EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE HIRSCHMAN-WIDDER'SCHEN FUNKTIONEN $H_{n,k}(x)$

VON

Z. ŁUSZCZKI, J. MIKUSIŃSKI, K. URBANIK, J. WLOKA UND Z. ZIELEŹNY (WROCŁAW) [1])

1. In dieser kurzen Note definieren wir auf eine andere und einfachere Weise die Funktionen $H_{n,k}(x)$, die in der Arbeit von Hirschman-Jr. und Widder [1] eingeführt wurden [2]). Unsere Definition erlaubt es die grundlegenden Eigenschaften dieser Funktionen kurz herzuleiten. Die Gleichwertigkeit unserer Definition mit der Definition von I. I. Hirschman, Jr. und D. V. Widder zeigen wir im 2. Teil dieser Note.

Um die Operatorenrechnung [2], bzw. die Laplace'sche Transformation anwenden zu können, betrachten wir statt der Funktionen $H_{n,k}(x)$ $(-\infty<x\leqslant 0)$ die Funktionen $H_{n,k}(-x)$, definiert auf der positiven Halbgeraden $\langle 0,+\infty)$. Wir definieren:

$$H_{n,k}(-x)=a_{k+1}\dots a_n e^{-a_k x}*\dots*e^{-a_n x} \qquad (n=0,1,2,\dots;k=0,1,\dots,n-1),$$
(1)
$$H_{n,n}(-x)=e^{-a_n x},$$

wobei $0=a_0<a_1<\dots$ eine beliebige festgelegte Zahlenfolge und $0\leqslant x<\infty$ ist. (Unter dem $*$-*Produkt zweier Funktionen* f,g verstehen wir die Faltung

$$g(x)*f(x)=\int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt.)$$

Für $0\leqslant x<\infty$ *ist* $H_{n,k}(-x)\geqslant 0$, denn die Faltung zweier, bzw. mehrerer positiver Funktionen ist positiv.

Für $k=0,1,\dots,n$ *haben wir die Identität*

$$(2)\qquad e^{-a_k x}=H_{n,n}(-x)+\left(1-\frac{a_k}{a_n}\right)H_{n,n-1}(-x)+\dots$$
$$+\left(1-\frac{a_k}{a_n}\right)\dots\left(1-\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)H_{n,k}(-x).$$

---

[1]) Diese Note ist das Ergebnis einer Diskussion der Teilnehmer des Analysis-Seminariums des Mathematischen Instituts der Polnischen Akademie der Wissenschaften, welches von J. Mikusiński geleitet wird.

[2]) Analoge Funktionen befinden sich in der Arbeit von J. Mikusiński [3].

Da der Funktion $H_{n,k}(-x)$ der Operator

$$H_{n,k}=\frac{a_{k+1}\dots a_n}{(s+a_k)\dots(s+a_n)}$$

entspricht (siehe [2], Seite 30), ist diese Identität folgender Operatorenidentität gleichwertig:

$$(3)\quad 1=(s+a_k)\left[\frac{1}{s+a_n}+\frac{(a_n-a_k)}{(s+a_n)(s+a_{n-1})}+\frac{(a_n-a_k)(a_{n-1}-a_k)}{(s+a_n)(s+a_{n-1})(s+a_{n-2})}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{(a_n-a_k)(a_{n-1}-a_k)\dots(a_{k+1}-a_k)}{(s+a_n)(s+a_{n-1})\dots(s+a_k)}\right].$$

Die Richtigkeit der letzten Identität sieht man so ein: die rechte Seite von (3) ist gleich

$$(4)\qquad \frac{1}{s+a_n}\left(s+a_k+\frac{a_n-a_k}{s+a_{n-1}}\left[s+a_k+\frac{a_{n-1}-a_k}{s+a_{n-2}}\left\{s+a_k+\dots\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\dots+\frac{a_{k+2}-a_k}{s+a_{k+1}}\left[s+a_k+\frac{a_{k+1}-a_k}{s+a_k}(s+a_k)\right]+\dots\right\}\right]\right).$$

Nun reduziert sich aber der letzte Klammerausdruck von (4) zu $s+a_{k+1}$, der vorletzte zu $s+a_{k+2},\dots$, der erste endlich zu $s+a_n$. Der Ausdruck (4) ist also gleich $(s+a_n)/(s+a_n)=1$, w. z. b. w.

Setzen wir in (2) $k=0$, so erhalten wir

$$(5)\qquad 1=\sum_{i=0}^{n}H_{n,i}(-x).$$

Daraus und aus $H_{n,k}(-x)\geqslant 0$ für $0\leqslant x<\infty$ folgt, daß

$$(6)\qquad H_{n,k}(-x)\leqslant 1 \quad \text{für} \quad n=0,1,2,\dots;\ k=0,1,\dots,n;\ 0\leqslant x<\infty.$$

2. *Die Funktion* $H_{n,k}(-x)$ *ist die einzige Lösung der Differentialgleichung*

$$(7)\qquad \sum_{i=0}^{n-k}\sigma_{n,k}^{i}y^{(n-k-i)}(x)=\sigma_{n,k}^{n-k}e^{-a_k x}, \qquad k\neq n,$$

die den Anfangsbedingungen

$$(8)\qquad y(0)=y'(0)=\dots=y^{(n-k-1)}(0)=0$$

genügt.

(Mit $\sigma_{n,k}^i$ bezeichnen wir die i-ten symmetrischen Funktionen der $a_{k+1},\ldots,a_n$ also $\sigma_{n,k}^0=1$, $\sigma_{n,k}^1=a_{k+1}+\ldots+a_n,\ldots,\sigma_{n,k}^{n-k}=a_{k+1}\ldots a_n$.)

Wenn wir die Operatorenrechnung anwenden (siehe [2], Seite 36), so sehen wir, daß die Differentialgleichung (7) mit den Anfangsbedingungen (8), der Operatorengleichung

$$(9)\qquad \sum_{i=0}^{n-k}\sigma_{n,k}^i s^{n-k-i} y=\frac{\sigma_{n,k}^{n-k}}{s+a_k}$$

gleichwertig ist. Da

$$\sum_{i=0}^{n-k}\sigma_{n,k}^i s^{n-k-i}=(s+a_{k+1})\ldots(s+a_n),$$

haben wir also

$$(10)\qquad y=\frac{\sigma_{n,k}^{n-k}}{(s+a_k)\ldots(s+a_n)}\qquad \text{oder}\qquad y(x)=a_{k+1}\ldots a_n e^{-a_kx}*\ldots*e^{-a_nx},$$

w. z. b. w.

Des Eindeutigkeitsatzes für Differentialgleichungen wegen, ist also die Hirschman-Widder'sche Definition der Funktionen $H_{n,k}$ obiger Definition gleichwertig.

ZITATENNACHWEIS

[1] I. I. Hirschman, Jr. und D. V. Widder, *Generalized Bernstein polynomials*, Duke Math. Journal 16 (1949), S. 433-438.

[2] J. Mikusiński, *Rachunek operatorów*, Warszawa 1953.

[3] — *On generalized power-series*, Studia Mathematica 12 (1951), S. 181-190.

О ТЕОРИИ СРЕДНИХ

Я. АЦЕЛЬ (ДЕБРЕЦЕН)

ВВЕДЕНИЕ

Аксиоматическая теория структуры средних ведёт своё начало от краткой работы Колмогорова [52], опубликованной в 1930 г. Вслед за ней появилось много работ по этой области, написанных главным образом польскими и венгерскими математиками. В этой статье излагаются мною результаты исследований, ведущихся в одном из различных направлений, и добавляется новый, ещё не опубликованный результат, связанный с дальнейшей проблемой.

Основной задачей теории средних, намеченной Колмогоровым, является нахождение общих характерных свойств т. н. *квази-арифметических средних*, т. е. функций нескольких переменных вида

$$(1)\qquad M_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f^{-1}\left[\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}\right],$$

в частности функций двух переменных вида

$$(2)\qquad M(x,y)=f^{-1}\left[\frac{f(x)+f(y)}{2}\right],$$

где $f(x)$ — непрерывная, строго монотонная функция, а f^{-1} — обратная к ней. Класс функций этого вида имеет большое практическое значение, так как он охватывает собою большинство средних, встречающихся на практике, напр. среднее арифметическое $[f(x)=x]$, геометрическое $[f(x)=\log x]$, квадратичное $[f(x)=x^2]$, степенное $[f(x)=x^s]$, экспоненциальное $[f(x)=e^x]$ и т. д.

Направления исследований по теории средних успели в течение двадцати лет настолько разветвиться, что автор краткого обзора, желающий встать в своём изложении на единую точку зрения, принуждён отречься от рассмотрения ряда результатов, примыкающих к этой теории. Так напр. мною не будет даже вкратце упомянуто значительное количество работ, посвящённых специальным средним, а в том числе ни исследования Ауманна [20, 22, 24], относящиеся к средним значениям функций комплексных переменных, ни имеющие