SUR UN PROBLÈME DE LA THÉORIE DES NOMBRES LIÉ À LA DISTRIBUTION BINOMIALE

PAR

J. ACZÉL (DEBRECEN) ET S. ZUBRZYCKI (WROCŁAW)

1. Si un débutant sait que la probabilité d'un événement est $p=0{,}9$, il peut s'attendre, en faisant $n=20$ épreuves, que cet événement se produise le plus probablement un nombre de fois égal à $18=20\cdot 0{,}9$. De même, en faisant $n=18$ épreuves, il serait porté à croire que le nombre le plus probable des réalisations de cet événement soit égal à $16\approx 18\cdot 0{,}9=16{,}2$. La première présomption est juste, mais la seconde est fausse: le nombre le plus probable est 17 et non pas 16. En effet, le terme le plus grand de la distribution binomiale

$$P_m=\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m},\qquad \text{où}\qquad m=0,1,\ldots,n\quad \text{et}\quad 0<p<1,$$

est égal à $P_{[np+p]}$[1]) et ce nombre n'est pas toujours égal à $P_{\{np\}}$[2]), bien que np soit la valeur moyenne de cette distribution.

La question s'impose donc quand a-t-on l'inégalité $P_{\{np\}}<P_{[np+p]}$. En d'autres termes, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait une des relations

(1) $$\{np\}>[np+p],$$

(2) $$\{np\}<[np+p]\neq np+p.$$

Ici $np+p$ ne peut pas être un entier, car on aurait alors l'égalité $P_{\{np\}}=P_{[np+p]}$.

En posant $a=[np+p]+1$, l'inégalité (1) équivaut à $a-1/2<np<$ $<np+p<a$, c'est-à-dire à l'inégalité

(3) $$a-1/2<np<a-p,$$

qui entraîne $p<1/2$.

[1]) [ ] désigne l'entier. Si $np+p$ est un entier, on a $P_{[np+p]}=P_{[np+p]-1}$ (cf. par exemple [1], p. 28-32).

[2]) { } désigne l'entier le plus proche. Le nombre $\{x\}$ est donc indéfini lorsque $x-[x]=1/2$.

En posant $a=[np+p]$, l'inégalité (2) équivaut à $np<a-1/2<a<$ $<np+p$, c'est-à-dire à l'inégalité

(4) $$a-p<np<a-1/2,$$

qui entraîne $p>1/2$.

Soit $0<p<1$. Nous dirons que p *a la propriété* Π lorsque $p<1/2$ et qu'il existe deux entiers positifs a et n satisfaisant à (3), et aussi lorsque $p>1/2$ et qu'il existe deux entiers positifs a et n satisfaisant à (4). Le nombre $p=1/2$ est donc dépourvu de la propriété Π.

Nous déterminerons dans ce qui suit

1° l'ensemble de tous les p ayant la propriété Π,

2° le plus petit n pour p donné.

2. Les inégalités (3) et (4) se correspondent par dualité: *si un* $p<1/2$ *satisfait à* (3) *pour un* n, $q=1-p>1/2$ *satisfait à* (4) *pour le même* n *et réciproquement.*

En effet, en soustrayant du nombre n les membres de l'inégalité (3) et en posant $b=n-a+1$, il vient $b-q<nq<b-1/2$, ce qui est (4) pour q, b et n. De même, (3) résulte de (4).

Cette dualité nous permettra de déduire les propriétés de $1-p$ de celles de p.

3. L'exemple $p=1/4$ montre qu'il existe des p rationnels entre 0 et 1/2 n'ayant pas la propriété Π.

THÉORÈME 1. *Pour qu'une fraction irréductible* $p=i/j$ *ait la propriété* Π, *il faut et il suffit que*

(5) $$\frac{i+1}{j}<\frac{1}{2}\quad si\quad p<\frac{1}{2}\qquad et\qquad \frac{i-1}{j}>\frac{1}{2}\quad si\quad p>\frac{1}{2}.$$

Démonstration. La condition est suffisante. En effet, la fraction $p=i/j<1/2$ étant irréductible par hypothèse, $kp-[kp]$ prend chacune des valeurs $0,\ 1/j,\ 2/j,\ \ldots,(j-1)/j$ exactement une fois pour $k=1,2,\ldots,j$. Il existe donc un n pour lequel $np-[np]=1-(i+1)/j$, c'est-à-dire $np=[np]+1-(i+1)/j=[np]+1-p-1/j$, d'où $np<[np]+$ $+1-p$. En même temps, on a en vertu de l'hypothèse (5) $[np]+$ $+1-1/2<[np]+1-(i+1)/j=np$. Les inégalités (3) sont donc satisfaites pour $a=[np]+1$. Le cas de $p>1/2$ en résulte par dualité.

La condition est nécessaire. En effet, la conséquence $np+p<a$ de (3) ne peut être satisfaite que si $np+p\leqslant a-1/j$. En y ajoutant membre à membre la conséquence $-np<-a+1/2$ de (3), il vient $p<1/2-1/j$, d'où la première des inégalités (5). La démonstration de la seconde en résulte par dualité à partir de (4).

COROLLAIRE. *Il n'y a parmi les nombres rationnels p de l'intervalle $0<p<1$ que ceux de la forme*

$$p=\begin{cases} \dfrac{k}{2k+1}=\dfrac{2k}{4k+2} \quad \textit{et} \quad \dfrac{2k-1}{4k} \quad \textit{si} \quad p<\dfrac{1}{2},\\[2ex] \dfrac{k+1}{2k+1}=\dfrac{2k+2}{4k+2} \quad \textit{et} \quad \dfrac{2k+1}{4k} \quad \textit{si} \quad p>\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

ou, plus simplement, de la forme

$$p=\begin{cases}(l-1)/2l,\\ 1/2,\\ (l+1)/2l\end{cases}$$

ou encore qui sont des fractions (pas nécessairement irréductibles) de la forme $p=\mu/\nu$, où $(2\mu-\nu)$ est un diviseur de ν, qui n'ont pas de propriété Π.

En effet, pour une fraction irréductible $i/2m<1/2$, la condition (5) n'est en défaut que si $(i+1)/2m=1/2=m/2m$, c'est-à-dire que si p est de la forme $(m-1)/2m$. Mais l'irréductibilité d'une telle fraction équivaut à $m=2k$ (m, et par conséquent k, étant des entiers positifs), d'où la forme $(2k-1)/4k$ de p. De même, pour une fraction irréductible $i/(2m+1)<1/2$, la condition (5) n'est en défaut que si $(i+1)/(2m+1)>1/2$ et $i/(2m+1)<1/2$, c'est-à-dire que si $i=m$; en posant $m=k$, il en résulte la forme $k/(2k+1)$ de p (et toutes les fractions de cette forme sont irréductibles). Le cas $p>1/2$ en résulte par dualité. L'équivalence aux autres formes nommées est évidente.

L'inégalité banale

$$\frac{2k-2}{4k-2}<\frac{2k-1}{4k}<\frac{2k}{4k+2} \quad \text{pour} \quad k=1,2,\ldots$$

permet de ranger tous les p rationnels de l'intervalle $0<p<1$ dépourvus de propriété Π en deux suites, à savoir l'une croissante

$$(6^{<}) \qquad \frac{1}{4},\ \frac{2}{6},\ \frac{3}{8},\ \ldots,\ \frac{2k-2}{4k-2},\ \frac{2k-1}{4k},\ \frac{2k}{4k+2},\ \ldots$$

et l'autre décroissante

$$(6^{>}) \qquad \frac{3}{4},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{8},\ \ldots,\ \frac{2k}{4k-2},\ \frac{2k+1}{4k},\ \frac{2k+2}{4k+2},\ \ldots,$$

intercalées de leur limite commune $p=1/2$, également dépourvue de la propriété Π.

THÉORÈME 2. *Tous les nombres irrationnels p de l'intervalle $0<p<1$ ont la propriété Π.*

Démonstration. Vue la dualité 2, nous pouvons nous borner à $p<1/2$. Il est facile de voir que (3) équivaut à

$$(7) \qquad \frac{2a-1}{2n}<p<\frac{a}{n+1}=\frac{2a}{2n+2};$$

par conséquent, pour que p ait la propriété Π, il faut et il suffit qu'il appartienne à l'intervalle ouvert de la forme

$$(8) \qquad \Big\rangle \frac{2a-1}{2n},\ \frac{2a}{2n+2}\Big\langle \quad \text{où} \quad n=1,2,\ldots \quad \text{et} \quad 2a<n+1.$$

Il s'agit donc de montrer que les intervalles (8) couvrent l'intervalle $\rangle 0,1/2\langle$ sauf les nombres $(6^{<})$, ce qui se réduit aussitôt à établir les deux propriétés I et II suivantes:

I. *On a pour tout $k=1,2,\ldots$*

$$\Big\rangle\frac{2k-2}{4k-2},\ \frac{2k-1}{4k}\Big\langle + \Big\rangle\frac{2k-1}{4k},\ \frac{2k}{4k+2}\Big\langle$$
$$=\Big\rangle\frac{2k-1}{4k},\ \frac{2k}{4k+2}\Big\langle + \Big\rangle\frac{(2k-2)2+1}{(4k-2)2+2},\ \frac{2k-1}{4k}\Big\langle +$$
$$+\sum_{m=2}^{\infty}\Big\rangle\frac{(2k-2)(m+1)+1}{(4k-2)(m+1)+2},\ \frac{(2k-2)m+1}{(4k-2)m+2}\Big\rangle,$$

où le signe $\rangle$ d'ouverture à gauche est entendu en même temps comme celui de fermeture à droite.

II. *On a pour tout $k=1,2,\ldots$ et $m=2,3,\ldots$*

$$\Big\rangle\frac{(2k-2)(m+1)+1}{(4k-2)(m+1)+2},\ \frac{(2k-2)m+1}{(4k-2)m+2}\Big\rangle$$
$$\subset \Big\rangle\frac{(2k-2)(m+1)+1}{(4k-2)(m+1)+2},\ \frac{(2k-2)(m+1)+2}{(4k-2)(m+1)+4}\Big\langle.$$

En effet, I définit un recouvrement de l'intervalle $\rangle 0,1/2\langle$ sans les points $(6^{<})$ par une suite d'intervalles disjoints et II nous apprend que tout intervalle de ce recouvrement est contenu dans un intervalle (ouvert) de la forme (8).

Reste à démontrer I et II. Évidemment,

$$\frac{x}{y}<\frac{z}{t} \quad \text{entraîne} \quad \frac{x}{y}<\frac{x+z}{y+t}<\frac{z}{t},$$

donc

$$\frac{(2k-2)(m+1)+1}{(4k-2)(m+1)+2}<\frac{(2k-2)m+1}{(4k-2)m+2} \quad \text{pour} \quad m=1,2,\ldots$$

Par conséquent les intervalles figurant dans le membre droit de l'égalité I ne sont pas vides. Pour établir I, on n'a donc qu'à appliquer l'identité

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(2k-2)(m+1)+1}{(4k-2)(m+1)+2}=\frac{2k-2}{4k-2}.$$

Enfin, pour établir II, il suffit de montrer par un simple calcul que cette propriété équivaut à l'inégalité $1<m$, ce qui achève la démonstration[3]).

THÉORÈME 3. *Si un nombre p a la propriété II, la plus petite valeur $n_0(p)$ de n pour laquelle cette propriété se présente est la suivante*:

$$(9)\qquad n_0(p)=\begin{cases} 2k & \textit{pour}\quad \dfrac{2k-1}{4k}<p<\dfrac{2k}{4k+2},\\[2mm] 4k-1 & \textit{pour}\quad \dfrac{(2k-2)\cdot 2+1}{(4k-2)\cdot 2+2}<p<\dfrac{2k-1}{4k},\\[2mm] (2k-1)(m+1)+1 & \textit{pour}\quad \dfrac{(2k-2)(m+1)+1}{(4k-2)(m+1)+2}<p \leqslant\dfrac{(2k-2)m+1}{(4k-2)m+2},\\[2mm] (2k-1)(m+1)+1 & \textit{pour}\quad \dfrac{2km}{(4k-2)m+2}\leqslant p <\dfrac{2k(m+1)+1}{(4k-2)(m+1)+2},\\[2mm] 4k-1 & \textit{pour}\quad \dfrac{2k+1}{4k}<p<\dfrac{2k\cdot 2+1}{(4k-2)\cdot 2+2},\\[2mm] 2k & \textit{pour}\quad \dfrac{2k+2}{4k+2}<p<\dfrac{2k+1}{4k}, \end{cases}$$

où $k=1,2,\ldots$ *et* $m=2,3,\ldots$

[3]) Le théorème 2 qui précède peut être démontré en trois lignes comme il suit: l'ensemble des nombres $np-[np]$ avec p irrationnels étant dense (voir par exemple [2], p. 144), il existe pour tout p irrationnel de l'intervalle $0<p<1$ un entier positif n tel que $1-1/2<np-[np]<1-p$, d'où (3) pour $a=[np]+1$.

Nous avons préféré toutefois de recourir à la propriété I, qui nous a permi d'établir aussi le théorème 3, conformément à la suggestion que nous devons à S. Gładysz.

Démonstration. Il résulte, en effet, de I que les valeurs $n_0(p)$ définies par (9) satisfont à (3) et (4). Pour les points p appartenant à l'intervalle indiqué dans la première ligne de (9), c'est une conséquence de l'équivalence entre (7) et (3). Pour les autres intervalles, il faut encore faire intervenir la propriété II.

Il s'agit donc de montrer, pour $p<1/2$, que tous les intervalles du recouvrement défini par I sont disjoints de tout intervalle de la forme (8) en y posant $n<n_0(p)$. Le cas de $p>1/2$ en résulte par dualité.

Pour les intervalles

$$(10)\qquad \Big\rangle\frac{2k-1}{4k},\frac{2k}{4k+2}\Big\langle,$$

$$(11)\qquad \Big\rangle\frac{(2k-2)\cdot 2+1}{(4k-2)\cdot 2+2},\frac{(2k-2)\cdot 1+1}{(4k-2)\cdot 1+2}\Big\langle=\Big\rangle\frac{4k-3}{8k-2},\frac{2k-1}{4k}\Big\langle,$$

$$(12)\qquad \Big\rangle\frac{(2k-2)(m+1)+1}{(4k-2)(m+1)+2},\frac{(2k-2)m+1}{(4k-2)m+2}\Big\rangle \quad \text{où} \quad m=2,3,\ldots,$$

cela résulte respectivement de trois propriétés qui suivent.

III. $2a\leqslant n<2k$ *entraîne*

$$(13)\qquad \frac{a}{n+1}<\frac{2k-1}{4k},$$

c'est-à-dire que les bouts droits des intervalles (8) avec $n<n_0(p)$ sont à gauche des bouts des intervalles

$$\Big\rangle\frac{2k-1}{4k},\frac{2k}{4k+2}\Big\langle.$$

IV. $2a\leqslant n<(2k-1)(m+1)+1$ *et*

$$(14)\qquad \frac{(2k-2)m+1}{(4k-2)m+2}\leqslant\frac{a}{n+1}$$

entraînent

$$(15)\qquad \frac{(2k-2)m+1}{(4k-2)m+2}\leqslant\frac{2a-1}{2n},$$

c'est-à-dire que tout intervalle (8) avec $n<n_0(p)$ et dont le bout droit n'est pas à gauche de celui d'un intervalle (11) ou (12) est situé entièrement à droite de ce dernier.

V. $n < (2k-1)(m+1)+1$ *et*

$$\frac{a}{n+1} \leqslant \frac{(2k-2)m+1}{(4k-2)m+2} \tag{16}$$

entraînent

$$\frac{a}{n+1} \leqslant \frac{(2k-2)(m+1)+1}{(4k-2)(m+1)+2}, \tag{17}$$

c'est-à-dire que tout intervalle (8) avec $n<n_0(p)$ et dont le bout droit n'est pas à droite de celui d'un intervalle (11) ou (12) est situé entièrement à gauche de ce dernier.

C'est ainsi que les propriétés III-V assurent l'absence de points communs entre les intervalles (10)-(12) et chacun des intervalles (8) avec $n<n_0(p)$.

Pour achever la démonstration, il reste donc à établir ces trois propriétés.

Or, $2a \leqslant n < 2k$ entraîne

$$\frac{n+1}{4k} < \frac{2n}{4k} < 1 \qquad \text{pour } n \text{ impairs,}$$

$$\frac{n+1}{4k} \leqslant \frac{2k-1}{4k} < \frac{1}{2} \qquad \text{pour } n \text{ pairs,}$$

car alors $n \leqslant 2k-2$. Il y a donc équivalence entre les inégalités

$$a < \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad a < \frac{(n+1)(2k-1)}{4k} = \frac{n+1}{2} - \frac{n+1}{4k};$$

la dernière étant équivalente à (13), la propriété III se trouve établie.

Les formules (14) et (15) équivalent respectivement aux suivantes:

$$\frac{n+1}{2} - \frac{(n+1)m}{2\big((2k-1)m+1\big)} \leqslant a \quad \text{et} \quad \frac{n+1}{2} - \frac{nm}{2\big((2k-1)m+1\big)} \leqslant a;$$

nous allons établir l'équivalence entre les deux dernières. Remarquons que

$$\frac{nm}{2\big((2k-1)m+1\big)} < \frac{(n+1)m}{2\big((2k-1)m+1\big)} < \frac{m+1}{2},$$

la première de ces inégalités étant triviale et la seconde étant équivalente à l'hypothèse $n<(2k-1)(m+1)+1$ de IV.

Considérons d'abord le cas de n impair. Il s'agit donc de montrer que, pour tout entier positif s, les conditions

$$s < \frac{m+1}{2} \tag{18}$$

et

$$s \leqslant \frac{(n+1)m}{2\big((2k-1)m+1\big)} = A \tag{19}$$

entraînent

$$s \leqslant \frac{nm}{2\big((2k-1)m+1\big)} = B, \tag{20}$$

c'est-à-dire que les nombres A et B appartiennent au même intervalle $\langle s, s+1 \langle$ (le signe d'ouverture à droite étant entendu ici en même temps comme celui de fermeture à gauche). Or, (19) est équivalent à

$$2s(2k-1) + \frac{2s}{m} - 1 \leqslant n$$

et (20) l'est à

$$2s(2k-1) + \frac{2s}{m} \leqslant n.$$

Les deux dernières relations sont satisfaites pour les mêmes n impairs, puisque (18) entraîne $2s/m \leqslant 1$.

Considérons à son tour le cas de n pair. Il s'agit donc de montrer que, pour tout entier positif s, les conditions

$$s - \frac{1}{2} < \frac{m+1}{2} \tag{21}$$

et

$$s - \frac{1}{2} \leqslant \frac{(n+1)m}{2\big((2k-1)m+1\big)} = A \tag{22}$$

entraînent

$$s - \frac{1}{2} \leqslant \frac{nm}{2\big((2k-1)m+1\big)} = B, \tag{23}$$

c'est-à-dire que les nombres A et B appartiennent au même intervalle fermé à gauche $\langle s-1/2, s+1/2 \langle$. Or, (22) est équivalent à

$$(2s-1)(2k-1) + \frac{2s-1}{m} - 1 \leqslant n$$

et (23) l'est à

$$(2s-1)(2k-1) + \frac{2s-1}{m} \leqslant n.$$

Les deux dernières relations sont satisfaites pour les mêmes n pairs, car (21) entraîne $(2s-1)/m\leqslant 1$.

La démonstration de IV est ainsi achevée. Celle de V est analogue. Les relations (16) et (17) sont à remplacer d'abord par les suivantes, qui leur équivalent respectivement:

$$a\leqslant\frac{n+1}{2}-\frac{(n+1)m}{2\big((2k-1)m+1\big)}, \tag{24}$$

$$a\leqslant\frac{n+1}{2}-\frac{(n+1)(m+1)}{2\big((2k-1)(m+1)+1\big)}, \tag{25}$$

et, pour établir l'équivalence entre (24) et (25), on commencera par remarquer que

$$\frac{(n+1)m}{2\big((2k-1)m+1\big)}<\frac{(n+1)(m+1)}{2\big((2k-1)(m+1)+1\big)}\leqslant\frac{m+1}{2}, \tag{26}$$

la première de ces relations se réduisant par un simple calcul à $1/(m+1)<1/m$ et la seconde étant équivalente à l'hypothèse $n<$ $<(2k-1)(m+1)+1$ de V.

Pour n impairs, l'équivalence entre (24) et (25) revient à montrer que, quel que soit l'entier positif s, les conditions (18) et

$$C=\frac{(n+1)m}{2\big((2k-1)m+1\big)}\leqslant s \tag{27}$$

entraînent

$$D=\frac{(n+1)(m+1)}{2\big((2k-1)(m+1)+1\big)}\leqslant s, \tag{28}$$

c'est-à-dire que les nombres C et D appartiennent au même intervalle fermé à droite $\rangle s-1,s\rangle$. Or, (27) et (28) équivalent respectivement aux relations

$$n\leqslant 2s(2k-1)-1+\frac{2s}{m}\quad\text{ et }\quad n\leqslant 2s(2k-1)-1+\frac{2s}{m+1},$$

qui sont satisfaites pour les mêmes n impairs en vertu de la conséquence $2s/m\leqslant 1$ de (18).

Pour n pairs, l'équivalence entre (24) et (25) revient à montrer que, quel que soit l'entier positif s, les conditions (21) et

$$C\leqslant s-\frac{1}{2} \tag{29}$$

entraînent

$$D\leqslant s-\frac{1}{2}, \tag{30}$$

c'est-à-dire que les nombres C et D, définis par (27) et (28), sont situés dans le même intervalle fermé à droite $\rangle s-3/2,s-1/2\rangle$. Or, (29) et (30) équivalent respectivement aux relations

$$n\leqslant(2s-1)(2k-1)-1+\frac{2s-1}{m}\quad\text{ et }\quad n\leqslant(2s-1)(2k-1)-1+\frac{2s-1}{m+1},$$

qui sont satisfaites pour les mêmes n pairs en vertu de la conséquence $(2s-1)/m\leqslant 1$ de (21).

4. On peut donner à la fonction $n_0(p)$ une autre forme, à savoir libre des paramètres k et m:

THÉORÈME 4. *On a pour tout p à propriété Π*

$$n_0(p)=\begin{cases}\left(2\left[\dfrac{1-p}{1-2p}\right]-1\right)\left[\dfrac{1-2p}{1-\left(2\left[\dfrac{1-p}{1-2p}\right]-1\right)(1-2p)}+1\right]+1 & \text{si }\ p<\dfrac{1}{2},\\[2ex] \left(2\left[\dfrac{p}{2p-1}\right]-1\right)\left[\dfrac{2p-1}{1-\left(2\left[\dfrac{p}{2p-1}\right]-1\right)(2p-1)}+1\right]+1 & \text{si }\ p>\dfrac{1}{2}.\end{cases} \tag{31}$$

Démonstration. Il est aisé de voir que

$$\frac{(2k-2)(m+1)+1}{(4k-2)(m+1)+2}<p\leqslant\frac{(2k-2)m+1}{(4k-2)m+2} \tag{32}$$

équivaut pour tout $k=1,2,\ldots$ et $m=0,1,2,\ldots$ à

$$\frac{1-2p}{1-(2k-1)(1-2p)}<m+1\leqslant\frac{1-2p}{1-(2k-1)(1-2p)}+1,$$

de sorte que l'on a

$$m+1=\left[\frac{1-2p}{1-(2k-1)(1-2p)}+1\right] \tag{33}$$

dans la somme

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Big\rangle \frac{(2k-2)(m+1)+1}{(4k-2)(m+1)+2}, \frac{(2k-2)m+1}{(4k-2)m+2} \Big\rangle = \Big\rangle \frac{2k-2}{4k-2}, \frac{1}{2} \Big\rangle$$

des intervalles (32). En outre, l'inégalité évidente

$$\frac{2k}{4k+2} < \frac{(2k-1)\cdot 0+1}{(4k-2)\cdot 0+2} = \frac{1}{2}$$

entraîne pour tout $k=1,2,\ldots$

$$\Big\rangle \frac{2k-1}{4k}, \frac{2k}{4k+2} \Big\langle \subset \Big\rangle \frac{(2k-2)\cdot 1+1}{(4k-2)\cdot 1+2}, \frac{(2k-2)\cdot 0+1}{(4k-2)\cdot 0+2} \Big\rangle,$$

de sorte que

$$n_0(p) = (2k-1)\left[\frac{1-2p}{1-(2k-1)(1-2p)}+1\right]+1 \tag{34}$$

dans les intervalles

$$\frac{2k-2}{4k-2} < p < \frac{2k-1}{4k} \quad \text{et} \quad \frac{2k-1}{4k} < p < \frac{2k}{4k+2},$$

c'est-à-dire dans tous ceux qui figurent aux trois premières lignes de (9).

Pour transformer (34) en première partie de (31), il reste donc à exprimer k en fonction explicite de p et y inscrire l'expression trouvée.

Or,

$$\frac{2k-2}{4k-2} < p < \frac{k}{2k+1} \quad \text{équivaut à} \quad \frac{1-p}{1-2p} - 1 < k < \frac{1-p}{1-2p},$$

d'où

$$k = \left[\frac{1-p}{1-2p}\right] \quad \text{pour} \quad p < 1/2 \quad \text{ayant la propriété } \Pi.$$

Quant à la seconde partie de (31), elle résulte de la première en y remplaçant p par $1-p$, ce qui est légitime grâce à la dualité **2**; elle entraîne, en effet, l'égalité $n_0(p) = n_0(1-p)$. Le théorème 4 est ainsi établi.

En particulier, on tire facilement de la formule (31) ou (34) que

$$n_0(p) = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{2p}\right]+1 & \text{si} \quad 0<p<\dfrac{1}{4} \quad \text{et} \quad \dfrac{1}{4}<p<\dfrac{1}{3}, \\[2ex] \left[\dfrac{1}{2(1-p)}\right]+1 & \text{si} \quad \dfrac{2}{3}<p<\dfrac{3}{4} \quad \text{et} \quad \dfrac{3}{4}<p<1. \end{cases}$$

D'après une suggestion de M. T. Kővári, il est facile de déduire de la formule (31) à l'aide des inégalités $[x] < x - \frac{1}{\pi}|\sin \pi x| < x$ une estimation plus simple:

$$n_0(p) \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{1-2p}\left(\dfrac{\pi}{2\left|\sin \pi \dfrac{1-p}{1-2p}\right|}+1\right) & \text{si} \quad p<\dfrac{1}{2}, \\[2ex] \dfrac{1}{2p-1}\left(\dfrac{\pi}{2\left|\sin \pi \dfrac{p}{2p-1}\right|}+1\right) & \text{si} \quad p>\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

TRAVAUX CITÉS

[1] A. A. Markov, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leipzig-Berlin 1912.
[2] O. Perron, *Irrationalzahlen*, Berlin-Leipzig 1921.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ L. KOSSUTH
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES