(Mit $\sigma_{n,k}^{i}$ bezeichnen wir die i-ten symmetrischen Funktionen der $a_{k+1},\ldots,a_n$ also $\sigma_{n,k}^{0}=1$, $\sigma_{n,k}^{1}=a_{k+1}+\ldots+a_n,\ldots,\sigma_{n,k}^{n-k}=a_{k+1}\ldots a_n$.)

Wenn wir die Operatorenrechnung anwenden (siehe [2], Seite 36), so sehen wir, daß die Differentialgleichung (7) mit den Anfangsbedingungen (8), der Operatorengleichung

$$\sum_{i=0}^{n-k}\sigma_{n,k}^{i}s^{n-k-i}y=\frac{\sigma_{n,k}^{n-k}}{s+a_k} \tag{9}$$

gleichwertig ist. Da

$$\sum_{i=0}^{n-k}\sigma_{n,k}^{i}s^{n-k-i}=(s+a_{k+1})\ldots(s+a_n),$$

haben wir also

$$y=\frac{\sigma_{n,k}^{n-k}}{(s+a_k)\ldots(s+a_n)} \quad \text{oder} \quad y(x)=a_{k+1}\ldots a_n e^{-a_k x}*\ldots*e^{-a_n x}, \tag{10}$$

w. z. b. w.

Des Eindeutigkeitsatzes für Differentialgleichungen wegen, ist also die Hirschman-Widder'sche Definition der Funktionen $H_{n,k}$ obiger Definition gleichwertig.

ZITATENNACHWEIS

[1] I. I. Hirschman, Jr. und D. V. Widder, *Generalized Bernstein polynomials*, Duke Math. Journal 16 (1949), S. 433-438.

[2] J. Mikusiński, *Rachunek operatorów*, Warszawa 1953.

[3] — *On generalized power-series*, Studia Mathematica 12 (1951), S. 181-190.

О ТЕОРИИ СРЕДНИХ

Я. АЦЕЛЬ (ДЕБРЕЦЕН)

ВВЕДЕНИЕ

Аксиоматическая теория структуры средних ведёт своё начало от краткой работы Колмогорова [52], опубликованной в 1930 г. Вслед за ней появилось много работ по этой области, написанных главным образом польскими и венгерскими математиками. В этой статье излагаются мною результаты исследований, ведущихся в одном из различных направлений, и добавляется новый, ещё не опубликованный результат, связанный с дальнейшей проблемой.

Основной задачей теории средних, намеченной Колмогоровым, является нахождение общих характерных свойств т. н. *квази-арифметических средних*, т. е. функций нескольких переменных вида

$$M_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f^{-1}\left[\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}\right], \tag{1}$$

в частности функций двух переменных вида

$$M(x,y)=f^{-1}\left[\frac{f(x)+f(y)}{2}\right], \tag{2}$$

где $f(x)$ — непрерывная, строго монотонная функция, а f^{-1} — обратная к ней. Класс функций этого вида имеет большое практическое значение, так как он охватывает собою большинство средних, встречающихся на практике, напр. среднее арифметическое $[f(x)=x]$, геометрическое $[f(x)=\log x]$, квадратичное $[f(x)=x^2]$, степенное $[f(x)=x^s]$, экспоненциальное $[f(x)=e^x]$ и т. д.

Направления исследований по теории средних успели в течение двадцати лет настолько разветвиться, что автор краткого обзора, желающий встать в своём изложении на единую точку зрения, принуждён отречься от рассмотрения ряда результатов, примыкающих к этой теории. Так напр. мною не будет даже вкратце упомянуто значительное количество работ, посвящённых специальным средним, а в том числе ни исследования Ауманна [20, 22, 24], относящиеся к средним значениям функций комплексных переменных, ни имеющие алгебраический нитерес работы по трансляциям и другим операциям, родственным средним (Ден [27], Голомб [34], Ацель, Кальмар и Микусинский [18], Ацель [3, 8, 12 и 14]), ни уравнения квази-арифметических средних (Енсен [43 и 44], Кнопп [51], Ессен [45-48], Ауманн [19, 25 и 26], Ден [27], Микусинский [53], Ацель [2, 6 и 7]), ни теоремы о последовательностях, образованных посредством средних (Ауманн [20-24], Феньё [28, 29 и 31], Ацель [10 и 13]). Я лишь коротко упоминаю о некоторых результатах изучения средних значений функций и функциональных операций, обобщающих их, а также о тесно связанных с ними условиях, характеризующих т. н. *взвешенные* квази-арифметические средние в случае заданной зависимости от весов (Ессен [46], Китагава [49], Финетти [32], Феньё [30], Ацель, Феньё и Хорват [17], Хорват [35, 36 и 38], Ацель [5, 9 и 15]).

Результаты, изложенные в настоящей работе, относятся к тому варианту задачи Колмогорова, в котором не предполагается (как в её постановке Колмогоровым), что средняя определена сразу для произвольного количества переменных, а требуется найти характеристики квази-арифметических средних заданного количества (напр. двух) переменных (§ 1). Эти результаты применяются затем (§ 2) к аналогичной задаче для несимметрических средних, к нахождению характеристик класса функций, объемлющего все рассматриваемые случаи (§ 3), и, наконец, к получению всех этих характеристик с помощью дифференциальных уравнений (§ 4). Попутно указываются связи между этими результатами и другими областями математики, а также её приложениями. Этими вопросами и занимались преимущественно венгерские и польские математики (Рылль-Нардзевский [55], Кнастер [50], Вереш [56], Феньё [28], Хорват [37], Фукс [33], Ацель [1, 3, 4, 11, 12] и Ацель и Феньё [16]).

§ 1. *СИММЕТРИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ*

Теорему Колмогорова [52] можно выразить следующим образом:

Теорема 1. *Для того, чтобы функции*

(3) $$M_n(x_1,\ldots,x_n), \quad \text{где} \quad n=1,2,\ldots,$$

были квази-арифметическими средними, необходимо и достаточно совместное выполнение для функций M_n следующих четырёх условий:

(i) *непрерывность и строгая монотонность (возрастание) по отношению ко всем переменным;*

(ii) *рефлексивность:* $M_n(x,\ldots,x)=x$;

(iii) *симметрия, т. е. инвариантность ко всяким перестановкам переменных;*

(A) *ассоциативность:*

$$M_n(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)=M_n[M_k(x_1,\ldots,x_k),\ldots,M_k(x_1,\ldots,x_k),x_{k+1},\ldots,x_n].$$

Доказательство состоит в построении обратной функции, которая квази-арифметизирует функции (3). Для этого определяем:

$$f^{-1}(r/s)=M_s(\underbrace{a,\ldots,a}_{s-r},\underbrace{b,\ldots,b}_{r}),$$

если y — рациональное число, данное в виде несократимой дроби r/s, и, ввиду (i),

$$f^{-1}(y)=\lim_{r_n\to y} f^{-1}(r_n),$$

если y — иррациональное число, к которому сходится последовательность $\{r_n\}$ рациональных чисел. Числа a и b являются здесь концами замкнутого отрезка, пробегаемого переменными $x_1,\ldots,x_n$. Из условий (ii), (iii) и (A) легко следует равенство

$$M_n[f^{-1}(y_1),\ldots,f^{-1}(y_n)]=f^{-1}\left[\frac{y_1+\ldots+y_n}{n}\right],$$

равносильное формуле (1), что и заканчивает доказательство. Теорема 1 остаётся в силе, если отрезок значений переменных $x_1,\ldots,x_n$ лишён одного конца или простирается в бесконечность.

Почти одновременно с Колмогоровым тот-же результат был найдён Нагумо [54] и, в несколько другом виде, Финеттим [32]. Доказательство последнего сложнее доказательства Колмогорова.

Феньё [28] поставил вопрос о квази-арифметичности средних, определённых только для заданного количества переменных, напр. для двух. В дальнейшем мы можем ограничиться случаем двух переменных, не нарушая этим общности. Итак задача будет состоять в изучении условий, при которых функция двух переменных является квази-арифметическою среднею. Условия (i)-(iii) можно, очевидно, сохранить; видоизменения требует лишь условие (A). Решение этого вопроса находится в работах [1] и [4]. В них доказана следующая

Теорема 2. *Для того, чтобы функция $M(x,y)$ была квази-арифметическою среднею, необходимо и достаточно выполнение ею условия* (i) *из теоремы* 1 *и следующих:*

(ii) *рефлексивность:* $M(x,x)=x$;

(iii) *симметрия:* $M(x,y)=M(y,x)$;

(B) *бисимметрия:* $M[M(x_1,y_1),M(x_2,y_2)]=M[M(x_1,x_2),M(y_1,y_2)]$.

Доказательство и тут состоит в построении обратной функции $f^{-1}(y)$. Начнём с её рекурсивного определения для диадических дробей:

$$f^{-1}(0)=a, \qquad f^{-1}(1)=b,$$

$$f^{-1}(r/2^k)=M\left[f^{-1}(r'/2^{k-1}), f^{-1}((r'+s)/2^{k-1})\right],$$

где $r=2r'+s$ и $s=0$ или 1. Ввиду (i) можно определить $f^{-1}(y)$ для иррациональных значений y формулой

$$f^{-1}(y)=\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n),$$

где $\{y_n\}$ — последовательность двоичных дробей, сходящаяся к y.

Условие, чтобы функция M была квази-арифметическою среднею, равносильно условию

$$M\left[f^{-1}(u), f^{-1}(v)\right]=f^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right). \tag{4}$$

Докажем, что оно выполняется для всяких двоично-рациональных значений u и v. В самом деле, это справедливо, если u и v — целые числа, т. е. двоичные дроби со знаменателем 2^0. Предположим, что равенство (4) справедливо для всех двоичных дробей со знаменателем 2^{k-1} и выведем его для 2^k. Пусть

$$u=r_1/2^k, \qquad v=r_2/2^k,$$
$$r_1=2r_1'+s_1, \qquad r_2=2r_2'+s_2,$$
$$s_1=0 \text{ или } 1, \qquad s_2=0 \text{ или } 1.$$

По определению функции f^{-1} и по только-что высказанному предположению имеем

$$M\left[f^{-1}(u), f^{-1}(v)\right]=$$
$$=M\left\{M\left[f^{-1}\left(\frac{r_1'}{2^{k-1}}\right), f^{-1}\left(\frac{r_1'+s_1}{2^{k-1}}\right)\right], M\left[f^{-1}\left(\frac{r_2'+s_2}{2^{k-1}}\right), f^{-1}\left(\frac{r_2'}{2^{k-1}}\right)\right]\right\}=$$
$$=f^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right)=f^{-1}\left(\frac{2r_1'+2r_2'+s_1+s_2}{2^{k+1}}\right)=$$
$$=M\left[f^{-1}\left(\frac{r_1'+r_2'+s_2}{2^k}\right), f^{-1}\left(\frac{r_1'+r_2'+s_1}{2^k}\right)\right]=$$
$$=M\left\{M\left[f^{-1}\left(\frac{r_1'}{2^{k-1}}\right), f^{-1}\left(\frac{r_2'+s_2}{2^{k-1}}\right)\right], M\left[f^{-1}\left(\frac{r_1'+s_1}{2^{k-1}}\right), f^{-1}\left(\frac{r_2'}{2^{k-1}}\right)\right]\right\}.$$

Теперь очевидно, что (4) равносильно (B). В силу (i) равенство (4) распространяется и на диадически иррациональные значения y.

Приведённое мною доказательство отличается от подлинного несколькими упрощениями, принадлежащими Фуксу [33]. По замечанию Хорвата [37], условие (B) можно сформулировать таким образом, чтобы оно отличалось от условия (A) лишь ограничением значений k и n и некоторыми степенями числа 2. Добавим, что в случае двух переменных условия теоремы 2 можно несколько ослабить (см. [3]), но так видоизменённая теорема уже не расширяется на большее (хотя и заданное) число переменных.

Упомянутые работы имели целью, между прочим, придать условиям наиболее симметричный вид и подобрать их так, чтобы устранение того или другого из них вело к новым, очевидно более широким, но всё-же интересным классам функций (§ 2 и § 3). Польские математики стремились между тем дать характеристики того-же класса функций с помощью возможно малого числа условий, но зато более содержательных. Они достигли этой цели посредством удачных видоизменений формул, выражающих эти условия. Так напр. Г. Пидек сообщила мне (письмом от 26 ноября 1948 г.) интересное слияние формул (iii) и (B) в одну:

$$M\left[M(x_1,y_1), M(x_2,y_2)\right]=M\left[M(x_1,x_2), M(y_2,y_1)\right];$$

подставляя $x_1=y_1$ и $x_2=y_2$, легко вывести из неё симметрию (iii), а с помощью последней и бисимметрию (B). Рыллю-Нардзевскому [55] и Микусинскому (в письме ко мне от 6 июля 1948 г.) удалось добиться ещё большей сжатости: при условии (i), впрочем в несколько ослабленном виде, остальные могут быть заменены условием

$$M\left[M(x_1,x_2),y\right]=M\left[M(y,x_1), M(x_2,y)\right], \tag{RN}$$

но доказательство, что сочетание этих двух условий уже необходимо и достаточно для того, чтобы функция M была симметрическою квази-арифметическою среднею, становится труднее. Наконец, Кнастер [50] непосредственно доказал равносильность системы двух условий Рылля-Нардзевского системе условий (i)-(iii),(B). В силу условия (i) в его ослабленном виде условие (ii) вытекает из условия (RN) путём подстановки $x_1=x_2=y$, а условие (iii) — путем подстановки $x_2=y$. Затруднение состоит в выводе (B) из (RN); Кнастеру удалось преодолеть его путём четырёхкратного применения (RN).

§ 2. НЕСИММЕТРИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ

Почти одновременно с первыми исследованиями по симметрическим средним возник вопрос о справедливости аналогичных теорем и для несимметрических средних. Вопрос этот важен потому, что на практике весьма часто встречаются такие средние, как $(2x_1+3x_2)/5$, $(x_1^2x_2^3)^{1/5}$ и др. Подобно определению симметрических квази-арифметических средних, мы будем впредь называть *взвешенными квази-арифметическими средними* или, коротко, *квази-линейными средними* функции n переменных вида

$$M_n(x_1,\ldots,x_n)=f^{-1}[q_1f(x_1)+\ldots+q_nf(x_n)], \tag{5}$$

где f — непрерывная возрастающая функция и $q_1+\ldots+q_n=1$. В частности, для двух переменных таковы функции M вида

$$M(x,y)=f^{-1}[pf(x)+qf(y)], \tag{6}$$

где $p+q=1$. Проблему характеристических (т. е. необходимых и достаточных) условий для того, чтобы средняя была квази-линейной, можно ставить двояко, смотря по тому, известна-ли зависимость функции M от весов и требуется-ли найти условия для существования искомой функции f, или же неизвестна ни она, ни веса переменных.

Первая из этих задач состоит, таким образом, в следующем: известна зависимость функции M не только от значений переменных, но и от весов; средняя M является, следовательно, функцией $2n$ переменных (мы и будем её обозначать так:

$$M\binom{x_1,\ldots,x_n}{q_1,\ldots,q_n},$$

в частности $M\binom{x,y}{p,q}$, напр. $M\binom{x,y}{p,q}=x^py^q$); требуется найти необходимые и достаточные условия для наличия такой непрерывной и строго монотонной функции f, для которой выполняется уравнение

$$M\binom{x_1,\ldots,x_n}{q_1,\ldots,q_n}=f^{-1}[q_1f(x_1)+\ldots+q_nf(x_n)],$$

в частности уравнение

$$M\binom{x,y}{p,q}=f^{-1}[pf(x)+qf(y)].$$

Согласно заявленной мною необходимости отказаться от подробностей (см. Введение), ограничиваюсь здесь приведением одной типичной теоремы (см. [5]):

Теорема 3. *Для того, чтобы средняя*

$$M\binom{x,y}{p,q}$$

была квази-линейна, необходимо и достаточно совместное выполнение следующих четырёх условий:

строгая монотонность:

$$M\binom{x,y}{p,q}<\begin{cases}M\binom{x,y}{p,r} & \text{для}\quad x<y \ \text{и}\ q<r,\\ M\binom{x,z}{p,q} & \text{для}\quad y<z,\end{cases}$$

однородность:

$$M\binom{x,y}{p,q}=M\binom{x,y}{kp,kq},$$

рефлексивность:

$$M\binom{x,x}{p,q}=x,\qquad M\binom{x,y}{0,1}=y,\qquad M\binom{x,y}{1,0}=x;$$

бисимметрия:

$$M\begin{bmatrix}M\binom{x,y}{p,q}, & M\binom{z,u}{r,s}\\ p+q & r+s\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}M\binom{x,z}{p,r}, & M\binom{y,u}{q,s}\\ p+r & q+s\end{bmatrix}.$$

Заметим, что f^{-1} можно здесь представить явно в виде

$$f^{-1}(t)=M\binom{x,\ \ y}{1-t,\ t}.$$

Вторая задача состоит в том, чтобы найти необходимые и достаточные условия для квази-линейности данной средней, если веса её переменных неизвестны. Точнее: требуется ответить на вопрос, когда существуют такие веса (в сумме равные единице) и такая непрерывная, строго монотонная функция f, для которых при данной средней M_n выполнялось бы равенство (5) или, в случае двух переменных, при данной средней M — равенство (6).

Очевидно, необходимо, чтоб такая средняя тоже была непрерывная, а также рефлексивная и бисимметрическая, но она может быть лишена симметрии. Ацелю (см. [4]) принадлежит следующая

Теорема 4. *Для квази-линейности средней $M(x,y)$, т. е. для наличия таких p и q с суммой $p+q=1$ и такой непрерывной строго монотонной функции f, чтобы равенство* (6) *было удовлетворено, необходимо и достаточно совместное выполнение условий* (i), (ii) *и* (B).

Основная мысль доказательства заключается в том, что

$$m(x,y)=\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}v_n,$$

где $\quad u_0=x,\quad v_0=y,\quad u_{n+1}=M(u_n,v_n)\quad$ и $\quad v_{n+1}=M(v_n,u_n),$

оказывается не только непрерывной, возрастающей и бисимметрической, но и симметрической, следовательно и квази-арифметической. Отсюда сравнительно несложно вытекает уже квази-линейность средней $M(x,y)$. Средняя $m(x,y)=t$ является в то-же время решением уравнения $t=M[M(t,x),M(t,y)]$.

Фукс [33] показал, что для доказательства теоремы 4 достаточно использовать это последнее свойство средней $m(x,y)$, не прибегая к её определению как предела последовательностей $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$.

Теорема 4 распространяется на $n>2$ переменных.

Следующая проблема остается открытой:

P 145. Справедливо-ли обобщение теоремы 4, по которому для квази-линейности непрерывной и строго монотонной средней $M(x,y)$ достаточным является условие

(D) *автодистрибутивность*:

$$M[M(x_1,x_2),y]=M[M(x_1,y),M(x_2,y)]?$$

Попытки доказать элементарно так обобщённую теорему кажутся мне привлекательными и заслуживающими внимания. В § 4 будет доказано, что она справедлива по крайней мере в том случае, когда непрерывна не только функция $M(x,y)$, но и её вторые частные производные.

§ 3. *ДАЛЬНЕЙШИЕ ОБОБЩЕНИЯ*

Устранение условия (iii) из системы условий, характеризующих по теореме 2 симметрические квази-арифметические средние, привело, как мы видим, к характеристике весьма важного класса функций, а именно взвешенных квази-арифметических средних (теорема 4). Естественно возникает вопрос, что́ получится, если устранить также условие (ii), т. е. какого вида будет самое общее непрерывное решение функционального уравнения

$$F[F(x_1,x_2),F(y_1,y_2)]=F[F(x_1,y_1),F(x_2,y_2)]. \tag{7}$$

Справедлива следующая теорема (см. [3] и [4]):

Теорема 5. *Всякое непрерывное решение функционального уравнения* (7) *имеет вид*

$$F(x,y)=f^{-1}[af(x)+bf(y)+c], \tag{8}$$

где f — непрерывная и строго монотонная функция, а a, b и c — постоянные.

Иначе говоря: для всякой непрерывной, строго монотонной и бисимметрической функции $F(x,y)$ существует такая непрерывная и строго монотонная функция $f(x)$ и такие постоянные a, b и c что выполняется равенство (8).

Функции вида (8) называются *квази-линейными*.

Исходной точкой доказательства теоремы 5 является определение функции

$$M(x,y)=\varphi^{-1}[F(x,y)], \quad \text{где} \quad \varphi(t)=F(t,t).$$

Так определённая функция $M(x,y)$ оказывается квази-линейною, откуда и вытекает равенство (8).

Фукс [33] обобщил теоремы 1-5 на абстрактные алгебраические системы. Дальнейшими существенными обобщениями теорем 1-5 являются теоремы о средних функций и о более общих, чем эти средние, функциональных операциях. Ограничиваюсь и здесь приведением лишь одной типичной теоремы (см. [9] и [17]), относящейся к таким операциям. Для этого рассмотрим операцию $u(\varphi)$, определённую в пространстве всех измеримых и почти для всех x отрезка $0\leqslant x\leqslant 1$ конечных функций φ.

Операция $u(\varphi)$ будет называться *полу-симметрической* если

$$u_x\{u_y[f(x,y)]\}=u_x\{u_y[g(x,y)]\}, \tag{9}$$

где

$$g(x,y)=\begin{cases} f(y,x) \text{ на непересекающихся прямоугольниках,} \\ a\leqslant x\leqslant b \quad \text{и} \quad c\leqslant y\leqslant d \\ c\leqslant y\leqslant d \qquad\;\; a\leqslant y\leqslant b, \\ f(x,y) \text{ во всех других точках,} \end{cases}$$

а u_x и u_y обозначают выполнение операции u на функции $f(x,y)$ как на функции от x при постоянном y и, соответственно, как на функции от y при постоянном x.

Операция $u(\varphi)$ называется *строго монотонной*, если условия:

$\varphi(x)\leqslant\psi(x)$ почти для всех x,

$\varphi(x)<\psi(x)$ для множества положительной меры значений x, влекут за собой неравенство $u(\varphi)<u(\psi)$.

Она называется *непрерывной*, если сходимость $\varphi_n(x)\to\varphi(x)$ почти во всех x влечёт за собою сходимость $u(\varphi_n)\to u(\varphi)$; *рефлексивной*, если равенство $\varphi(x)=c$ влечёт за собой равенство $u(\varphi)=c$; *симметрической*, если $u(\varphi)=u(\psi)$ для всяких φ и ψ, имеющих ту же самую дистрибуанту.

Далее, операцию $u(\varphi)$ будем называть *квази-линейною*, если существует такая непрерывная возрастающая функция $f(t)$ и такая функция $a(x)$, что $\int\limits_0^1 a(x)=1$ и

$$u(\varphi)=f^{-1}\Big\{\int\limits_0^1 f[\varphi(x)]\,a(x)\,dx+C\Big\};\tag{10}$$

квази-линейною взвешенной среднею, если условие (10) может быть заменено более строгим:

$$u(\varphi)=f^{-1}\Big\{\int\limits_0^1 f[\varphi(x)]\,a(x)\,dx\Big\};$$

наконец, *квази-линейною симметрической среднею*, если существует непрерывная возрастающая функция $f(t)$, для которой

$$u(\varphi)=f^{-1}\Big\{\int\limits_0^1 f[\varphi(x)]\,dx\Big\}.$$

Теорема 6. *Операция $u(\varphi)$ тогда и только тогда является*

(11) *квази-линейною, когда она непрерывна, строго монотонна и полу-симметрична;*

(12) *квази-линейною взвешенною среднею, когда она сверх того рефлексивна;*

(13) *квази-линейною симметрическою среднею, когда она строго монотонна, полу-симметрична, рефлексивна и симметрична.*

В последнем случае её непрерывность является следствием остальных её свойств.

§ 4. *ПРИВЕДЕНИЕ К УРАВНЕНИЯМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ*

До сих пор симметрические квази-арифметические средние и взвешенные квази-линейные средние были нами характеризованы функциональными уравнениями, удовлетворяющими некоторым добавочным условиям. Возникает вопрос, возможно-ли дать характеристику этих средних с помощью дифференциальных уравнений с частными производными, удовлетворяющих определённым начальным условиям. Дело в том, что с такими уравнениями легче работать, так как теория дифференциальных уравнений с частными производными подробнее и основательнее разработана, чем теория функциональных уравнений с несколькими переменными.

Ответ на вопрос положителен. Мы увидим, что метод дифференциальных уравнений даст нам сверх того явное (интегральное) выражение и для линеаризирующей функции $f(x)$. Наконец, выводя

новые условия, выражённые дифференциальными уравнениями, из прежних условий, выражённых функциональными уравнениями, мы получим тем самым новые доказательства изложенных теорем; даже весьма важный частный случай проблемы **P 145**, упомянутой в конце § 2, поддаётся решению этим методом. Полной общности ожидать от таких косвенных доказательств, конечно, нельзя, ибо они нуждаются не только в строгой монотонности, но по крайней мере в существовании и непрерывности вторых частных производных рассматриваемых функций.

Только о таких функциях и будет итти речь в этом параграфе. Для краткости, частные производные по первой переменной будем снабжать индексом 1, а по второй — индексом 2. Следовательно, по определению:

$$M_1(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}M(x,y)\quad\text{и}\quad M_2(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}M(x,y).$$

Справедлива следующая

Теорема 7. *Для того, чтобы функция $M(x,y)$ была квази-линейною среднею, необходимо и достаточно совместное выполнение условия рефлексивности*

$$M(x,x)=x,\tag{ii}$$

далее, условия

$$M_1(x,x)=\text{const.}=p\tag{14}$$

и любого из трёх следующих равносильных дифференциальных уравнений:

$$\frac{M_{12}(x,y)}{M_2(x,y)}-\frac{M_{11}(x,y)}{M_1(x,y)}=X(x),\tag{15}$$

$$\frac{M_{12}(x,y)}{M_1(x,y)}-\frac{M_{22}(x,y)}{M_2(x,y)}=Y(y),\tag{16}$$

$$\frac{M_{12}(x,y)}{M_1(x,y)M_2(x,y)}=Z[M(x,y)],\tag{17}$$

где X, Y и Z — произвольные дифференцируемые функции.

Линеаризующая функция $f(t)$ выражается одною из формул

$$f(t)=\int e^{-\int X(t)dt}dt,\quad f(t)=\int e^{-\int Y(t)dt}dt,\quad f(t)=\int e^{-\int Z(t)dt}dt.$$

Формулы (15) и (16) выражают, что их левая сторона не зависит, соответственно, от y и x, а формула (17) показывает, что её левая сторона зависит только от $M(x,y)$. Все три формулы становятся, собственно говоря, дифференциальными уравнениями с частными производными лишь после того, как их продифференцировать: (15) по y, (16) по x, а (17) так, чтоб якобиан функций M и M_{12}/M_1M_2 был равен нулю. Тогда видно, что все они равносильны друг другу и следующему уравнению с частными производными третьего порядка:

$$M_1^2(M_{12}M_{22}-M_{122}M_2)=M_2^2(M_{11}M_{12}-M_1M_{112}). \tag{18}$$

Оказывается, что *уравнения* (15)-(18) *эквивалентны также уравнению с частными производными первого порядка*

$$\frac{M_1(x,y)}{M_2(x,y)}=\frac{F(x)}{G(x)}, \tag{19}$$

где $F(x)$ *и* $G(x)$ — *непрерывные функции.*

Уравнение (19) выражает, между прочим, что переменные x и y в $M_1(x,y)/M_2(x,y)$ разделимы; поэтому им удобно пользоваться. С ним связана следующая формула для вычисления функции $f(t)$:

$$f(t)=\int F(t)\,dt=k\int G(t)\,dt.$$

Пример. Функция

$$M(x,y)=x^{\sqrt[3]{\log y/\log x}}$$

есть средняя квази-линейная. В самом деле,

$$M_1(x,y)=x^{\sqrt[3]{\log y/\log x}}\cdot\frac{2}{3x}\cdot\sqrt[3]{\frac{\log y}{\log x}} \quad\text{и}\quad M_2(x,y)=x^{\sqrt[3]{\log y/\log x}}\cdot\frac{1}{3y}\sqrt[3]{\left(\frac{\log x}{\log y}\right)^2},$$

следовательно, в частном

$$\frac{M_1(x,y)}{M_2(x,y)}=\frac{2/(x\log x)}{1/(y\log y)}$$

переменные разделены. Условия (ii) и (14) удовлетворены, так как

$$M(t,t)=t \quad\text{и}\quad \frac{d}{dt}M(t,t)=\frac{2}{3}=\text{const}.$$

Таким образом веса и линеаризующая функция определены равенствами

$$p=M_1(t,t)=\frac{2}{3}, \qquad q=1-p=\frac{1}{3},$$

$$f(t)=k\int\frac{1}{t\log t}\,dt=k\log\log t+C.$$

Поэтому можно представить функцию $M(x,y)$ в виде

$$M(x,y)=\exp\left[\exp\left(\frac{2\log\log x+\log\log y}{3}\right)\right],$$

из которого непосредственно видно, что она является квази-линейною среднею.

В работах [12] и [16] выведены и другие дифференциальные и дифференциально-функциональные уравнения, выражающие условия равносильные тому, чтобы функция $M(x,y)$ являлась квази-линейной средней. В этих выводах, в противоположность результатам, изложенным в этом параграфе, одно из чисел p и q может быть отрицательным, лишь-бы только они удовлетворяли равенству $p+q=1$.

В случае, если p и q различных знаков, соответствующая им квази-линейная средняя называется *внешней*, так как среднее значение рассматриваемых чисел лежит в этом случае вне интервала, содержащего эти числа. Фукс [33] доказал, что для внешних средних можно провести, не предполагая дифференцируемости, рассуждения аналогичные изложенным нами в предыдущих параграфах относительно внутренних, т. е. обыкновенных средних.

Характеристика симметрических квази-линейных средних получается подобно характеристике взвешенных квази-линейных средних (см. теорему 7), лишь заменяя условие (14) условием $M_1(t,t)=1/2$. Вместо него можно, очевидно, взять условие (iii), выражающее симметрию (стр. 35).

При более слабых добавочных условиях каждое из эквивалентных дифференциальных уравнений (15)-(19) равносильно квази-линейности (8) функции $F(x,y)$ (см. [12]). Но и этими функциями не исчерпываются решения уравнений (15)-(19), так как всякое решение их имеет общий вид $h^{-1}[f(x)+g(y)]$.

Функции этого вида играют весьма значительную роль в номографии: все они и только они могут быть изображены с помощью коллинеарной номограммы, в которой все три носители — прямолинейны (см. [11]). Таким образом мы получаем в виде дифференциальных уравнений необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция двух переменных была представима коллинеарной номограммой; кроме того, уравнения

$$f(x)=\int e^{-\int X(x)dx}dx, \qquad g(y)=\int e^{-\int Y(y)dy}dy, \qquad h(t)=\int e^{-\int Z(z)dz}dz$$

определяют масштабы её *нормальной* коллинеарной номограммы, т. е. в которой носителями масштабов являются равноудалённые параллельные прямые.

Но и более специальные квази-арифметические средние и квази-линейные функции, рассмотренные выше, заслуживают внимания с точки зрения номографии: всякую квази-линейную функцию можно представить номограммой с параллельными носителями, масштабы которых подобны, а всякую квази-линейную среднюю — такой-же номограммой с равными масштабами, начальные точки которых лежат на одной прямой; наконец, квази-арифметические средние представимы такими-же номограммами, носители которых, сверх того, равноудалены друг от друга (см. [12]). Доказательства этих теорем, вообще, нетрудные. Уравнение, выражающее квази-линейность, подвергается двукратному частному дифференцированию, соответственно подобранному. Так получаются вышеупомянутые дифференциальные уравнения. Двукратно интегрируя такое дифференциальное уравнение, применяя теорему об условии обращения якобиана в нуль и, учитывая начальные условия, устанавливается квази-линейность решения. Аналогично доказывается, что эти дифференциальные уравнения и начальные условия вытекают из бисимметрии (и упомянутых добавочных условий) путём двукратного дифференцирования по соответственно подобранным переменным и подстановки одинаковых значений за те или другие переменные (см. [12] и [16]).

Ход такого доказательства весьма удобно проследить на примере следующей неопубликованной теоремы (являющейся частичным ответом на вопрос **P 145**, поставленный в конце § 2):

Теорема 8. *Для того, чтобы функция $M(x,y)$ была квази-линейною среднею, необходимо и достаточно, чтобы она обладала свойством автодистрибутивности* (D)[1]), *была строго монотонна и имела непрерывные производные второго порядка.*

Эта теорема будет мною выведена из следующей теоремы Феньё [16], которая упомянута им без доказательства и, поэтому, будет здесь предварительно доказана:

Теорема 9. *Для того, чтобы строго монотонная и двукратно непрерывно дифференцируемая функция $M(x,y)$ была квази-линейною среднею, необходимо и достаточно совместное выполнение ею условий* (ii), (14)[2]) *и дифференциально-функционального уравнения*

$$M_{11}[M(x,y),M(x,y)]\,M_1(x,y)+pq\frac{M_{11}(x,y)}{M_1(x,y)}=\varphi(x), \tag{20}$$

[1]) См. выше, стр. 40.
[2]) См. выше, стр. 43.

где $p+q=1$. *Тогда-же*

$$f(x)=\int_0^x \exp\left(\frac{1}{pq}\int_0^x \varphi(x)\,dx\right)dx=\int_0^x \exp\left(\frac{1}{pq}\int_0^x M_{11}(x,x)\,dx\right)dx. \tag{21}$$

Доказательство. Необходимость условий выводится легко из вида (6) квази-линейной средней. Для вывода их достаточности заключаем из (14), подставляя $y=x$ в (20), что

$$\varphi(x)=M_{11}(x,x), \tag{22}$$

вследствие чего (20) принимает вид

$$\frac{1}{pq}M_{11}[M(x,y),M(x,y)]\,M_1(x,y)+\frac{M_{11}(x,y)}{M_1(x,y)}=\frac{1}{pq}M_{11}(x,x). \tag{23}$$

Покажем, что левая сторона уравнения (23) является производною по x выражения

$$I=\frac{1}{pq}\int_0^{M(x,y)} M_{11}(x,x)\,dx+\log M_1(x,y).$$

В самом деле,

$$\frac{\partial}{\partial x}I=\frac{1}{pq}M_{11}[M(x,y),M(x,y)]\,M_1(x,y)+\frac{M_{11}(x,y)}{M_1(x,y)}.$$

Так как интеграл левой стороны уравнения (23) по x может отличаться от его правой стороны лишь членом, зависящим только от y, то мы получаем

$$\log\left[\exp\left(\frac{1}{pq}\int_0^{M(x,y)} M_{11}(x,x)\,dx\right)M_1(x,y)\right]=\frac{1}{pq}\int_0^x M_{11}(x,x)\,dx+\psi(y),$$

то есть

$$\exp\left(\frac{1}{pq}\int_0^{M(x,y)} M_{11}(x,x)\,dx\right)M_1(x,y)=\exp\left(\frac{1}{pq}\int_0^x M_{11}(x,x)\,dx\right)\Psi(y), \tag{24}$$

где $\Psi(y)=e^{\psi(y)}$. Подставляя $y=x$, мы заключаем по (ii) и (14), что

$$\exp\left(\frac{1}{pq}\int_0^x M_{11}(x,x)\,dx\right)p=\exp\left(\frac{1}{pq}\int_0^x M_{11}(x,x)\,dx\right)\Psi(x),$$

т. е. что

$$\Psi(x)=p. \tag{25}$$

В силу (23) и (24)

$$\exp\left(\frac{1}{pq}\int_0^{M(x,x)} M_{11}(x,x)\,dx\right) M_1(x,y) = p\exp\left(\frac{1}{pq}\int_0^{x} M_{11}(x,x)\,dx\right).$$

Покажем в свою очередь, что левая сторона этого уравнения является производною по x интеграла

$$J = \int_0^{M(x,y)} \exp\frac{1}{pq}\left(\int_0^t M_{11}(x,y)\,dx\right) dt.$$

В самом деле,

$$\frac{\partial}{\partial x} J = \exp\left(\int_0^{M(x,x)} M_{11}(x,x)\,dx\right) M_1(x,y),$$

следовательно

$$\int_0^{M(x,y)} \exp\left(\frac{1}{pq}\int_0^t M_{11}(x,x)\,dx\right) dt = p\int_0^x \exp\left(\frac{1}{pq}\int_0^t M_{11}(x,x)\,dx\right) dt + g(y).$$

Подставляя тут $x=y$, заключаем по (ii), что

$$g(y) = q\int_0^y \exp\left(\frac{1}{pq}\int_0^t M_{11}(t,t)\,dt\right) dt,$$

где $p+q=1$. В силу последних двух формул имеем

$$\int_0^{M(x,y)} \exp\left(\frac{1}{pq}\int_0^t M_{11}(t,t)\,dt\right) dt =$$

$$= p\int_0^x \exp\left(\frac{1}{pq}\int_0^t M_{11}(t,t)\,dt\right) dt + q\int_0^y \exp\left(\frac{1}{pq}\int_0^t M_{11}(t,t)\,dt\right) dt.$$

Пусть

(26) $$f(x) = \int_0^x \exp\left(\frac{1}{pq}\int_0^t M_{11}(t,t)\,dt\right) dt.$$

Тогда предыдущая формула может быть написана в виде

$$f[M(x,y)] = pf(x) + qf(y),$$

т. е. и в виде (6), определяющем квази-линейные средние. Наконец, формула (21) вытекает из (22) и (26). Теорема доказана.

Теорема 8 выводится из неё следующим образом (если ограничиться и здесь доказательством достаточности условий, ибо их необходимость очевидна):

Подставляя $x_2 = y = x$ в (D), получаем

$$M[M(x,x),x] = M[M(x,x),M(x,x)],$$

откуда следует рефлексивность (ii) ввиду строгой монотонности функции $M(x,y)$. Дифференцируя (D) по x_1, находим

(27) $$M_1[M(x_1,x_2),y]M_1(x_1,x_2) = M_1[M(x_1,y),M(x_2,y)]M_1(x_1,y).$$

Подстановка $x_1 = x_2 = x$ в (27) даёт

$$M_1(x,y)M_1(x,x) = M_1[M(x,y),M(x,y)]M_1(x,y);$$

следовательно $M_1(x,x) = M_1[M(x,y),M(x,y)]$, откуда следует (14) опять-таки ввиду строгой монотонности функции $M(x,y)$. Дифференцируя теперь (ii) по x, находим $M_1(x,x)+M_2(x,x)=1$, откуда заключаем по (14), что

$$M_2(x,x) = 1-p = q.$$

Наконец, дифференцируя (27) по x_1, получаем

$$M_{11}[M(x_1,x_2),y]M_1^2(x_1,x_2) + M_1[M(x_1,x_2),y]\,M_{11}(x_1,x_2) =$$

$$= M_{11}[M(x_1,y),M(x_2,y)]\,M_1^2(x_1,y) + M_1[M(x_1,y),M(x_2,y)]\,M_{11}(x_1,y).$$

Подставляя здесь $x_1=x_2=x$, заключаем на основании (ii) и (14), что

$$M_{11}(x,y)p^2 + M_1(x,y)M_{11}(x,x) = M_{11}(M(x,y),M(x,y))\,M_1^2(x,y) + p\,M_{11}(x,y),$$

следовательно, учитывая равенство $1-p=q$, что

(28) $$M_{11}(M(x,y),M(x,y))M_1(x,y) + pq\frac{M_{11}(x,y)}{M_1(x,y)} = M_{11}(x,x) = \varphi(x).$$

Но это значит, что левая сторона равенства (28) зависит только от x. Теперь, имея в виду (ii), (14) и (28), остаётся применить теорему 9, точнее говоря, лишь достаточность высказанных в ней условий; этим доказательство теоремы 8 и заканчивается.

Связь её с проблемой **P 145** (стр. 40) была там-же указана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Интересно отметить некоторые характерные черты описанных здесь исследований.

Так напр. намеченная Колмогоровым аксиоматическая теория средних стала продвигаться вперёд необычайно широким фронтом (это видно уже из далеко не полной библиографии, охватывающей 56 работ) и сплеталась в своём развитии с самыми разнообразными отраслями математики (математическая статистика, функциональные уравнения, функциональные операции, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с частными производными, непрерывные группы, теория функций вещественного и комплексного переменного, дифференциальное и интегральное исчисление, аналитическая геометрия, теория квадратичных форм, сходимости рядов, неравенств и др.). На том-же примере мы наблюдаем нередкое в истории математики явление, которое состоит в том, что математическая теория, исходящая из практики (в данном случае из статистики) и разветвляющаяся в многих более или менее отвлеченных направлениях, находит в своём дальнейшем развитии новые применения к совершенно другим областям прикладной математики, чем исходная (в данном случае к номографии).

Нами было уже отмечено различие подхода в различных научных центрах к одним и тем-же проблемам теории средних. В то время, как венгерские математики стремились к симметрии отдельных, возможно мало содержательных условий, имея в виду обобщения на более обширные классы функций, в Польше старались прежде всего уменьшить число условий, жертвуя симметрией для обогащения содержательности.

Аналогичным примером может служить система аксиом абелевых групп, принадлежащая Тарскому. В обыкновенном изложении кроме аксиом, обеспечивающих замкнутость, наличие единицы и существование обратных элементов, вводятся аксиомы ассоциативности, $(ab)c=a(cb)$, и коммутативности, $ab=ba$. Тарский заменил эти две аксиомы одной, $(ab)c=a(cb)$, из которой обе они вытекают при условии существования единицы. В связи с этим следует заметить, что коммутативность непрерывных и монотонных операций, определённых для действительных чисел, вытекает из ассоциативности даже при отсутствии единицы (см. [8]), а для некоторых классов функций, напр. для переносов (трансляций), можно отбросить и непрерывность или монотонность (см. [5] и [18]).

На перекрестке обоих подходов к проблематике теории средних лежит впервые здесь исследованная формула (D). Не говоря уже об её симметрии и алгебраически важном свойстве дистрибутивности, она содержит довольно много, напр. рефлексивность (ii).

Различие между направлениями исследований венгерских и польских математиков объясняется по моему тем, что у первых, как и у Колмогорова, предметом изучения были системы условий, характеризующих средние и более общие классы функций, а у вторых предметом большей части исследований служили решения попутно появляющихся, более специальных функциональных уравнений с несколькими переменными.

При этом обнаружилось то сравнительно примитивное состояние, в котором всё ещё находится теория функциональных уравнений, напр. по сравнению с теорией дифференциальных уравнений.

На первых ступенях развития теории дифференциальных уравнений приходилось решать отдельно всякое дифференциальное уравнение, которое выдвигала практика. Лишь потом была создана классификация этих уравнений и сложились общие правила решения уравнений каждого типа. Ныне интересует нас более глубокая структура решений.

Сегодня на первых-же ступенях развития находится теория функциональных уравнений: всякое выдвинутое практикой уравнение приходится решать в отдельности и нет у нас общих методов решения. Лишь в некоторых случаях мы можем успешно руководиться аналогией и решать близкие по виду функциональные уравнения одним и тем же методом; но у нас нет критериев, определяющих классы уравнений, разрешимых по данному методу. Напомним, что и некоторые дифференциальные уравнения с частными производными (также не составляющие определённого класса) можно решать без общих методов, а пользуясь лишь теоремой об условиях превращения якобиана в нуль, и отметим, что как раз в настоящей работе появлялись уравнения, обладающие этим свойством (см. стр. 46). Но поскольку речь идёт о функциональных уравнениях, мы не в состоянии ответить даже на столь тривиальный для дифференциальных уравнений вопрос, от скольких и от каких именно данных (постоянных и функций) зависит общее решение и какими начальными условиями определяются отдельные частные решения. Ближайшей задачей в развитии теории функциональных уравнений должно быть, повидимому, выяснение этого вопроса и построение общих методов решения.

До этого недостаток в них и значительно высшая ступень развития теории дифференциальных уравнений (даже с частными производными) вполне оправдывает наш приём, состоящий в приведении функциональных уравнений к дифференциальным. Однако, несмотря на свои преимущества, этот приём ведёт к существенным ограничениям: условия непрерывности и монотонности, обычно достаточные для функциональных уравнений, недостаточны для дифференциальных и к ним приходится добавлять предположения о многократной дифференцируемости. Правда, благодаря вступлению на почву дифференциальных уравнений, можно не только доказать существование, но и установить вид линеаризующей функции; однако, во многих случаях, в которых этот вид имеет практическое значение, удаётся вывести его и непосредственно, не прибегая к замене функциональных уравнений дифференциальными (см. [5], [15] и [18]).

Наиболее целесообразное указание насчёт того, когда сто́ит сводить функциональное уравнение к дифференциальному (или, быть может, функционально-дифференциальному, или интегральному), должно иметь в виду прежде всего — как мне кажется — следующие два случая:

1° когда непосредственные методы не разработаны и приведение функционального уравнения к другому функциональному, уже решённому или легче поддающемуся решению, слишком затруднительно;

2° когда подробная разработка непосредственного метода гораздо труднее приведения функционального уравнения к легко разрешимому дифференциальному.

Примером последнего случая является нерешённое до сих пор функциональное уравнение (D), которое удалось решить здесь приведением его к функционально-дифференциальному, хотя решение было бы алгебраически более ценным, если бы оно могло обойтись без дифференцирования. Поэтому интересно было бы доказать соответствующую теорему без предположения дифференцируемости.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В последние годы Госсу [39-42] получил, в частности путём приведения функциональных уравнений к дифференциальным, новые результаты, из которых следующие достойны, по моему, особого внимания:

1. Система уравнений двусторонней дистрибутивности

$$F[F(x,y),z]=F[F(x,z),F(y,z)],$$
$$F[z,F(x,y)]=F[F(z,x),F(z,y)]$$

имеет общее решение вида

$$F(x,y)=f^{-1}[pf(x)+qf(y)],$$

где $p+q=1$, причём предполагается, что функция $F(x,y)$ — непрерывная, строго монотонная и имеет непрерывные производные (см. [40]).

2. Обобщённое функциональное уравнение автодистрибутивности

$$F[G(x,y),z]=G[F(x,z),F(y,z)]$$

имеет решение при предположении строгой монотонности и наличия непрерывных производных второго порядка (см. [41]).

3. Функциональное уравнение

$$F[G(x,y),H(u,v)]=K[L(x,u),M(y,v)],$$

являющееся сильным обобщением уравнения бисимметрии, имеет решение при предположении строгой монотонности и непрерывной дифференцируемости (см. [39, 42]).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Aczél, *The notion of mean values*, D. K. Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger 19 (1946), p. 83-86.

[2] — *A generalisation of the notion of convex functions*, ibidem 19 (1946), p. 87-90.

[3] — *On mean values and operations defined for two variables*, ibidem 20 (1947), p. 37-40.

[4] — *On mean values*, Bulletin of the American Mathematical Society 54 (1948), p. 392-400.

[5] — *Un problème de M. L. Fejèr sur la construction de Leibniz*, Bulletin des Sciences Mathématiques (2)72 (1948), p. 39-45.

[6] — *Über eine Klasse von Funktionalgleichungen*, Commentarii Mathematici Helvetici 21 (1948), p. 247-252.

[7] — *Sur une équation fonctionnelle*, Publications de l'Institut Mathématique de Belgrade 2 (1948), p. 257-262.

[8] — *Sur les opérations définies pour nombres réels*, Bulletin de la Société Mathématique de France 76 (1948), p. 59-64.

[9] — *New proof and extension of St. Fenyö theorem on mean values of functions*, D. K. Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger 22 (1949), p. 1-4.

[10] — *On some sequences defined by recurrence*, Acta Scientiarum Mathematicarum 13 (1949-1950), p. 136-139.

[11] — *Einige aus Funktionalgleichungen zweier Veränderlichen ableitbare Differentialgleichungen*, ibidem 13 (1950), p. 179-189.

[12] — *Zur Charakterisierung nomographisch einfach darstellbarer Funktionen durch Differential- und Funktionalgleichungen*, ibidem 12 A (1950), p. 73-80.

[13] — *Some remarks on recurrent sequences*, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 23 (1950), p. 144-149.

[14] — *Über einparametrige Transformationen*, Publicationes Mathematicae 1 (1950), p. 243-247.

[15] — *On quasi-linear functional operations*, ibidem 1 (1950), p. 248-250.

[16] — und St. Fenyö, *Über die Theorie der Mittelwerte*, Acta Scientiarum Mathematicarum 11 (1948), p. 239-245.

[17] — St. Fenyö et J. Horváth, *Sur certaines classes de fonctionnelles*, Portugaliae Mathematica 8 (1949), p. 1-11.

[18] — L. Kalmár et J. G.-Mikusiński, *Sur l'équation de translation*, Studia Mathematica 12 (1951), p. 112-116.

[19] G. Aumann, *Konvexe Funktionen und die Induktion bei Ungleichungen zwischen Mittelwerten*, Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften 1933, p. 403-415.

[20] — *Grundlegung der Theorie der analytischen Mittelwerte*, ibidem 1934, p. 45-81.

[21] — *Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente I*, Mathematische Annalen 109 (1934), p. 235-253.

[22] — *Über die Struktur der analytischen Konvexitäten*, Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften 1935, p. 71-80.

[23] — *Über den Mischalgorithmus analytischer Mittelwerte*, Mathematische Zeitschrift 39 (1935), p. 625-629.

[24] — *Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente II*, Mathematische Annalen 110 (1935), p. 713-730.

[25] — *Über die stetigen konvexen und bikonvexen Funktionen*, ibidem 111 (1935), p. 197-208.

[26] — *Ungleichungen und konvexe Funktionen*, Haupt-Auman-Pauc, Differential- und Integralrechnung I, Berlin 1948, p. 151-163.

[27] M. Dehn, *Bögen und Sehnen im Kreis, Paare von Grössensystemen*, D. K. Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger 13 (1940), p. 103-106.

[28] St. Fenyö, *A középértékek elméletéről* (Disszertáció), Budapest 1945.

[29] — *The inversion of an algorithm*, D. K. Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger 19 (1946), p. 91-94.

[30] — *The notion of mean values of functions*, ibidem 21 (1948), p. 168-171.

[31] — *Über den Mischalgorithmus der Mittelwerte*, Acta Scientiarum Mathematicarum 13 (1949), p. 36-42.

[32] B. de Finetti, *Sul concetto di media*, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari 2 (1931), p. 369-396.

[33] L. Fuchs, *On mean systems*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 1 (1950), p. 303-320.

[34] S. Gołąb, *Über eine Funktionalgleichung der Theorie der geometrischen Objekte*, Wiadomości Matematyczne 45 (1938), p. 97-137.

[35] J. Horváth, *On a theorem of Børge Jessen I*, D. K. Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger 20 (1947), p. 45-47.

[36] — *On a theorem of Børge Jessen II*, ibidem 20 (1947), p. 48-51.

[37] — *Sur le rapport entre les systèmes de postulats caractérisant les valeurs moyennes quasi-arithmétiques symétriques*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences 225 (1947), p. 1256-1257.

[38] — *Note sur un problème de L. Fejér*, Bulletin de l'École Polytechnique de Jassy 3 (1948), p. 164-168.

[39] M. Hosszu, *A biszimmetria függvényegyenletéhez*, A Magyar Tudományos Akadémia, Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei 1 (1952), p. 335-342.

[40] — *On the functional equation of autodistributivity*, Publicationes Mathematicae 3 (1953), p. 83-87.

[41] *On the functional equations of distributivity*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 4 (1953), p. 159-167.

[42] — *A generalization of the functional equation of bisymmetry*, Studia Mathematica 14 (1953), p. 100-105.

[43] L. W. V. Jensen, *Om konvekse Funktioner og Uligheder imellem Middelvaerdier*, Matematisk Tidskrift 16 (1905), p. 49-68.

[44] — *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Mathematica 30 (1906), p. 175-193.

[45] B. Jessen, *Über die Verallgemeinerungen des arithmetischen Mittels*, Acta Scientiarum Mathematicarum 5 (1931), p. 108-116.

[46] — *Bemaerkninger om konvekse Funktioner og Uligheder imellem Middelvaerdier I*, Matematisk Tidsskrift 2 (1931), p. 17-28.

[47] — *Bemaerkninger om konvekse Funktioner og Uligheder imellem Middelvaerdier II*, ibidem 3-4 (1931), p. 1-12

[48] — *Om Uligheder imellem Potensmiddelvaerdier*, ibidem 31 (1933), p. 1-19.

[49] T. J. Kitagawa, *On some class of weighted means*, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan 16 (1934), p. 117-126.

[50] B. Knaster, *Sur une équivalence pour les fonctions*, Colloquium Mathematicum 2 (1949), p. 1-4.

[51] K. Knopp, *Neuere Sätze über Reihen mit positiven Gliedern*, Mathematische Zeitschrift 30 (1929), p. 387-413.

[52] A. N. Kolmogoroff, *Sur la notion de moyenne*, Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei 6-12 (1930), p. 388-391.

[53] J. G.-Mikusiński, *Sur les moyennes de la forme* $\psi^{-1}[\Sigma q\psi(x)]$, Studia Mathematica 10 (1948), p. 90-96.

[54] M. Nagumo, *Über eine Klasse der Mittelwerte*, Japanese Journal of Mathematics 7 (1930), p. 71-79.

[55] C. Ryll-Nardzewski, *Sur les moyennes*, Studia Mathematica 11 (1949), p. 31-37.

[56] P. Veress, *A középérték fogalmáról*, Mathematikai és Fizikai Lapok 43 (1936), p. 46-60.