$, $7^2\leqslant 48$, ce qui est impossible. La première des inégalités (3) est ainsi démontrée.

[1]) R. Obláth, *Über die diophantische Gleichung* $x^3-1=2y^2$, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 1 (1950), p. 114, Satz 1.

[2]) L. c., p. 321. Il est à remarquer que dans Mathematical Reviews 13 (1952), p. 625, l'équation $x^2+x+1=3y^2$ est écrite avec une faute d'impression (comme $x^2+x+1=v^2$).

S'il était $7y \leqslant 4x+2$, on aurait $49y^2 \leqslant 16x^2+16x+4$ et, comme, d'après (1), $16x^2+16x+16=48y^2$, on aurait $49y^2 \leqslant 48y^2-12$, ce qui est impossible. La deuxième des inégalités (3), et par la aussi la troisième, se trouvent ainsi démontrées.

Posons maintenant

(4) $$\xi = 7x-12y+3, \qquad \eta = -4x+7y-2.$$

D'après (3) on trouve $\xi>0$, $\eta>0$ et $x-\xi=12y-6x-3=3(4y-2x-1)>0$, donc $\xi<x$.

Or, d'après (4) on trouve

$$\xi^2+\xi+1-3\eta^2 = (7x-12y+3)(7x+12y+4)+1-3(-4x+7y-2)^2$$
$$= x^2+x+1-3y^2,$$

donc, d'après (1), $\xi^2+\xi+1=3\eta^2$.

Ainsi, si (x,y) est une solution de l'équation (1) en nombres naturels x,y, où $x>1$, les nombres ξ et η définis par les formules (4) donnent une solution de l'équation (1) en nombres naturels plus petits respectivement que les nombres x et y.

Posons

$$g(x,y) = (7x-12y+3, -4x+7y-2)$$

($g(x,y)$ est donc une fonction qui transforme le point (x,y) du plan en le point $g(x,y)$).

Nous pouvons donc dire qu'en partant d'une solution (x,y) de l'équation (1) en nombres naturels x, y, où $x>1$, on obtient une nouvelle solution $(\xi,\eta)=g(x,y)$ de cette équation en nombres naturels ξ,η, où $\xi<x$.

Si $\xi>1$ nous pouvons de même obtenir une nouvelle solution $(\xi',\eta')=g(\xi,\eta)=gg(x,y)=g^2(x,y)$, où $\xi'<\xi$, et ainsi de suite. Une suite d'entiers décroissants >1 ne pouvant être infinie, on arrive pour un nombre naturel n à une solution $(u,v)=g^n(x,y)$ de l'équation (1) en nombres naturels u, v où $u=1$, donc à la solution (1,1).

Donc, si (x,y) est une solution de l'équation (1) en nombres naturels, où $x>1$, il existe un nombre naturel n tel que

(5) $$g^n(x,y) = (1,1).$$

Posons maintenant

(6) $$f(x,y) = (7x+12y+3, 4x+7y+2).$$

On vérifie sans peine que $f(g(x,y))=(x,y)$ et on en déduit que $f^n g^n(x,y)=(x,y)$. La formule (5) donne donc $(x,y)=f^n(1,1)$.

D'autre part, en posant

$$x_1 = 7x+12y+3, \qquad y_1 = 4x+7y+2,$$

on vérifie sans peine que

$$x_1^2+x_1+1-3y_1^2 = (7x+12y+3)(7x+12y+4)+1-3(4x+7y+2)^2$$
$$= x^2+x+1-3y^2,$$

d'où il résulte que si x,y est une solution de l'équation (1) en nombres naturels (x,y), $f(x,y)$ est aussi une solution de l'équation (1) en nombres naturels respectivement plus grands que les nombres x et y.

Il en résulte tout de suite que toutes les solutions en nombres naturels de l'équation (1), et seulement de telles solutions, sont contenues dans la suite infinie

$$(1,1),\ f(1,1),\ ff(1,1),\ fff(1,1,),\ldots$$

Vu la formule (6) notre théorème se trouve démontré.

Ainsi la solution de l'équation (1) en nombres naturels x,y qui sont les plus petits, tels que $x>1$, est $x=22$, $y=13$. La solution suivante est $x=313$, $y=181$, donc celle qui a été donnée par T. Nagell. Elle est suivie par la solution $x=4366$, $y=2521$. Il y a une infinité de solutions de l'équation (1) en nombres naturels x,y. On voit aussi sans peine que les nombres x_n sont impairs pour n impairs et pairs pour n pairs.

A. Rotkiewicz a remarqué qu'en partant des solutions de l'équation (1) en nombres naturels $x>1$ et y on peut obtenir tout de suite toutes les solutions en nombres naturels z et y de l'équation

(*) $$(z+1)^3-z^3=y^2.$$

En effet, supposons que les nombres naturels z et y satisfont à l'équation (*). En posant $x=3z+1$ on obtient les nombres naturels $x>1$ et y, satisfaisant à l'équation (1).

D'autre part, si les nombres naturels $x>1$ et y satisfont à l'équation (1), on a $(x-1)^2=3(y^2-x)$, d'où il résulte que le nombre naturel $x-1$ est divisible par 3, donc $x-1=3z$, où z est un nombre naturel, et on a $3z^2=y^2-x=y^2-3z-1$, ce qui prouve que les nombres z et y satisfont à l'équation (*).

Ainsi des solutions (22,13), (313,181), (4366,2521) de l'équation (1) on obtient les solutions (7,13), (104,181), (1455,2521) de l'équation (*). L'équation (*) a été déjà étudiée[3]). E. Trost[4]) a démontré que si les nombres naturels z et y satisfont à l'équation (*), le nombre y est une somme de deux carrés consécutifs, par exemple $13=2^2+3^2$, $181=9^2+10^2$, $2521=35^2+36^2$.

[3]) American Mathematical Monthly 53 (1946), p. 464-465.

[4]) E. Trost, ibidem 57 (1950), p. 189-190.