QUELQUES IDENTITÉS DE LA THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

PAR

JAN MYCIELSKI (WROCŁAW)

Les identités recueillies dans cette communication concernent les fonctions numériques définies dans mes communications [1] et [2]. J'en reproduis ici les notations et les définitions, pour passer ensuite aux identités en question.

NOTATIONS

n nombre entier plus grand que 1;

$a(n)$ le plus petit nombre naturel satisfaisant à l'équation $(a(n))^k = n$ avec k naturel[1]);

$b(n)$ nombre naturel défini par l'équation $(a(n))^{b(n)} = n$ [2]);

$$\gamma(n) = \sum_{d \mid b(n)} 1; \qquad \tau(n) = \sum_{d \mid b(n)} d; \qquad \chi(n) = \prod_{d \mid b(n)} d;$$

$$\psi(n) = \sum_{d \mid b(n)} \sqrt[d]{n}; \qquad \omega(n) = \prod_{d \mid b(n)} \sqrt[d]{n};$$

P nombre naturel satisfaisant aux égalités $a(P) = P$, $b(P) = 1$;

$\sum_P, \prod_P$ sommation et produit s'étendant à tous les P;

s nombre complexe avec partie réelle plus grande que 1;

$\zeta(s)$ fonction de Riemann;

$$\beta(n) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{pour } \sqrt{n} \text{ naturel,} \\ 0 & \text{pour } \sqrt{n} \text{ irrationnel;} \end{cases}$$

$\varphi(n)$ fonction d'Euler;

$\mu(n)$ fonction de Möbius.

Notons les relations

$$a(a(n)) = a(n), \qquad b(a(n)) = 1, \qquad a(n) = \sqrt[\tau(n)]{\omega(n)}, \qquad b(n) = (\chi(n))^{2/\gamma(n)} \text{ [3])}.$$

[1]) $a(n) = a_{\gamma(n)}$ dans ma communication [1].

[2]) $b(n) = b_{\gamma(n)}$ ibidem.

[3]) Cf. [1], théorème 2.

IDENTITÉS [4])

(1) $$\sum_2^\infty \frac{\gamma(n)-1}{n} = 1,$$

(2) $$\sum_2^\infty \frac{\tau(n)-1}{n} = \frac{\pi^2}{6} + 1,$$

(3) $$\sum_2^\infty \frac{\psi(n) - n - \beta(n)}{n} = 1,$$

(4) $$\prod_2^\infty n^{1-\zeta(n)} \sqrt[n]{\chi(n)} = 1,$$

(5) $$\prod_2^\infty \sqrt[n]{\frac{\omega(n)}{n+1}} = 1,$$

(6) $$\sum_2^\infty \frac{\gamma(n)}{n^s} = \sum_2^\infty \frac{1}{n^s - 1},$$

(7) $$\sum_2^\infty \frac{\tau(n)}{n^s} = \sum_2^\infty \frac{1}{n^s + n^{-s} - 2},$$

(8) $$\sum_2^\infty \frac{\psi(n)}{n^s} = \sum_2^\infty \frac{n}{n^s - 1},$$

(9) $$\sum_2^\infty \frac{\log \chi(n)}{n^s} = \sum_1^\infty (\zeta(ms) - 1) \log m,$$

(10) $$\sum_2^\infty \frac{\log \omega(n)}{n^s} = \sum_2^\infty \frac{\log n}{n^s - 1}.$$

Dans ce qui suit f est une fonction arbitraire, mais telle que les séries soient absolument convergentes.

(11) $$\sum_2^\infty f(a(n), b(n)) = \sum_P \sum_{m=1}^\infty f(P, m),$$

(12) $$\sum_2^\infty \frac{f(a(n))}{n^s} = \sum_P \frac{f(P)}{P^s - 1},$$

(13) $$\zeta(s) = 1 + \sum_P \frac{1}{P^s - 1} = 1 + \sum_2^\infty \frac{1}{(a(n))^s - 1} \log\left(1 + \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{2^{b(n)-1}}\right),$$

(14) $$\prod_2^\infty \left(1 + \left(\frac{z}{a(n)}\right)^{2^{b(n)}}\right) = \prod_P \frac{P^2}{P^2 - z^2} \quad \text{pour} \quad |z| < 2,$$

(15) $$\sum_2^\infty \frac{f(b(n))}{n^s - 1} = \sum_2^\infty \frac{1}{n^s} \sum_{d \mid b(n)} f(d) = \sum_1^\infty f(m)(\zeta(ms) - 1) \quad \text{(cf. (6), (9))},$$

(16) $$\sum_2^\infty \frac{z^{b(n)-1}}{n^s - 1} = \sum_2^\infty \frac{1}{n^s} \sum_{d \mid b(n)} z^{d-1} = \sum_2^\infty \frac{1}{n^s - z} \quad \text{pour} \quad |z| < 2^{R(s)},$$

(17) $$\sum_2^\infty \frac{b(n)}{n^s - 1} = \sum_2^\infty \frac{1}{n^s + n^{-s} - 2} \quad \text{(cf. (7))},$$

[4]) Pour les démonstrations des identités (1)-(3) voir [1]; les démonstrations des autres identités sont analogues.

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{b(n)}{n^s}=\sum_{P}\frac{1}{P^s+P^{-s}-2}=\sum_{1}^{\infty}\varphi(m)\big(\zeta(ms)-1\big),\tag{18}$$

$$\sum_{P}\frac{1}{P^s}=\sum_{1}^{\infty}\mu(m)\big(\zeta(ms)-1\big),\tag{19}$$

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n^x\big((a(n))^y-1\big)}=\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n^y\big((a(n))^x-1\big)}\quad\text{pour}\quad x,y>1.\tag{20}$$

Remarque. Les identités (6), (8), (10), (12), (13), (15), (16), (17) et (20), qui sont de la forme

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{r_n}{k_n^s-1}=F(s),$$

peuvent être représentées dans la forme équivalente

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{r_n}{k_n^s+1}=F(s)-2F(2s).$$

TRAVAUX CITÉS

[1] Jan Mycielski, *Sur les représentations des nombres naturels par des puissances à base et exposants naturels*, Colloquium Mathematicum 2 (1951), p. 254-260.

[2] — *On powers*, Bulletin de l'Académie Polonaise de Sciences, Cl. III 3 (1955), p. 129-132.

SUR L'ÉQUATION $x^2+x+1=3y^2$

PAR

A. SCHINZEL ET W. SIERPIŃSKI (VARSOVIE)

L'équation $x^2+x+1=3y^2$ a déjà son histoire. En 1950 R. Obláth supposait que cette équation n'a pas de solutions en nombres naturels x,y, où x est impair, sauf $x=y=1$ [1]). Or, la même année, T. Nagell a communiqué la solution $x=313$, $y=181$ [2]). Le but de la note présente est de trouver toutes les solutions de cette équation en nombres naturels x,y. Nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME. *Toutes les solutions de l'équation*

$$x^2+x+1=3y^2\tag{1}$$

en nombres naturels x,y *sont contenues dans la suite infinie* (x_n,y_n) $(n=1,2,\ldots)$, *où* $x_1=y_1=1$ *et où les nombres* x_n *et* y_n *pour* $n=2,3,\ldots$ *sont définis par les formules de recurrence*

$$x_{n+1}=7x_n+12y_n+3,\qquad y_{n+1}=4x_n+7y_n+2,\tag{2}$$

pour $n=1,2,\ldots$

Démonstration. Supposons que x,y est une solution de l'équation (1) en nombres naturels, où $x>1$. On vérifie sans peine que l'équation (1) n'a pas de solutions en nombres naturels x,y, où $x=2,3,4,5,6,7,8$ ou 9. Donc, si $x>1$, on a $x\geqslant 10$.

Nous prouverons qu'on a les inégalités

$$12y<7x+3,\qquad 7y>4x+2,\qquad 4y>2x+1.\tag{3}$$

S'il était $12y\geqslant 7x+3$, on aurait $144y^2\geqslant 49x^2+42x+9$, et, comme, d'après (1), $144y^2=48x^2+48x+48$, on aurait $x^2\leqslant 6x+39$, d'où $(x-3)^2\leqslant 48$ et, comme $x\geqslant 10$, $7^2\leqslant 48$, ce qui est impossible. La première des inégalités (3) est ainsi démontrée.

[1]) R. Obláth, *Über die diophantische Gleichung* $x^3-1=2y^2$, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 1 (1950), p. 114, Satz 1.

[2]) L. c., p. 321. Il est à remarquer que dans Mathematical Reviews 13 (1952), p. 625, l'équation $x^2+x+1=3y^2$ est écrite avec une faute d'impression (comme $x^2+x+1=v^2$).