meter less than $\varepsilon>0$ and such that $\mathrm{Fr}(\overline{U})$ is an AR. We have to prove that p is an h. l. p.

Let r be a retraction of $\overline{U}$ to $\mathrm{Fr}(\overline{U})$. Define

$$f(x)=\begin{cases} r(x) & \text{if } x\epsilon\overline{U}, \\ x & \text{if } x\epsilon K-\overline{U}. \end{cases}$$

Then $f(x)$ is a continuous mapping of K into itself, $f(K)$ does not contain p and $\varrho(x,f(x))<\varepsilon$. Hence p is an h. l. p.

Necessity proof. Let p be an h. l. p. and let U be a star-shaped neighbourhood of p. We have to prove that $\mathrm{Fr}(\overline{U})$ is an AR.

Since p is an h. l. p. there exists a continuous deformation $f(x,t)$ of U such that $f(x,0)=x$, $f(x,1)=x$ for $x\epsilon\mathrm{Fr}(\overline{U})$, $f(x,t)\epsilon\overline{U}$, and p is not in $f(\overline{U},1)$. Let r be a retraction of $\overline{U}-(p)$ to $\mathrm{Fr}(\overline{U})$. Then $rf(x,1)$ is a retraction of $\overline{U}$ to $\mathrm{Fr}(\overline{U})$. Since $\overline{U}$ is an AR, so is also $\mathrm{Fr}(\overline{U})$.

REFERENCES

[1] K. Borsuk and J. W. Jaworowski, *On labil and stabil points*, Fund. Math. 39 (1952), p. 159-175.

[2] H. Noguchi, *A characterization of homotopically labil points*, Kodai Mathematical Seminar Reports 1 (1954), p. 13-16.

[3] A. Kosiński, *A topological characterization of 2-polytopes*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 2 (1954), p. 321-323.

SUR LA STRUCTURE DES ENSEMBLES DE NIVEAU DES FONCTIONS RÉELLES À UNE VARIABLE

PAR

Á. CSÁSZÁR (BUDAPEST)

1. On considère déjà en Analyse élémentaire une classification de l'allure d'une fonction réelle $f(x)$ de la variable réelle x au voisinage d'un point x_0 à l'aide de la structure locale des ensembles de niveau

$$\underset{x}{E}[f(x)>f(x_0)],\quad \underset{x}{E}[f(x)\geqslant f(x_0)],$$
$$\underset{x}{E}[f(x)<f(x_0)]\quad \text{et}\quad \underset{x}{E}[f(x)\leqslant f(x_0)].$$

Les faits que $f(x)$ est croissante, décroissante, non-décroissante ou non-croissante au point x_0, ou qu'elle a en ce point un maximum (au sens strict ou au sens large) etc. peuvent être caractérisés par le type de la structure locale au point x_0 des ensembles de niveau mentionnés; or, l'étude de ces types de points est un des problèmes principaux de la théorie élémentaire des fonctions réelles à une variable.

Le but de cette note est de donner deux classifications différentes de l'allure d'une fonction $f(x)$ au voisinage d'un point x_0 d'après la structure locale de ses ensembles de niveau et d'examiner la question quels, parmi les différents types d'allure, sont exceptionnels d'un certain point de vue et quels peuvent être considérés ordinaires. Les classifications que nous allons donner dans ce qui suit et les résultats que nous allons obtenir ont leur analogues dans la théorie des fonctions réelles à plusieurs variables réelles; nous reviendrons sur ces généralisations dans un autre article (voir [2]).

2. Désignons par $\mathfrak{N}$ une famille d'ensembles situés sur la droite $-\infty<x<+\infty$ qui jouit des propriétés suivantes:

(2.1) Si $A\epsilon\mathfrak{N}$ et $B\subset A$, on a $B\epsilon\mathfrak{N}$;

(2.2) Si $A_k\epsilon\mathfrak{N}$ $(k=1,2,\ldots)$, on a $\sum_{k=1}^{\infty}A_k\epsilon\mathfrak{N}$.

Nous désignons par $\overline{\mathfrak{N}}$ la famille des ensembles qui sont de la forme $N+H$, où $N\epsilon\mathfrak{N}$ et H est dénombrable. La famille $\overline{\mathfrak{N}}$ jouit évidemment des propriétés analogues à celles (2.1) et (2.2). Remarquons que la famille $\overline{\mathfrak{N}}$ peut être différente de $\mathfrak{N}$, mais qu'elle coïncide avec elle lorsque $\mathfrak{N}$ contient tous les ensembles qui n'ont qu'un seul point.

Considérons une fonction réelle et finie quelconque $f(x)$, définie (pour simplifier les raisonnements) pour $-\infty<x<+\infty$. Convenons de dire que

(a) $f(x)$ est *croissante du côté droit au point* x_0 par rapport à la famille $\mathfrak{N}$ (ou brièvement: $f(x)$ est $C_+(\mathfrak{N})$ au point x_0), si l'on a

$$\mathop{E}_{x}[f(x)\leqslant f(x_0),\, x_0<x<x_0+\delta]\in\mathfrak{N}$$

pour un $\delta>0$ convenable;

(b) $f(x)$ est *non-décroissante du côté droit au point* x_0 par rapport à la famille $\mathfrak{N}$ ($f(x)$ est $C_+^*(\mathfrak{N})$ au point x_0), si l'on a

$$\mathop{E}_{x}[f(x)<f(x_0),\, x_0<x<x_0+\delta]\in\mathfrak{N}$$

pour un $\delta>0$ convenable et

$$\mathop{E}_{x}[f(x)\leqslant f(x_0),\, x_0<x<x_0+\delta]\,\bar{\in}\,\mathfrak{N}$$

pour tout nombre $\delta>0$;

(c) $f(x)$ est *oscillante du côté droit au point* x_0 par rapport à la famille $\mathfrak{N}$ ($f(x)$ est $O_+(\mathfrak{N})$ au point x_0), si l'on a pour tout nombre $\delta>0$

$$\mathop{E}_{x}[f(x)<f(x_0),\, x_0<x<x_0+\delta]\,\bar{\in}\,\mathfrak{N} \quad \text{et} \quad \mathop{E}_{x}[f(x)>f(x_0),\, x_0<x<x_0+\delta]\,\bar{\in}\,\mathfrak{N}.$$

On donne un sens d'une manière analogue aux expressions „$f(x)$ est *décroissante du côté droit au point* x_0 par rapport à la famille $\mathfrak{N}$" ($f(x)$ est $D_+(\mathfrak{N})$ au point x_0) et „$f(x)$ est *non-croissante du côté droit au point* x_0 par rapport à $\mathfrak{N}$" ($f(x)$ est $D_+^*(\mathfrak{N})$ au point x_0), en replaçant dans les définitions (a) et (b) les inégalités $f(x)<f(x_0)$ et $f(x)\leqslant f(x_0)$ par $f(x)>f(x_0)$ et par $f(x)\geqslant f(x_0)$ respectivement. Nous dirons enfin que $f(x)$ *est* $C_-(\mathfrak{N})$ *au point* x_0, si $f(-x)$ est $C_+(\mathfrak{N})$ au point $-x_0$, et on définit d'une façon semblable les propriétés $C_-^*(\mathfrak{N})$, $O_-(\mathfrak{N})$, $D_-(\mathfrak{N})$ et $D_-^*(\mathfrak{N})$.

En examinant l'allure de la fonction $f(x)$ du côté droit et du côté gauche du point x_0 en même temps, on obtient 25 types différents d'allure. Toutefois, ces 25 types se ramènent au 9 types suivants par un simple changement des rôles joués par le côté droit et le côté gauche ou de l'allure croissante et décroissante. Ces 9 types correspondent aux combinaisons suivantes:

(1) $C_+(\mathfrak{N})$, $C_-(\mathfrak{N})$; (2) $C_+^*(\mathfrak{N})$, $C_-(\mathfrak{N})$;
(3) $C_+^*(\mathfrak{N})$, $C_-^*(\mathfrak{N})$; (4) $C_+(\mathfrak{N})$, $D_-(\mathfrak{N})$;
(5) $C_+^*(\mathfrak{N})$, $D_-(\mathfrak{N})$; (6) $C_+^*(\mathfrak{N})$, $D_-^*(\mathfrak{N})$;
(7) $C_+(\mathfrak{N})$, $O_-(\mathfrak{N})$; (8) $C_+^*(\mathfrak{N})$, $O_-(\mathfrak{N})$;
(9) $O_+(\mathfrak{N})$, $O_-(\mathfrak{N})$.

Nous allons démontrer dans ce qui suit que, parmi les types d'allure (1) à (9), les types (1), (2), (3), (5), (6) et (8) sont exceptionnels dans un certain sens, à savoir que si la fonction $f(x)$ possède une allure d'un de ces types dans tout point d'un ensemble E, l'ensemble E est la somme de deux ensembles dont l'un contient relativement peu de points, tandis que l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ sur l'autre ne peut contenir beaucoup de valeurs.

Par contre, les types (4), (7) et (9) représentent des types d'allure ordinaires, p. ex. si la famille $\mathfrak{N}$ ne contient que l'ensemble vide. C'est évident pour le type (4); l'exemple suivant le montre pour le type (7):

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x \text{ est un nombre irrationnel,}\\ x+1 & \text{si } x \text{ est un nombre rationnel;}\end{cases}$$

en effet, cette fonction présente l'allure du type (7) en tout point irrationnel. Considérons enfin la fonction bien connue construite par H. Lebesgue qui ne prend que des valeurs situées entre 0 et 1, mais prend chacune de ces valeurs dans tout intervalle. Si on modifie la définition de cette fonction en lui attribuant la valeur 1/2 là où elle prend, d'après sa définition primitive, la valeur 0 ou 1, on obtient une fonction qui présente l'allure du type (9) en tout point.

3. Nous commençons par la démonstration d'un lemme.

(3.1) *Si* $f(x)$ *est* $C_+^*(\mathfrak{N})$ *ou* $(C_-^*(\mathfrak{N})$, *ou* $D_+^*(\mathfrak{N})$, *ou* $D_-^*(\mathfrak{N}))$ *en tout point de l'ensemble* E, *on a* $E=N+Q$, *où* $N\in\mathfrak{N}$ *et* $f(Q)$ *est dénombrable*[1].

Démonstration. Il suffit évidemment de considérer le cas où $f(x)$ est $C_+^*(\mathfrak{N})$ en tout point de E. Désignons par E_n l'ensemble des points x_0 tels que

(3.2) $$x_0\in E,$$

(3.3) $$\mathop{E}_{x}\left[f(x)<f(x_0),\, x_0<x<x_0+\frac{1}{n}\right]\in\mathfrak{N},$$

(3.4) $$\mathop{E}_{x}\left[f(x)=f(x_0),\, x_0+\frac{1}{n+1}\leqslant x<x_0+\frac{1}{n}\right]\bar{\in}\,\mathfrak{N}.$$

[1]) On désigne par $f(Q)$ l'ensemble des valeurs $f(x)$, $x\in Q$.

On a

$$(3.5) \qquad E=\sum_{n=1}^{\infty} E_n.$$

En effet, $x_0 \epsilon E$ étant donné, on trouve un nombre naturel n_0 tel que (3.3) est valable pour $n \geqslant n_0$; si (3.4) était en défaut pour tout $n \geqslant n_0$, on aurait pour tous ces entiers n

$$A_n=\underset{x}{E}\left[f(x)=f(x_0), x_0+\frac{1}{n+1} \leqslant x<x_0+\frac{1}{n}\right] \epsilon\, \mathfrak{N},$$

donc

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} A_n=\underset{x}{E}\left[f(x)=f(x_0), x_0<x<x_0+\frac{1}{n_0}\right] \epsilon\, \mathfrak{N},$$

et ceci entraînerait en vertu de (3.3) (qui est valable pour $n=n_0$)

$$\underset{x}{E}\left[f(x) \leqslant f(x_0), x_0<x<x_0+\frac{1}{n_0}\right] \epsilon\, \mathfrak{N},$$

ce qui est impossible d'après l'hypothèse que $f(x)$ est $C_+^*(\mathfrak{N})$ au point x_0. Donc, (3.2) implique (3.3) et (3.4) pour un entier n convenable.

Posons encore $E_{nm}=E_n \cdot [m/(n+2),(m+1)/(n+2)]$; on a évidemment

$$(3.6) \qquad E_n=\sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{nm}.$$

Considérons maintenant un point $\alpha \epsilon E_{nm}$. Pour $\alpha<\beta \epsilon E_{nm}$, on a d'après (3.3) (qui est valable pour $x_0=\beta$)

$$(3.7) \qquad A=\underset{x}{E}\left[f(x)<f(\beta), \beta<x<\beta+\frac{1}{n}\right] \epsilon\, \mathfrak{N}$$

et

$$\beta<\alpha+\frac{1}{n+1}<\alpha+\frac{1}{n}<\beta+\frac{1}{n},$$

donc, en vertu de (3.4), valable pour $x_0=\alpha$,

$$B=\underset{x}{E}\left[f(x)=f(\alpha), \beta<x<\beta+\frac{1}{n}\right]$$

$$\supset \underset{x}{E}\left[f(x)=f(\alpha), \alpha+\frac{1}{n+1} \leqslant x<\alpha+\frac{1}{n}\right] \bar{\epsilon}\, \mathfrak{N}.$$

On a par conséquent $B \bar{\epsilon}\, \mathfrak{N}$, ce qui entraîne l'impossibilité de la relation $B \subset A$; on a donc $f(\beta) \leqslant f(\alpha)$.

On a d'après ce qui précède $f(x) \leqslant f(\alpha)$ pour $x \epsilon E_{nm}$, $x>\alpha$. Puisque d'ailleurs, en vertu de (3.3) qui est valable pour $x_0=\alpha$,

$$\underset{x}{E}\left[f(x)<f(\alpha), \alpha<x<\alpha+\frac{1}{n}\right] \epsilon\, \mathfrak{N},$$

la partie de l'ensemble E_{nm} qui est située du côté droit du point α est la réunion d'un ensemble qui appartient à la famille $\mathfrak{N}$ et d'un autre sur lequel on a $f(x)=f(\alpha)$. En appliquant ce résultat à une suite $\{\alpha_k\} \epsilon E_{nm}$ qui converge vers la borne inférieure de E_{nm}, on obtient la relation $E_{nm}=N_{nm}+Q_{nm}$, où $N_{nm} \epsilon\, \mathfrak{N}$ et $f(Q_{nm})$ est dénombrable. La proposition s'ensuit en vertu de (3.5) et (3.6).

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du lemme que nous venons de démonter:

(3.8) *Si $f(x)$ est du type* (3) *en tout point d'un ensemble E, on a $E=N+H$, où $N \epsilon\, \mathfrak{N}$ et $f(H)$ est dénombrable.*

Sur les points du type (5), on peut énoncer le théorème suivant:

(3.9) *Si $f(x)$ est du type* (5) *en tout point d'un ensemble E, on a $E \epsilon\, \overline{\mathfrak{N}}$.*

D é m o n s t r a t i o n. D'après le lemme (3.1), on a $E=N+Q$, où $N \epsilon\, \mathfrak{N}$ et $f(Q)$ est dénombrable. On peut donc poser

$$Q=\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$$

de telle façon que $f(x)$ soit constante sur chacun des ensembles Q_n. Désignons par Q_{nm} l'ensemble des points x_0 tels que

$$(3.10) \qquad x_0 \epsilon Q_n,$$

$$(3.11) \qquad \underset{x}{E}\left[f(x) \geqslant f(x_0), x_0-\frac{1}{m}<x<x_0\right] \epsilon\, \mathfrak{N}.$$

Posons enfin

$$Q_{nmp}=Q_{nm} \cdot \left[\frac{p}{m+1}, \frac{p+1}{m+1}\right];$$

on a évidemment

$$(3.12) \qquad E=N+\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Q_{nmp}.$$

Considérons un point $\beta \epsilon Q_{nmp}$. La fonction $f(x)$ étant constante sur $Q_n \supset Q_{nmp}$, on a $f(\alpha)=f(\beta)$ pour $\alpha<\beta$, $\alpha \epsilon Q_{nmp}$. En appliquant la relation (3.11) pour $x_0=\beta$, on voit que la partie de Q_{nmp} qui est située du côté gauche du point β appartient à la famille $\mathfrak{N}$. En considérant une suite $\{\beta_k\} \epsilon Q_{nmp}$ qui converge vers la borne supérieure de Q_{nmp}, il s'ensuit que l'on obtient un ensemble appartenant à $\mathfrak{N}$ si l'on considère l'ensemble Q_{nmp}, abstraction faite peut-être de la borne supérieure de celui-ci. On a donc en tout cas $Q_{nmp}\epsilon\overline{\mathfrak{N}}$ et la proposition en est une conséquence immédiate en vertu de (3.12).

Un raisonnement analogue fournit le théorème suivant:

(3.13) *Si $f(x)$ est du type* (2) *en tout point d'un ensemble E, on a $E\epsilon\overline{\mathfrak{N}}$.*

La même conclusion est valable pour les points du type (8):

(3.14) *Si $f(x)$ est du type* (8) *en tout point d'un ensemble E, on a $E\epsilon\overline{\mathfrak{N}}$.*

Démonstration. En vertu du lemme (3.1), on peut poser

$$E=N+\sum_{n=1}^{\infty}Q_n,$$

où $N\epsilon\mathfrak{N}$ et $f(x)$ est constante sur chacun des ensembles Q_n. Considérons l'ensemble Q_{nm} des points x_0 tels que

$$x_0\epsilon Q_n, \tag{3.15}$$

$$\underset{x}{E}\left[f(x)<f(x_0),\, x_0<x<x_0+\frac{1}{m}\right]\epsilon\mathfrak{N}. \tag{3.16}$$

En posant enfin

$$Q_{nmp}=Q_{nm}\cdot\left[\frac{p}{m+1},\frac{p+1}{m+1}\right],$$

on a

$$E=N+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty}Q_{nmp}. \tag{3.17}$$

Les relations $\alpha\epsilon Q_{nmp}$, $\beta\epsilon Q_{nmp}$, $\alpha<\beta$ entraînent $f(\alpha)=f(\beta)$, donc

$$\underset{x}{E}[f(x)<f(\beta),\,\alpha<x<\beta]=\underset{x}{E}[f(x)<f(\alpha),\,\alpha<x<\beta].$$

D'après (3.16), qui est valable pour $x_0=\alpha$,

$$\underset{x}{E}[f(x)<f(\alpha),\,\alpha<x<\beta]\subset\underset{x}{E}\left[f(x)<f(\alpha),\,\alpha<x<\alpha+\frac{1}{m}\right]\epsilon\mathfrak{N},$$

d'où

$$\underset{x}{E}[f(x)<f(\beta),\,\alpha<x<\beta]\epsilon\mathfrak{N},$$

ce qui est impossible, $f(x)$ étant $O_-(\mathfrak{N})$ au point β. Vu cette contradiction, l'ensemble Q_{nmp} ne peut posséder qu'un point au plus et, d'après (3.17), on en obtient aisément la proposition.

On peut énoncer un théorème un peu moins simple sur les points du type (6):

(3.18) *Si $f(x)$ est du type* (6) *en tout point d'un ensemble E, cet ensemble est de la forme $E=N+R$, où $N\epsilon\overline{\mathfrak{N}}$, et on peut couvrir l'ensemble R avec une suite d'intervalles ouverts tels que $f(x)$ est constante sur chacun d'eux, exception faite des points d'un ensemble qui appartient à la famille $\mathfrak{N}$.*

Démonstration. D'après (3.1), on a de nouveau

$$E=N+\sum_{n=1}^{\infty}Q_n,$$

où $N\epsilon\mathfrak{N}$ et $f(x)=c_n$ pour $x\epsilon Q_n$. Soit Q_{nm} l'ensemble des points x_0 tels que

$$x_0\epsilon Q_n, \tag{3.19}$$

$$\underset{x}{E}\left[f(x)<f(x_0),\, x_0<x<x_0+\frac{1}{m}\right]\epsilon\mathfrak{N}, \tag{3.20}$$

$$\underset{x}{E}\left[f(x)>f(x_0),\, x_0-\frac{1}{m}<x<x_0\right]\epsilon\mathfrak{N}, \tag{3.21}$$

et posons

$$Q_{nmp}=Q_{nm}\cdot\left[\frac{p}{m+1},\frac{p+1}{m+1}\right].$$

On a évidemment

$$E=N+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty}Q_{nmp}. \tag{3.22}$$

Si l'ensemble Q_{nmp} contient au moins deux points, soit $\alpha\epsilon Q_{nmp}$, $\beta\epsilon Q_{nmp}$, $\alpha<\beta$. En appliquant (3.20) pour $x_0=\alpha$ et (3.21) pour $x_0=\beta$, et d'après l'égalité $f(\alpha)=f(\beta)=c_n$, on conclut que

$$\underset{x}{E}[f(x)\neq c_n,\,\alpha<x<\beta]\epsilon\mathfrak{N}.$$

Appliquons le résultat que nous venons d'obtenir à une suite $\{\alpha_k\}\epsilon Q_{nmp}$ qui converge vers la borne inférieure de Q_{nmp} et à une suite $\{\beta_k\}\epsilon Q_{nmp}$ qui converge vers la borne supérieure du même ensemble. On obtient de cette façon que Q_{nmp}, abstraction faite peut-être de ses bornes supérieure et inférieure, est contenu dans un intervalle ouvert tel que $f(x)$ est constante dans celui-ci, exception faite des points d'un ensemble qui appartient à la famille $\mathfrak{N}$. On a donc $Q_{nmp}=R_{nmp}+S_{nmp}$, où S_{nmp} contient un nombre fini de points et R_{nmp} peut être couvert avec un intervalle de la propriété indiquée. La même chose est valable si Q_{nmp} ne contient qu'un seul point, R_{nmp} étant vide en ce cas. En vertu de (3.22), la proposition en est une conséquence immédiate.

On arrive enfin au théorème suivant sur les points du type (1) dont le cas particulier correspondant au cas où la famille $\mathfrak{N}$ ne contient que l'ensemble vide a été démontré (même pour des fonctions réelles définies dans un espace métrique séparable quelconque) par Sierpiński [7]:

(3.23) *Si $f(x)$ est du type* (1) *en tout point d'un ensemble E, on a* $E \epsilon \overline{\mathfrak{N}}$.

Démonstration. Soit E_n l'ensemble des points x_0 tels que

(3.24) $$x_0 \epsilon E,$$

(3.25) $$\underset{x}{E}\left[f(x) \leqslant f(x_0),\, 0 < |x-x_0| < \frac{1}{n}\right] \epsilon \mathfrak{N},$$

et posons

$$E_{nm} = E_n \cdot \left[\frac{m}{n+1}, \frac{m+1}{n+1}\right].$$

On a évidemment

(3.26) $$E = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{mn}.$$

La relation $a \epsilon E_{nm}$ entraîne

(3.27) $$\underset{x}{E}[f(x) \leqslant f(a),\, x \epsilon E_{nm},\, x \neq a] \epsilon \mathfrak{N}.$$

Si $f(x)$ prend une valeur maximale sur l'ensemble E_{nm} en un point x_{nm} de celui-ci, on conclut de cette relation en l'appliquant pour $a = x_{nm}$ que l'ensemble E_{nm} appartient, abstraction faite du point x_{nm}, à $\mathfrak{N}$. Si $f(x)$ n'a pas de valeur maximale sur E_{nm}, on applique (3.27) à une suite $\{a_k\} \epsilon E_{nm}$ telle que $f(a_k)$ tend vers la borne supérieure de $f(x)$ sur E_{nm} et on obtient que $E_{nm} \epsilon \mathfrak{N}$. Il s'ensuit dans l'un et l'autre cas que $E_{nm} \epsilon \overline{\mathfrak{N}}$, donc, d'après (3.26), que $E \epsilon \overline{\mathfrak{N}}$, ce qu'il fallait démontrer.

4. Nous examinerons dans ce qui suit une classification de l'allure d'une fonction du point de vue de la croissance „approximative". Nous dirons que

(a) $f(x)$ est Γ_+ *au point* x_0, si l'ensemble $\underset{x}{E}[f(x) \leqslant f(x_0), x > x_0]$ a au point x_0 la densité extérieure zéro;

(b) $f(x)$ est Γ_+^* *au point* x_0, si l'ensemble $\underset{x}{E}[f(x) < f(x_0), x > x_0]$ a au point x_0 la densité extérieure zéro, mais l'ensemble $\underset{x}{E}[f(x) \leqslant f(x_0), x > x_0]$ a une densité extérieure supérieure positive au point x_0;

(c) $f(x)$ est Ω_+ *au point* x_0, si les ensembles $\underset{x}{E}[f(x) < f(x_0), x > x_0]$ et $\underset{x}{E}[f(x) > f(x_0), x > x_0]$ ont une densité extérieure supérieure positive au point x_0.

En remplaçant dans les définitions (a) et (b) les inégalités $f(x) < f(x_0)$ et $f(x) \leqslant f(x_0)$ par celles $f(x) > f(x_0)$ et $f(x) \geqslant f(x_0)$ respectivement, on arrive à la définition des propriétés Δ_+ et Δ_+^*. Nous dirons ensuite que $f(x)$ est Γ_- *au point* x_0, si $f(-x)$ est Γ_+ au point $-x_0$, et on définit d'une façon analogue les propriétés Γ_-^*, Ω_-, Δ_- et Δ_-^*.

Tout comme au nº 2, on aura à examiner les 9 types d'allure suivants:

(1′)	Γ_+, Γ_-;	(2′)	Γ_+^*, Γ_-;	(3′)	Γ_+^*, Γ_-^*;
(4′)	Γ_+, Δ_-;	(5′)	Γ_+^*, Δ_-;	(6′)	Γ_+^*, Δ_-^*;
(7′)	Γ_+, Ω_-;	(8′)	Γ_+^*, Ω_-;	(9′)	Ω_+, Ω_-.

Parmi ces types d'allure, les types (1′), (2′), (3′), (5′), (6′) et (8′) sont exceptionnels en certain sens, c'est ce qui sera prouvé par les théorèmes qui vont suivre. Par contre, les types (4′), (7′) et (9′) sont des types ordinaires, ce qui est évident pour le type (4′). Le type (9′) se présente presque partout pour toute fonction qui possède presque partout les nombres dérivés approximatifs supérieurs égaux à $+\infty$ et ceux inférieurs égaux à $-\infty$. Khintchine [4] a donné la construction d'une fonction de cette propriété (qui est même continue).

Quant au type (7′), la fonction suivante présente ce type d'allure dans les points d'un ensemble de mesure extérieure positive. On considère d'abord deux ensembles P et Q sans points communs et dont la réunion égale la droite entière $-\infty < x < +\infty$ et tels que la densité extérieure de l'un et de l'autre égale 1 en tout point x, $-\infty < x < +\infty$. (Pour la construction de deux ensembles de cette propriété, voir p. ex. [1], p. 352-354.) On définit alors la fonction $f(x)$ comme suit:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour} \quad x \epsilon P, \\ x+1 & \text{pour} \quad x \epsilon Q; \end{cases}$$

$f(x)$ sera du type (7′) en tout point $x \epsilon P$.

Les ensembles P et Q de l'exemple précédent, et avec eux la fonction $f(x)$ elle aussi, ne sont pas mesurables. Nous allons voir plus loin que le caractère non-mesurable de la fonction $f(x)$ est nécessaire dans cet exemple, car en se bornant à des fonctions $f(x)$ mesurables, le type (7′) devient exceptionnel lui aussi.

5. On commence de nouveau par un lemme.

(5.1) *Si $f(x)$ est Γ_+^* (ou Δ_+^*, ou Γ_-^*, ou Δ_-^*) en tout point d'un ensemble E, on a $E=N+Q$, où $|N|=0$ et $f(Q)$ est dénombrable.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où $f(x)$ est Γ_+^* en tout point de E. Soit E_n l'ensemble des points $x_0 \epsilon E$ tels que la densité extérieure supérieure de l'ensemble

$$\underset{x}{E}[f(x)\leqslant f(x_0),\, x>x_0]$$

dépasse $1/n$ au point x_0. Désignons par E_{nm} l'ensemble des points x_0 tels que

$$x_0 \epsilon E_n, \tag{5.2}$$

$$\Big|\underset{x}{E}[f(x)<f(x_0),\, x_0<x<x_0+h]\Big|<\frac{1}{6n}\,h \quad \text{pour} \quad 0<h<2^{-m}, \tag{5.3}$$

$$\Big|\underset{x}{E}[f(x)=f(x_0),\, x_0+2^{-m-1}\leqslant x<x_0+2^{-m}]\Big|>\frac{1}{2n}\cdot 2^{-m-1}. \tag{5.4}$$

On aura alors

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}E_{nm}. \tag{5.5}$$

En effet, la relation

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n$$

étant évidente, considérons un point $x_0 \epsilon E_n$. On peut choisir un nombre naturel m_0 tel que (5.3) soit valable pour $m\geqslant m_0$. Si (5.4) était en défaut pour tous ces nombres m, on aurait pour $m\geqslant m_0$

$$\Big|\underset{x}{E}[f(x)=f(x_0),\, x_0+2^{-m-1}\leqslant x<x_0+2^{-m}]\Big|\leqslant\frac{1}{2n}\cdot 2^{-m-1},$$

et cela entraînerait pour $0<h<2^{-m_0}$ l'inégalité

$$\Big|\underset{x}{E}[f(x)=f(x_0),\, x_0<x<x_0+h]\Big|\leqslant\Big|\underset{x}{E}[f(x)=f(x_0),\, x_0<x<x_0+2^{-m_1}]\Big|$$
$$\leqslant\frac{1}{2n}\sum_{m=m_1}^{\infty}2^{-m-1}=\frac{1}{2n}\cdot 2^{-m_1},$$

où nous avons posé $2^{-m_1-1}<h\leqslant 2^{-m_1}$. On aurait donc

$$\frac{1}{h}\Big|\underset{x}{E}[f(x)=f(x_0),\, x_0<x<x_0+h]\Big|<\frac{1}{2n}\cdot 2^{-m_1}\cdot 2^{m_1+1}=\frac{1}{n},$$

donc la densité extérieure supérieure au point x de l'ensemble

$$\underset{x}{E}[f(x)=f(x_0),\, x>x_0]$$

ne pourrait pas dépasser $1/n$. L'ensemble

$$\underset{x}{E}[f(x)<f(x_0),\, x>x_0]$$

ayant la densité extérieure zéro au même point, x_0 ne pourrait pas appartenir à E_n, et cette contradiction prouve l'existence d'un entier m tel que (5.3) et (5.4) soient valables, c'est-à-dire qu'on ait $x_0 \epsilon E_{nm}$. On a démontré par là la relation (5.5).

Ceci établi, posons $E_{nmp}=E_{nm}\cdot[p\cdot 2^{-m-2},(p+1)\cdot 2^{-m-2}]$. La formule (5.5) entraîne évidemment que

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty}E_{nmp}. \tag{5.6}$$

Soit $\alpha \epsilon E_{nmp}, \beta \epsilon E_{nmp}, \alpha<\beta$. On a $\alpha<\beta\leqslant\alpha+2^{-m-2}$, donc $0<\alpha+2^{-m}-\beta<2^{-m}$. En appliquant (5.4) pour $x_0=\alpha$, on obtient

$$\Big|\underset{x}{E}[f(x)=f(\alpha),\, \alpha+2^{-m-1}\leqslant x<\alpha+2^{-m}]\Big|>\frac{1}{2n}\cdot 2^{-m-1}, \tag{5.7}$$

et, en vertu de (5.3) qui est valable pour $x_0=\beta$, il s'ensuit

$$\begin{aligned}&\Big|\underset{x}{E}[f(x)<f(\beta),\, \alpha+2^{-m-1}\leqslant x<\alpha+2^{-m}]\Big|\\ &\leqslant\Big|\underset{x}{E}[f(x)<f(\beta),\, \beta<x<\alpha+2^{-m}]\Big|\\ &<\frac{1}{6n}\,(\alpha+2^{-m}-\beta)<\frac{1}{6n}\cdot 2^{-m}=\frac{1}{3n}\cdot 2^{-m-1}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Si l'on avait $f(\beta)>f(\alpha)$, (5.7) et (5.8) seraient en contradiction; on a donc $f(\alpha)\geqslant f(\beta)$ pour $\alpha \epsilon E_{nmp}$, $\beta \epsilon E_{nmp}$, $\alpha<\beta$.

On a démontré ainsi que la fonction $f(x)$ est non-décroissante sur l'ensemble E_{nmp}, par conséquent elle prend sur cet ensemble toute valeur y une seule fois au plus, exception faite d'un ensemble dénombrable de ces valeurs. En désignant donc par A l'ensemble des points $x_0 \epsilon E_{nmp}$ tels que $f(x)$ prend la valeur $f(x_0)$ une seule fois sur l'ensemble E_{nmp}, on a pour $x_0 \epsilon A$

$$\underset{x}{E}[x \epsilon A,\, x>x_0]\subset\underset{x}{E}[f(x)<f(x_0),\, x>x_0],$$

ce qui entraîne que la densité extérieure au point x_0 de l'ensemble

$$\underset{x}{E}[x \epsilon A,\, x>x_0]$$

est égale à zéro, tout comme celle de l'ensemble figurant au second membre. Il s'ensuit que $|A|=0$.

On peut donc poser $E_{nmp}=A+B$, où $|A|=0$ et $f(B)$ est dénombrable, et, d'après (5.6), on en conclut la proposition.

Le théorème suivant sur les points du type (3′) et sur ceux du type (6′) est une conséquence immédiate de ce que nous venons de démontrer:

(5.9) *Si $f(x)$ est du type* (3′) *ou* (6′) *en tout point d'un ensemble E, on a $E=N+Q$, où $|N|=0$ et $f(Q)$ est dénombrable.*

On pourrait attendre que, comme au théorème (3.18), si $f(x)$ est du type (6′) en tout point de E, on ait $E=N+R$, où $|N|=0$ et qu'on puisse couvrir R avec une suite d'intervalles ouverts tels que $f(x)$ soit constante dans chacun d'eux, exception faite des points d'un ensemble de mesure nulle. Cette proposition est tout de même fausse. Soit p. ex. P l'ensemble parfait non dense que l'on obtient de l'intervalle $(0,1)=I$ par la construction connue de Cantor, mais en la modifiant de façon que la longueur totale des intervalles qu'on relève à chacun des pas de la construction égale la longueur totale des intervalles qui sont restés après le pas précédent, multipliée par c_n (au pas P_n), où les nombres $0<c_n<1$ sont choisis de façon que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-c_n)$$

converge vers une valeur positive. Si $f(x)$ désigne la fonction caractéristique de P, $f(x)$ est du type (6′) en tout point de P où celui-ci a la densité égale à l'unité, donc en tout point d'un ensemble de mesure positive. Mais il est aisé de voir que tout intervalle ouvert qui contient au moins un point de P, contient une partie de mesure positive de P et — évidemment — une partie de mesure positive de $I-P$. La fonction $f(x)$ n'est donc constante en aucun intervalle ouvert en question, ni même si l'on ne tient pas compte des points des ensembles de mesure nulle.

Il est aisé de démontrer le théorème suivant:

(5.10) *Si $f(x)$ est du type* (5′) *en tout point d'un ensemble E, on a $|E|=0$.*

Démonstration. En vertu de (5.1), E est de la forme

$$E=N+\sum_{n=1}^{\infty}Q_n,$$

où on a $|N|=0$ et $f(x)$ est constante sur chacun des ensembles Q_n. Il s'ensuit pour $x_0\epsilon Q_n$

$$\underset{x}{E}[x\epsilon Q_n, x<x_0]\subset\underset{x}{E}[f(x)\geqslant f(x_0), x<x_0].$$

L'ensemble au second membre a la densité extérieure zéro au point x_0 par hypothèse, la même proposition est donc valable pour l'ensemble au premier membre, ce qui entraîne $|Q_n|=0$ et on en conclut $|E|=0$.

Un raisonnement analogue nous conduit au théorème suivant:

(5.11) *Si $f(x)$ est du type* (2′) *en tout point d'un ensemble E, on a $|E|=0$.*

La démonstration du théorème suivant sur les points du type (8′) est un peu moins simple:

(5.12) *Si $f(x)$ est du type* (8′) *en tout point d'un ensemble E, on a $|E|=0$.*

Démonstration. On a d'après le lemme (5.1)

(5.13) $$E=N+\sum_{n=1}^{\infty}Q_n,$$

où $|N|=0$ et $f(x)$ est constante sur chacun des ensembles Q_n.

Soit Q_{nm} l'ensemble des points x_0 tels que

(5.14) $x_0\epsilon Q_n$,

(5.15) la densité extérieure supérieure au point x_0 de l'ensemble

$$\underset{x}{E}[f(x)<f(x_0), x<x_0]$$

dépasse $1/m$.

Désignons enfin par Q_{nmp} l'ensemble des points x_0 tels que

(5.16) $x_0\epsilon Q_{nm}$;

(5.17) $\left|\underset{x}{E}[f(x)<f(x_0), x_0<x<x_0+h]\right|<h/2m$ pour $0<h<1/p$.

On a évidemment

(5.18) $$Q_n=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}Q_{nmp}.$$

Désignons par c_n la valeur constante que $f(x)$ prend sur Q_n. A tout point $a\epsilon Q_{nmp}$ correspond une suite $\{\varepsilon_k\}$ telle que

(5.19) $$\varepsilon_k>0,\qquad \varepsilon_k\to 0$$

et

(5.20) $$\left|\underset{x}{E}[f(x)<c_n, a-\varepsilon_k<x<a]\right|>\frac{1}{m}\varepsilon_k,$$

en vertu de (5.15). Pour $\varepsilon_k<1/2p$, l'ensemble Q_{nmp} n'a pas de points communs avec l'intervalle $(a-2\varepsilon_k, a-\varepsilon_k)$. En effet, on aurait au cas contraire un point $\beta\epsilon Q_{nmp}$, $a-2\varepsilon_k<\beta<a-\varepsilon_k$; d'après (5.17)

$$\left|\underset{x}{E}[f(x)<c_n, \beta<x<a]\right|<\frac{1}{2m}(a-\beta)<\frac{1}{m}\varepsilon_k,$$

ce qui est en contradiction avec (5.20).

D'après ce qui précède, on a

$$|Q_{nmp}\cdot[a-2\varepsilon_k, a]| \leqslant \varepsilon_k,$$

donc, en vertu de (5.19), la densité extérieure supérieure de Q_{nmp} au point a ne peut pas être plus grande que 1/2. On en conclut $|Q_{nmp}|=0$, et, vu (5.18) et (5.13), la proposition s'ensuit.

Nous démontrons enfin le théorème suivant:

(5.21) *Si $f(x)$ est du type (1′) en tout point d'un ensemble E, on a $|E|=0$.*

Démonstration. Soit E_n l'ensemble des points x_0 tels que

(5.22) $x_0 \epsilon E$,

(5.23) $\left|\underset{x}{E}[f(x)\leqslant f(x_0)]\cdot I\right| \leqslant |I|/2$ pour tout intervalle I tel que $x_0 \epsilon I$ et $|I|\leqslant 1/n$.

On a évidemment

$$E=\sum_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{5.24}$$

Considérons un intervalle I tel que $E_n\cdot I\neq 0$ et que $|I|\leqslant 1/n$. En posant

$$y=\sup_{x\epsilon E_n I} f(x),$$

choisissons une suite $\{a_k\}$ telle que $a_k \epsilon E_n$ et, si $f(x)$ ne prend pas la valeur y sur l'ensemble $E_n\cdot I$, que

$$f(a_1)\leqslant f(a_2)\leqslant \ldots, \qquad f(a_k)\to y,$$

si par contre $f(x)$ prend la valeur y sur l'ensemble $E_n\cdot I$, que $f(a_k)=y$. On a dans l'un et l'autre cas

$$A_k=\underset{x}{E}\,[f(x)\leqslant f(a_k)]\cdot I\subset A_{k+1}$$

et

$$E_n\cdot I\subset \sum_{k=1}^{\infty} A_k. \tag{5.25}$$

On a pour tout point $x_0 \epsilon E_n\cdot I$, d'après (5.23), $|A_k|\leqslant |I|/2$, et, les ensembles A_k formant une suite ascendante,

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right| = \lim_{k\to\infty} |A_k|,$$

donc, en vertu de (5.25), $|E_n\cdot I|\leqslant |I|/2$.

Ceci étant valable pour tout intervalle I de longueur $\leqslant 1/n$ et ayant de points communs avec E_n, celui-ci ne peut avoir la densité extérieure égale à l'unité en aucun de ses points, donc $|E_n|=0$. La proposition en découle en vertu de (5.24).

6. Nous supposerons dans ce qui suit que la fonction $f(x)$ soit mesurable. Auprès des théorèmes démontrés dans le n° précédent, on peut énoncer sous cette hypothèse des propositions plus précises. On a d'abord, au lieu du lemme (5.1), le lemme suivant, presque évident, dont la conclusion est pourtant plus précise que celle de (5.1):

(6.1) *Si $f(x)$ est mesurable et si elle est Γ_+^* (ou Δ_+^*, ou Γ_-^*, ou Δ_-^*) en tout point d'un ensemble E, l'ensemble $f(E)$ est dénombrable.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où $f(x)$ est Γ_+^* en tout point de E. Il est aisé de voir que si $x_0 \epsilon E$, l'ensemble $\underset{x}{E}[f(x)=f(x_0)]$ est de mesure positive. Or, $f(x)$ étant mesurable, l'ensemble des valeurs que la fonction $f(x)$ prend sur un ensemble de mesure positive est dénombrable, d'où découle la proposition.

En s'appuyant sur (6.1), on peut démontrer au lieu de (5.9) le théorème suivant plus précis:

(6.2) *Si $f(x)$ est mesurable et si elle est du type (3′) ou (6′) en tout point d'un ensemble E, l'ensemble $f(E)$ est dénombrable.*

Nous allons démontrer encore que, pour les fonctions mesurables, le type d'allure (7′) est exceptionnel en certain sens. Pour la démonstration de ce fait, nous aurons besoin de quelques propositions auxiliaires.

En désignant par $\underline{f}_{\text{ap}}^+(x)$ le nombre dérivé approximatif inférieur à droite de la fonction $f(x)$, on peut d'abord énoncer la proposition suivante:

(6.3) *Si $f(x)$ est mesurable est si l'on a $\underline{f}_{\text{ap}}^+(x)>-\infty$ pour $x\epsilon E$, la dérivée approximative $f'_{\text{ap}}(x)$ existe et elle est finie presque partout sur E.*

Ce théorème fut démontré par Denjoy [3] et Khintchine [4, 5].

(6.4) *Si $f(x)$ est mesurable et si on a $f'_{\text{ap}}(x)=0$ pour $x\epsilon K$, on a $|f(K)|=0$.*

Remarque. Cette proposition peut être déduite — même sans faire usage de l'hypothèse de la mesurabilité de $f(x)$ — des théorèmes de la p. 290 du livre de Saks [6]. Nous en donnons pourtant la démonstration puisque, en ne considérant que des fonctions mesurables, elle peut être simplifiée en certaine mesure.

Démonstration. En vertu de la formule

$$f(K)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(K\cdot[n,n+1]),$$

on peut supposer que l'ensemble K soit borné, $K\subset(a,b)=I$. Posons pour $-\infty<y<+\infty$

$$F(y)=\left|\underset{x}{E}[f(x)<y, x\epsilon I]\right|.$$

$f(x)$ étant mesurable, on a pour $\alpha<\beta$

(6.5) $$\left|\underset{x}{E}[\alpha\leqslant f(x)<\beta, x\epsilon I]\right| = F(\beta)-F(\alpha).$$

Considérons un nombre $\varepsilon>0$. Pour $x_0\epsilon K$, la relation $f'_{\rm ap}(x_0)=0$ entraîne que l'ensemble

$$\underset{x}{E}\left[-\varepsilon\leqslant\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<\varepsilon\right]$$

a au point x_0 la densité 1, donc

(6.6) $$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\left|\underset{x}{E}[-\varepsilon(x-x_0)\leqslant f(x)-f(x_0)<\varepsilon(x-x), x_0<x<x_0+h]\right|=1.$$

On a évidemment

$$\underset{x}{E}[-\varepsilon(x-x_0)\leqslant f(x)-f(x_0)<\varepsilon(x-x_0), x_0<x<x_0+h]$$
$$\subset\underset{x}{E}[-\varepsilon h\leqslant f(x)-f(x_0)<\varepsilon h, x_0<x<x_0+h]\subset(x_0, x_0+h),$$

donc, d'après (6.6), *a fortiori*

(6.7) $$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\left|\underset{x}{E}[-\varepsilon h\leqslant f(x)-f(x_0)<\varepsilon h, x_0<x<x_0+h]\right|=1.$$

Pour h suffisamment petit, on a $(x_0, x_0+h)\subset I$ et alors

$$\underset{x}{E}[-\varepsilon h\leqslant f(x)-f(x_0)<\varepsilon h, x_0<x<x_0+h]$$
$$\subset\underset{x}{E}[f(x_0)-\varepsilon h\leqslant f(x)<f(x_0)+\varepsilon h, x\epsilon I],$$

donc, d'après (6.5),

$$F(f(x_0)+\varepsilon h)-F(f(x_0)-\varepsilon h)$$
$$\geqslant\left|\underset{x}{E}[-\varepsilon h\leqslant f(x)-f(x_0)<\varepsilon h, x_0<x<x_0+h]\right|,$$

d'où, en vertu de (6.7),

$$\varliminf_{h\to+0}\frac{F(f(x_0)+\varepsilon h)-F(f(x_0)-\varepsilon h)}{2\varepsilon h}\geqslant\frac{1}{2\varepsilon},$$

donc, $\varepsilon>0$ étant arbitraire,

$$\varliminf_{\delta\to+0}\frac{F(f(x_0)+\delta)-F(f(x_0)-\delta)}{2\delta}=+\infty.$$

La dérivée $F'(y)$ n'existe donc pas au point $y=f(x_0)$, si $x_0\epsilon K$. La fonction $F(y)$ étant non-décroissante en vertu de (6.5), sa dérivée finie existe presque partout, on a donc $|f(K)|=0$.

Il nous est maintenant possible de démontrer le théorème suivant sur les points du type (7′):

(6.8) *Si $f(x)$ est mesurable et du type (7′) en tout point d'un ensemble E, on a $E=N+K$, où $|N|=0$ et $|f(K)|=0$.*

Démonstration. L'ensemble

$$\underset{x}{E}[f(x)\leqslant f(x_0), x_0<x]$$

ayant pour $x_0\epsilon E$ la densité zéro au point x_0, on a, pour tous ces x_0, $f^{+}_{\rm ap}(x_0)\geqslant 0$. On a d'après (6.3) $E=N+K$, où $|N|=0$ et $f'_{\rm ap}(x)$ existe et est finie pour $x\epsilon K$. D'après ce qui précède, l'inégalité $f'_{\rm ap}(x_0)\geqslant 0$ est valable pour $x_0\epsilon K$; mais $f'_{\rm ap}(x_0)>0$ est impossible, car, $f(x)$ étant Ω_- au point x_0, l'ensemble

$$\underset{x}{E}[f(x)>f(x_0), x<x_0]$$

ne peut avoir la densité zéro au point x_0. On a donc $f'_{\rm ap}(x)=0$ pour $x\epsilon K$ ce qui entraîne en vertu de (6.4) l'égalité $|f(K)|=0$.

OUVRAGES CITÉS

[1] C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, 2me éd., Leipzig 1927.

[2] Á. Császár, *Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions réelles à deux variables*, Acta Sci. Math. 15 (1954), p. 183-202.

[3] A. Denjoy, *Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non-sommables*, Annales de l'École Normale Sup. 33 (1916), p. 127-222; 34 (1917), p. 181-238.

[4] A. Khintchine, *Recherches sur la structure des fonctions mesurables*, Recueil Mathématique 31 (1924), p. 265-285, et p. 377-433.

[5] — *Recherches sur la structure des fonctions mesurables*, Fundamenta Mathematicae 9 (1927), p. 212-279.

[6] S. Saks, *Theory of the integral*, Warszawa-Lwów 1937.

[7] W. Sierpiński, *Démonstration de la dénombrabilité des valeurs extrémales d'une fonction*, Comptes Rendus de la Société des Sciences de Varsovie 5 (1912), p. 232-237.