COMPTES RENDUS

SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

SECTION DE CRACOVIE

21 et 22. IV. 1953. J. Plebański (Varsovie), *Équations non-linéaires de la physique contemporaine.*

2. V. 1953. G. Hajós (Budapest), *Une nouvelle démonstration du théorème de Gauss-Bonnet.*

16. VI. 1953. T. Kurzweil (Prague), *Revue des résultats de la théorie des opérations analytiques dans les espaces de Banach.*

16. VI. 1953. T. Kurzweil (Prague), *Contribution à la théorie des approximations dans les espaces de Banach.*

23. VI. 1953. K. Radziszewski (Lublin), *Sur un théorème de la théorie des ovales* (voir *Sur un problème extrémal relatif aux figures inscrites et circonscrites aux figures convexes*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 6 (1952), p. 5-18)[1].

17. IX. 1953. T. Popovici (Cluj), *Sur le reste dans certaines formules approximatives de l'analyse.*

17. IX. 1953. A. Halanay (Bucarest), *Sur les équations différentielles linéaires aux coefficients périodiques et presque périodiques.*

29. IX. 1953. M. Biernacki (Lublin), *Sur les zéros des polynômes trigonométriques dont la suite des coefficients est monotone* (Annales Polonici Mathematici 1 (1955), p. 380-387).

27. X. 1953. S. Gołąb, *La géométrie dans l'Union Soviétique.*

27. X. 1953. M. Krzyżański, *Les théorèmes de O. Oleinik de la théorie des équations elliptiques.*

27. X. 1953. W. Kleiner, *„Les méthodes de la théorie des fonctions de variable complexe" de Lavrentieff et Chabat — nouveau type de manuel de la théorie des fonctions analytiques.*

---

[1]) Cf. aussi Section de Lublin, séance du 13. V. 1954, ce fascicule, p. 104.

19. I. 1954. K. Tatarkiewicz (Lublin), *Sur l'allure asymptotique des solutions des équations différentielles presque linéaires* (voir Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 7 (1953), p. 19-81).

Résultats des recherches de l'auteur concernant les solutions de l'équation

$$x'' - 2a(x)x' - b(t)x = g(x, x', t) + f(t),$$

où $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\varepsilon t} = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, assujetties aux conditions

$$\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-\varepsilon t} = \lim_{t\to\infty} x'(t)e^{-\varepsilon t} = 0.$$

30. III. 1954. K. Maurin (Varsovie), *Die Lösung des gemischten Rand- und Anfangswertproblems für die verallgemeinerte Wellengleichung auf dem Boden der Spektraltheorie im Hilbertschen Raume.*

Folgendes gemischtes Problem wird untersucht:

$$(1)\quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = A_x u(x,t) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a^{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right] + c(x)u(x,t),$$

$$(2)\quad u(x,0) = \varphi(x),$$

$$(3)\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),$$

$$(4)\quad u(x,t) \in \mathfrak{H}_A \quad \text{für} \quad t \in [a,b],$$

wo $\mathfrak{H}_A$ aus der Menge einer positiven Randbedingung genügender Funktionen durch Vervollständigung bei Zuhilfenahme des neuen Skalarprodukts $(f,g)_A \overset{\mathrm{df}}{=} (-A_x f, g)$ gewonnen wird. Dabei wird nämlich eine Funktion $f = f(x)$ als einer positiven Randbedingung genügend erklärt, wenn $(-A_x f, f) \geqslant m(f,f)$, $m > 0$, wo $(f,g) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_\Omega f(x)g(x)\,d\omega_n(x)$.

Die Lösung des Problems erfolgt in zwei Schritten:

1° Die Lösung der operatorentheoretischen Variante von (1)-(4). Es sei $-\tilde{A}_x$ die Friedrichssche selbstadiungierte Fortsetzung des Operators $-A_x$. Der Definitionsbereich von $-\tilde{A}_x$ ist $D(-\tilde{A}_x) = \mathfrak{H}_A \cap D(A_x^*)$, wo A_x^* der Adiungierte von A_x ist. Die operatorentheoretische Variante von (1)-(4) hat die Gestalt

$$(1')\quad \frac{d^2\tilde{u}(x,t)}{dt^2} = \tilde{A}_x \tilde{u}(t), \qquad (2')\quad \tilde{u}(0) = \varphi(x),$$

$$(3')\quad \frac{d\tilde{u}(0)}{dt} = \psi(x), \qquad (4')\quad \tilde{u}(t) \in D(\tilde{A}_x),$$

wo $\tilde{u}(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \tilde{u}(\cdot, t)$ ist und $d\tilde{u}(t)/dt$ die starke Ableitung von $\tilde{u}(t)$ bedeutet. Die Lösung von (1')-(4') ist durch folgende Formel gegeben:

$$\tilde{u}(t) = u(\cdot, t) = \int_{m>0}^{+\infty} \cos\lambda^{1/2} t\, dE(\lambda)\varphi(x) + \int_{m>0}^{+\infty} \lambda^{-1/2}\sin\lambda^{1/2} t\, dE(\lambda)f(x),$$

wo

$$-\tilde{A}_x = \int_{m>0}^{+\infty} \lambda\, dE(\lambda)$$

die Spektraldarstellung von $-\tilde{A}_x$ ist.

2° Wenn $\varphi, \psi \in D(\tilde{A}^k)$, wo $k = [n/4] + 2$ ist, so ist — wie gezeigt wird — $\tilde{u}(t)$ fast überall in $\Omega \times [a,b]$ einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $u(x,t)$ gleich; d. h. $u(x,t)$ ist die Lösung des Problems (1)-(4).

Die obige Theorie verallgemeinert die Ergebnisse von Ladiženskaja [2]), die mit der Methode der Eigenfunktionen gewonnen wurden.

15. V. 1954. A. Alexiewicz (Poznań), *La convergence à deux normes et son application* (voir A. Alexiewicz et W. Orlicz, *On summability of double sequences* (I), Annales Polonici Mathematici 2, à paraître).

15. V. 1954. A. Bielecki (Lublin), *Un mode d'appliquer le principe des transformations approximatives.*

1. VI. 1954. J. Aczél (Debrecen), *Transformations qui dépendent des paramètres dans les espaces à plusieurs dimensions.*

SECTION DE GDAŃSK

13. X. 1951[3]). E. Tarnawski, *Remarques sur les erreurs d'interpolation dans les tables de fonctions.*

17. XI. 1951. J. Blum, *Revue du développement des mathématiques dans l'Union Soviétique.*

18. IV. 1952. E. Tarnawski, *Fonctions continues dans la classification logarithmique-potentielle des conditions de Hölder.*

$\omega(h)$ étant une fonction non-décroissante, définie pour $h > 0$ et telle que

$$\lim_{h\to+0} \omega(h) = 0,$$

[2]) О. А. Ладиженская, *Смешанная задача для гиперболического уравнения*, Москва 1953, p. 70-116.

[3]) Pour les séances antérieures voir Annales de la Société Polonaise de Mathématique 24 (1953), p. 185-186.

la condition nécessaire et suffisante, établie par Orlicz [1]), pour qu'il existe une fonction $f(x)$ définie pour $-\infty<x<\infty$, continue, bornée et satisfaisant au couple de conditions

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant M\cdot\omega(|h|), \tag{1}$$

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\,|f(x+h)-f(x)|/\omega_1(|h|)=\infty, \tag{2}$$

est appliquée à l'étude des classes H_ω et $H_{\omega_1}^\infty$ de fonctions $f(x)$, supposées rangées dans la première ou la seconde de ces classes suivant qu'elles satisfont à (1) ou à (2). Dans le cas particulier de l'échelle logarithmique-potentielle de cette clasification, c'est-à-dire lorsque $\omega(h)=h^\delta|\log h|^\gamma$, les classes H_ω et $H_{\omega_1}^\infty$ sont des fonctions croissantes (au sens d'inclusion) des nombres δ et γ. Les fonctions $f(x)$ envisagées sont, entre autres, celles de la forme

$$\sum_n a_n\varphi(b_nx) \quad \text{où} \quad a_n>0, \qquad \sum_n a_n<\infty, \qquad 0<b_n<b_{n+1},\ b_n\to\infty,$$

$\varphi(x)$ étant une fonction périodique continue, assujettie à la condition de Lipschitz.

Sans spécifier davantage les propriétés des fonctions $\varphi(x)$, une série d'exemples des fonctions $f(x)$ a été définie qui satisfont aux deux conditions (1) et (2) à la fois. Certains de ces exemples s'étendent sur l'échelle logarithmique-potentielle toute entière.

6. V. 1952. B. Czerwiński, *Types de Fourier des équations différentielles partielles du second ordre aux deux variables indépendantes.*

Exemples de la séparation des variables dans les équations différentielles partielles.

4. VI. 1952. E. Bielewicz, *Sur une solution de l'équation d'une plaque orthotrope.*

4. VI. 1952. M. Broszko, *Sur la déformation non-élastique.*

12. VI. 1952. W. Pawelski, *Une estimation du domaine d'existence de l'intégrale du système involutoire d'équations différentielles partielles du second ordre.*

11. X. 1952. V. Kníchal (Prague), *Une démonstration de l'unicité des solutions de l'équation de Kirchhoff.*

24. X. 1952. B. Kowalczyk, *Application de la méthode de relaxation à la résolution numérique des équations différentielles ordinaires du second ordre.*

---

[1]) W. Orlicz, *Sur les fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz généralisée*, Studia Mathematica 10 (1948), p. 21-39.

24. IV. 1953. K. Zarankiewicz (Varsovie), *Sur un problème topologique d'application pratique directe* (voir *On a problem of P. Turán concerning graphs*, Fundamenta Mathematicae 41 (1955), p. 137-145).

6. VI. 1953. E. Tarnawski, *Sur une fonction $f(x;\delta,\gamma)$ continue et satisfaisant, suivant les valeurs des paramètres, aux conditions de Hölder et de Dini dans l'échelle logarithmique-potentielle toute entière.*

Les fonctions $f(x)$ considérées sont définies pour $-\infty<x<\infty$, bornées et continues.

Une fonction $f(x)$ est dite *de classe* $H(\delta,\gamma)$ lorsqu'elle satisfait à la condition de Hölder

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant M|h|^\delta|\log|h||^\gamma \tag{1}$$

pour tout x et pour $h>0$, la constante M ne dépendant que de f; elle est *de classe* $H^\infty(\delta,\gamma)$ lorsque'elle satisfait à la condition

$$\overline{\lim_{h\to0}}\,\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|^\delta|\log|h||^\gamma}=\infty \tag{2}$$

pour tout x. Cette classification est définie pour $0\leqslant\delta\leqslant1$ et $-\infty<\gamma<\infty$ à l'exception de $\delta=1$ lorsqu'on se borne aux valeurs $\gamma\geqslant0$, et de $\delta=0$ lorsqu'on se restreint à $\gamma<0$.

Une fonction $f(x)$ est dite *de classe* $D(\delta,\gamma)$ lorsqu'elle satisfait à la condition de Dini

$$\int_0^1\frac{|f(x+t)-f(x)|}{t^{1+\delta}|\log t|^\gamma}\,dt\leqslant M \tag{3}$$

pour tout x, la constante M ne dépendant que de f; elle est dite *de classe* $D^\infty(\delta,\gamma)$ lorsqu'elle satisfait à la condition

$$\int_0^1\frac{|f(x+t)-f(x)|}{t^{1+\delta}|\log t|^\gamma}\,dt=\infty \tag{4}$$

pour tout x. Cette classification est définie pour $0\leqslant\delta\leqslant1$ et $-\infty<\gamma<\infty$ à l'exception de $\delta=1$ lorsqu'on se borne à $\gamma>1$, et de $\delta=0$ lorsqu'on se restreint à $\gamma\leqslant1$. On admet que

$$f(x)=\sum_{n=1}^\infty a_n\varphi(b_nx),$$

où $a_n=A^{-\delta\cdot2^{n!}}\cdot2^{\gamma\cdot n!}/(n!)^2$, $b_n=A^{2^{n!}}$ et $A>1$, la fonction $\varphi(x)$ étant périodique et satisfaisant à la condition de Lipschitz. La fonction $f(x)$ est à la fois de classe $H(\delta,\gamma)$ et $H^\infty(\delta,\gamma_1)$ lorsque $\gamma_1<\gamma$. Pour $\delta>0$, elle est aussi à la fois de classe $D(\delta,\gamma)$ et $D^{\infty}(\delta,\gamma_1)$ lorsque $\gamma_1<\gamma$, et pour $\delta=0$ elle est, encore silmutanément, de classe $D(0,\gamma+1)$ et $D^{\infty}(0,\gamma_1+1)$ lorsque $\gamma_1<\gamma\leqslant 0$.

On connaît des exemples de fonctions $f(x)$ satisfaisant aux deux conditions (1) et (2) à la fois pour certaine échelle de valeurs de δ et γ. Les exemples pour les conditions (3) et (4), en particulier qui satisfont aux conditions (1)-(4) dans toute l'échelle logarithmique-potentielle des valeurs de δ et γ, sont nouveaux.

21. X. et 1. XII. 1953. K. Mosingiewicz, *Nouvelles méthodes de compensation des erreurs de mesurage.*

La méthode de déterminer le polynôme du 3[me] degré à l'aide de y_1, Δy_1, $\Delta'' y_1$ et $\Delta''' y_1$ [5]) conduit à une parabole passant exactement par 4 points initiaux, mais les points suivants s'écartent de plus en plus de cette courbe.

En supposant d'abord que si toutes les données fournies par le mesurage étaient utilisées, le polynôme ne différerait que peu de celui de Gauss (satisfaisant au postulat de la somme la plus petite des carrés des écarts), l'auteur a déduit les formules

$$(1)\qquad d=\frac{\sum\limits_i \Delta''' y_i}{3(N-3)h^3},\qquad c=\frac{\sum\limits_i \Delta'' y_i}{(N-1)h^2}-3\bar{x}d,\qquad \ldots$$

($\bar{x}$ étant la moyenne arithmétique des x_i et N — le nombre des mesurages) pour déterminer les coefficients a, b, c et d du polynôme

$$(2)\qquad y=a+bx+cx^2+dx^3.$$

Cependant, même cette parabole s'écarte considérablement de celle de Gauss quand les points fournis par le mesurage sont plus dispersés.

L'auteur est parvenu toutefois à la solution du système d'équations normales de Gauss en symboles généraux dans la forme

$$a=\sum_x a(N,x)\cdot y(x),\qquad \ldots,\qquad d=\sum_x d(N,x)\cdot y(x)$$

et il a composé la table des valeurs des coefficients $a(N,x),\ldots,d(N,x)$ pour $N=1,2,\ldots,50$. On peut ainsi déterminer le polynôme de Gauss par un procédé fort rapide qui réduit la méthode des plus petits carrés à l'exécution de quatre opérations algébriques, grâce à quoi ce procédé est accessible aux techniciens ne se servant pas du calcul infinitésimal.

La marche parabolique des coefficients de Gauss $a(N,x)$ s'est montrée tout à fait différente de celle des coefficients qui interviennent dans la méthode basée sur les formules (1), c'est ce qui a élucidé la raison pour laquelle la parabole (2) s'écartait fortement de celle de Gauss dans le cas d'une dispersion notable des points donnés par les mesurages.

Ensuite, l'automatisation de la méthode de Gauss a été améliorée en introduisant un nouvelle méthode, laquelle — il est vrai — n'est qu'approximative, mais conduit au polynôme qui peut etre considéré pratiquement comme identique à celui de Gauss. Dans cette méthode, il n'y a que deux coefficients, a_w et a_z, ainsi que d_w et d_z, correspondant à chacun des coefficients a et d du polynôme du 3[me] degré indépendamment du nombre des données du mesurage. Ces coefficients ont été également mis en tables.

Enfin, une condition nécessaire et suffisante a été établie, pour qu'une méthode donne un polynôme d'autant plus proche de celui de Gauss que la dispersion des points de mesurage autour de la parabole est plus petite.

19. XII. 1953. E. Tarnawski, *On the category of the set of continuous functions $f(x)$ having for every x at least one of the right-side derivatives infinite.*

Let $f(x)$ be a continuous function, periodic with period l, defined for every value of the real variable x. Let $\omega(h)$ be a function defined for $h>0$, non vanishing, monotone, non-decreasing and tending to zero for $h\to 0$. The space H_ω of all functions satisfying the condition

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant\omega(|h|)\qquad\text{for every } x \text{ and } h$$

is a complete space, the distance being defined by

$$d(f_1,f_2)=\max_{0\leqslant x<l}|f_1(x)-f_2(x)|.$$

Let finally

$$\Lambda(h)=\sup_{0<t\leqslant h}\frac{t}{\omega(t)}.$$

THEOREM. *The set of functions $f(x)$ belonging to the space H_ω and having for every x at least one of the right-side derivatives infinite is a residual set in the space H_ω if $\lim\limits_{h\to+0}\Lambda(h)=0$, or it is empty if $\lim\limits_{h\to+0}\Lambda(h)>0$.*

The theorem remains true, and its proof can be simplified when the space H_ω is replaced by the space C of all functions $f(x)$ continuous and periodic with period l. In the last case we obtain the theorem of Banach [6]).

[5]) Voir G. Brown, *Higher Mathematics*, London 1944, p. 198.

[6]) S. Banach, *Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, Studia Mathematica 3 (1931), p. 174-179.

21. I. 1954. K. Zarankiewicz (Varsovie), *Sur l'uniformisation des fonctions continues* (voir R. Sikorski and K. Zarankiewicz, *On uniformization of functions* (I), Fundamenta Mathematicae 41 (1955), p. 339-344).

4. III. 1954. E. Woźny, *Le trièdre de Frenet et ses applications à l'étude des courbes.*

En vue d'application aux courbes minima dans l'espace de Lorentz [7]), les considérations préliminaires ont été dévéloppées d'une manière générale.

8. IV. 1954. T. Więckowski, *Évaluation des intégrales définies par la méthode des résidus.*

22. V. 1954. W. Orlicz (Poznań), *Sur quelques problèmes de la théorie générale de limitation.*

Les problèmes suivants ont été envisagés: équivalence des méthodes de limitation linéaires, structure des domaines de limitation, théorèmes du type mercerien. Les résultats de recherches des mathématiciens polonais concernant les méthodes continues et celle de Toeplitz ont été discutés, de même que les recherches récentes qui sont en cours dans ce domaine à Varsovie, Lublin et Poznań.

24. V. 1954. W. Orlicz (Poznań), *Sur les suites d'opérations linéaires et pseudolinéaires.*

28. V. 1954. W. Pogorzelski (Varsovie), *Sur les équations intégrales singulières* [8]).

28. V. 1954. W. Pawelski, *Sur l'estimation du domaine d'existence et de la portée des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires.*

28. V. 1954. E. Tarnawski, *Sur la catégorie de l'ensemble des fonctions f pour lesquelles $\overline{\lim\limits_{h\to 0}} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{\omega(|h|)}=\infty$ dans l'espace des fonctions continues satisfaisant à la condition de Lipschitz généralisée* (à paraître dans Fundamenta Mathematicae).

Soit H_ω l'espace de toutes les fonctions f périodiques de période l et satisfaisant pour $-\infty<x<\infty$ et $-\infty<h<\infty$ à la condition

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant\omega(|h|), \tag{1}$$

où ω est une fonction définie pour $h>0$, non-décroissante et tendant

[7]) Cf. la séance du 29. VI. 1954, ce fascicule, p. 103.

[8]) Cf. Section de Poznań, séance du 5. XII. 1953, ce fascicule, p. 112.

à zéro avec h, la distance entre deux fonctions f_1 et f_2 de H_ω étant définie par la formule

$$d(f_1,f_2)=\max_{0\leqslant x<l}|f_1(x)-f_2(x)|,$$

le cas trivial où

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{h}{\omega(h)}=\infty$$

étant exclu. L'espace H_ω ainsi défini est complet.

L'ensemble R des fonctions $f\epsilon H_\omega$ satisfaisant pour tout x réel à la condition

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{\omega(|h|)}=\infty, \tag{2}$$

où

$$\lim_{h\to+0}\frac{h}{\omega(h)}=0,$$

est vide ou résiduel (ce qui veut dire que l'ensemble $H_\omega-R$ est de I[re] catégorie de Baire dans H_ω).

Le théorème subsiste en remplaçant H_ω par l'espace C de toutes les fonctions continues périodiques et il devient dans ce cas le théorème d'Auerbach et Banach [9]).

29. VI. 1954. B. Czerwiński, *Élimination de la première dérivée dans l'équation non-linéaire de second ordre.*

Élimination de la première dérivée y' dans l'équation

$$y''+Q(x)y'+R(x,y)=0$$

à l'aide de la substitution

$$z=\int e^{-\int Q(x)\,dx}dx,\qquad y(x)=\eta(z).$$

29. VI 1954. E. Woźny, *Produit scalaire et produit vectoriel dans l'espace de Lorentz* [10]).

SECTION DE GLIWICE

12. II. 1954. A. Wakulicz, *Sur un problème d'arithmétique.*

13. II. 1954. C. Kluczny, *Sur le principe topologique de Ważewski concernant l'allure asymptotique des solutions d'équations différentielles.*

[9]) H. Auerbach et S. Banach, *Über die Höldersche Bedingung*, Studia Mathematica 3 (1931), p. 180, Satz 1.

[10]) Cf. la séance du 4. III. 1954, ce fascicule, p. 102.

Résultats de l'auteur obtenus par l'application de la méthode proposée par Ważewski [11]).

10. III. 1954. A. Czarnota, *Sur certaines formules générales de sommation.*

14. VI. 1954. A. Zawadzki, *Une généralisation des projections de Monge.*

SECTION DE LUBLIN

16. V. 1953. Z. Butlewski (Poznań), *Sur une équation différentielle du 4^{me} ordre.*

16. X. 1953. K. Tatarkiewicz, *Méthodes approximatives du calcul dans l'Union Soviétique.*

30. X. 1953. M. Biernacki, *G. M. Golusin (1906-1952) et son oeuvre mathématique.*

13. XI. 1953. A. Bielecki, *Sur les démonstrations du théorème de Gauss.*

5. XII. 1953. M. Warmus (Wrocław), *Sur un nomogramme du processus itéré avec illustration par un exemple cinématique des moteurs de type V et de type étoilé* (voir Zastosowania Matematyki 2 (1954), p. 67-82, en polonais avec un résumé en anglais).

15. I. 1954. A. Bielecki, *Sur la notion d'angle en géométrie élémentaire.*

27. II. 1954. S. Gołąb (Cracovie), *Contribution à l'algèbre des opérations dans le corps des nombres réels* (voir Rocznik Naukowo-Dydaktyczny Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie 1 (1954), p. 3-10, en polonais).

3. IV. 1954. R. Sikorski (Varsovie), *Sur les distributions de Schwartz.*

3. IV. 1954. W. Orlicz (Poznań), *Sur les séries parfaitement convergentes dans des espaces fonctionnels* (voir Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria I, Prace Matematyczne 1 (1955), p. 393-412, en polonais).

13. V. 1954. A. Bielecki, *Sur un théorème de la théorie des ovales* [12]).

13. V. 1954. K. Radziszewski, *Sur un théorème de la théorie des ovales* [13]).

---

[11]) T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 20 (1947), p. 279-313.

[12]) Cf. Section de Cracovie, séance du 23. VI. 1953, ce fascicule, p. 95.

[13]) Ibidem.

SECTION DE ŁÓDŹ

12. I. 1953 [14]). Z. Zahorski, *Évaluation de l'aire de la partie découpée dans la surface de sphère par un ellipsoïde concentrique.*

Un calcul à l'aide du facteur discontinu de Dirichlet et de la méthode des résidus de Cauchy appliquée aux intégrales définies réelles de $-\infty$ à $+\infty$ conduit aux formules élémentaires pour l'aire S de la partie de surface sphérique à $n-1$ dimensions

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$$

contenue dans l'ellipsoïde

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = t \quad \text{où} \quad t > 0,$$

en supposant que le membre gauche est une forme définie positive et que toutes les racines caractéristiques de la matrice $\|a_{ij}\|$ sont de multiplicité paire. Par conséquent, n est aussi pair. Soient $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_p$ les valeurs de toutes ces racines. Alors l'aire en question est, dans les intervalles $(0, \lambda_1)$, (λ_1, λ_2), $\ldots$, (λ_p, ∞), un polynôme en t. Aux intervalles différents viennent correspondre des polynômes différents: au premier le polynôme égal à la constante zéro et au dernier celui égal à la constante S (l'aire de la surface sphérique tout entière).

Sans l'hypothèse de la multiplicité paire, les intégrales résultent hyperelliptiques et pour $n=3$ — elliptiques.

30. III. 1953. Z. Charzyński, *Sur les fonctions univalentes algébriques et leurs applications.*

13. et 29. IV. 1953. L. Włodarski, *Sur les méthodes continues de limitation* (voir Studia Mathematica 14 (1954), p. 161-199).

5. X. 1953. M. Biernacki (Lublin), *Sur quelques problèmes de la théorie de fonctions univalentes et multivalentes.*

12. X. 1953. Z. Zahorski, *Sur un problème extrémal d'interpolation.*

Un polynôme de degré $2n$ au plus prend des valeurs de module 1 aux points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ du cercle-unité (au moins). Il s'agit de donner une estimation (par défaut) non-banale du minimum de la somme des carrés des modules des coefficients du polynôme variable, les n points étant fixés.

L'estimation trouvée dépend du minimum λ des distances entre ces points. Elle est obtenue par construction d'une minorante qui est

---

[14]) Pour les séances antérieures voir Annales de la Société Polonaise de Mathématique 24 (1953), p. 187-191.

une solution de l'équation différentielle engendrée par une inégalité différentielle. Il y sont appliqués les théorèmes de S. Bernstein et A. Zygmund sur le module de la dérivée d'un polynôme.

L'estimation de la mesure de l'ensemble des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'espace à n dimensions, pour lesquels ce minimum est inférieur à $1/b$, dépend de $n\lambda$, la valeur de λ diminuant lorsque b croît.

2. XI. 1953. Z. Zahorski, *Sur les résultats récents des mathématiques en URSS.*

30. XI. 1953. W. Janowski, *Le maximum de la partie imaginaire des fonctions univalentes bornées.*

Les fonctions holomorphes univalentes de la forme

$$F(z) = z + A_2 z^2 + \ldots \tag{1}$$

sont considérées dans le cercle $|z|<1$. Étant donné un nombre $M>1$ quelconque, soient F_M la famille de toutes les fonctions bornées (1) assujetties à la condition $|F(z)|<M$ et F_∞ — celle de toutes les fonctions de la forme (1).

On a les théorèmes suivants sur l'expression $\mathcal{I}\{F(r)\}$ pour la valeur fixée de r:

I. Toutes les fonctions $F(z)$ de la famille F_M satisfont à l'inégalité

$$\mathcal{I}\{F(r)\} \leqslant \varrho_M \sin \varphi_M, \tag{2}$$

où ϱ_M $(0<\varrho_M<r)$ et φ_M $(\sin\varphi_M>0)$ sont les racines des équations suivantes en ϱ et φ:

$$\frac{\left[1+\left(\frac{\varrho}{M}\right)^2\right]\sin\varphi - 2\frac{\varrho}{M}}{2\frac{\varrho}{M}\sin\varrho - \left[1+\left(\frac{\varrho}{M}\right)^2\right]} \log\left(\frac{1-\frac{\varrho}{M}}{1+\frac{\varrho}{M}} : \frac{1-r}{1+r}\right) + \log M \frac{1-r^2}{r\left(\frac{M}{\varrho}-\frac{\varrho}{M}\right)} = 0,$$

$$\varphi = \sqrt{\log^2\left(\frac{1-\frac{\varrho}{M}}{1+\frac{\varrho}{M}} : \frac{1-r}{1+r}\right) - \log^2 M \frac{1-r^2}{r\left(\frac{M}{\varrho}-\frac{\varrho}{M}\right)}},$$

à savoir les racines pour lesquelles le produit $\varrho\cdot\sin\varphi$ est le plus grand.

La limite (2) est atteinte.

II. Toutes les fonctions de la famille F_∞ satisfont à l'inégalité

$$\mathcal{I}\{F(r)\} \leqslant \varrho_\infty \sin\varphi_\infty, \tag{3}$$

où ϱ_∞ et φ_∞ sont les racines des équations

$$\log\varrho_\infty = \log\frac{r}{1-r^2} + \sin\varphi_\infty \cdot \log\frac{1+r}{1-r}, \qquad \varphi_\infty = \cos\varphi_\infty \cdot \log\frac{1+r}{1-r}.$$

La limite (3) est aussi atteinte.

4. I. 1954. Z. Zahorski, *L'état actuel de la théorie métrique des fonctions réelles.*

8. I. 1954. S. Turski (Varsovie), *Le problème de la théorie de l'élasticité des corps anisotropes.*

8. I. 1954. S. Jaśkowski (Toruń), *Communication sur l'insolubilité d'une classe des problèmes d'existence concernant les équations différentielles ordinaires.*

18. I. 1954. Z. Zahorski, *L'état actuel de la théorie descriptive des fonctions réelles.*

15. III. 1954. J. Lipiński, *Sur les ensembles $E_a = \{f(x)>a\}$ pour les fonctions intégrables au sens de Riemann.*

On a les théorèmes suivants pour les fonctions $f(x)$ dont les points de discontinuité forment un ensemble de mesure nulle:

1. *Pour qu'un ensemble E situé dans l'espace euclidien à n dimensions $\mathcal{E}^n$ soit un ensemble E_a d'une fonction $f(x)$ ayant l'ensemble de points de discontinuité de mesure 0, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble E^* étant un F_σ et satisfaisant aux conditions*

$$E \subset E^* \subset \bar{E} \quad \textit{et} \quad |E^* \cdot \mathrm{Fr}(E)| = 0.$$

2. *Pour que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction $f(x)$ définie dans $\mathcal{E}^n$ soit de mesure 0, il faut et il suffit que pour cette fonction $a \neq b$ entraîne $|\mathrm{Fr}(E_a)\cdot\mathrm{Fr}(E_b)| = 0$.*

Cette condition équivaut à ce que l'ensemble des nombres a pour lesquels $|\mathrm{Fr}(E_a)|>0$ soit au plus dénombrable.

Le théorème 1 est appliqué pour résoudre le problème suivant: un ensemble E de nombres réels et un nombre a étant donnés, existe-t-il une fonction $f(x)$ intégrable au sens de Riemann dans tout intervalle, ayant une fonction primitive et pour laquelle $E_a = E$? L'ensemble E doit satisfaire aux conditions nécessaires établies par Zahorski [15]) qui résultent de l'existence d'une fonction primitive localement bornée, à savoir aux conditions M_4. L'intégrabilité de la fonction $f(x)$ entraîne en outre que l'ensemble E doit satisfaire aux conditions du théorème 1.

[15]) Z. Zahorski, *Sur la première dérivée*, Transactions of the American Mathematical Society 69 (1950), p. 1-54.

La fonction $f(x)$ proposée comme solution du problème est un cas particulier de celle définie par Zahorski, qui est une dérivée bornée construite pour un ensemble satisfaisant aux conditions M_4. Le théorème 1 permet notamment de remplacer les fonctions approximativement continues par des fonctions continues et les ensembles composés de points de leur densité par des ensembles ouverts. Il permet aussi de se passer du théorème de Lusin et Menchoff, d'après lequel on peut intercaler entre un ensemble mesurable A et son sur-ensemble fermé B, composé de points de densité de A, un ensemble fermé C composé de points de densité de A et tel que B se compose de points de densité de C. Grâce à ces simplifications, la construction de la fonction $f(x)$ devient tout à fait élémentaire.

Ensuite, le théorème 1 est appliqué pour résoudre le problème analogue sur la fonction $f(x)$ intégrable au sens de Riemann dans tout intervalle borné et approximativement continue. La construction est analogue à celle de la fonction approximativement continue, mais pas nécessairement intégrable au sens de Riemann, définie par Zahorski[16]). La continuité approximative de la fonction $f(x)$ entraîne que E doit satisfaire aux conditions M_5. Cet ensemble étant assujetti en outre à celles du théorème 1, le théorème de Lusin et Menchoff est remplacé par le lemme suivant: si un ensemble fermé F de mesure nulle se compose de points de densité d'un ensemble ouvert G, il existe pour tout $\varepsilon>0$ un ensemble F_ε fermé, formé de points de densité de G et tel que $F\subset F_\varepsilon\subset G+F$, que $|\mathrm{Fr}(F_\varepsilon)|=0$, $|F_\varepsilon|<\varepsilon$, et que F se compose de points de densité de F_ε.

La démonstration de ce lemme est modelée sur celle du théorème de Lusin et Menchoff généralisé par Zahorski[16]).

La démonstration que la fonction construite est intégrable au sens de Riemann fait intervenir le théorème 2 (on a $|\mathrm{Fr}(E_b)|=0$ pour tout $b\neq a$).

17. V. 1954. Z. Charzyński, *L'index d'un point par rapport à une courbe et son application aux équations non-linéaires.*

Soit C une courbe fermée, définie par les équations

$$\xi=U(x,y),\qquad \eta=V(x,y),$$

où x et y parcourent la circonférence $x^2+y^2=1$ et les fonctions U et V y sont analytiques réelles.

L'index d'un point hors C par rapport à cette courbe est défini comme égal à 0 ou 1, suivant que la droite par ce point coupe la courbe un nombre

[16]) Z. Zahorski, *Über die Menge der Punkte, in welchen die Ableitung unendlich ist,* Tôhoku Mathematical Journal 48 (1941), p. 321-330.

pair ou impair de fois (chaque intersection étant comptée avec sa multiplicité, donc la tangence un nombre pair de fois, etc.). La notion est ensuite étendue par l'approximation aux courbes continues arbitraires. La valeur de l'index est un invariant de certaines homotopies.

En appliquant la notion d'index, l'on parvient au théorème suivant:

Soient $F(x,y)$ et $G(x,y)$ des polynômes homogènes réels des degrés impairs m et n respectivement et tels que les équations $F(x,y)=0$ et $G(x,y)=0$ n'aient que les solutions nulles; soient en outre $f(x,y)$ et $g(x,y)$ des fonctions continues sur le plan x,y de variables réelles, satisfaisant aux conditions

$$\lim_{x,y\to\infty}\frac{f(x,y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^n}=0\qquad et\qquad \lim_{x,y\to\infty}\frac{g(x,y)}{(\sqrt{x^2+y})^m}=0.$$

Alors les équations

$$F(x,y)+f(x,y)=0\qquad et\qquad G(x,y)+g(x,y)=0$$

ont toujours une solution sur ce plan.

On a un théorème analogue pour les systèmes d'équations à plusieurs inconnues.

31. V. 1954. W. Janowski, *Sur les fonctions univalentes k-symétriques.*

Soient: Φ_∞ la famille de toutes les fonctions holomorphes univalentes k-symétriques dans le cercle $|z|\leqslant 1$ de la forme

$$(*)\qquad \Phi(z)=z+B_2z^{k+1}+B_3z^{2k+1}+\ldots,$$

k étant un entier positif, et Φ_M celle de toutes les fonctions bornées de la même forme assujetties à la condition $|\Phi(z)|<M$, où $M>1$ est un nombre quelconque.

En considérant pour z et $r>0$ fixée les expressions

$$|\Phi(z)|,\qquad \arg\Phi(z)/z,\qquad \Re\{\Phi(r)\},\qquad \Im\{\Phi(r)\},$$

on a les théorèmes:

I. $|\Phi(z)|\leqslant R_M$ *pour toute fonction* $\Phi(z)\in\Phi_M$ *où*

$$0<|R_M|<|z|\qquad et\qquad \frac{R_M^k}{[1-(R_M/M)^k]^2}=\frac{|z|^k}{[1-|z|^k]^2}.$$

II. $|\Phi(z)|\leqslant R_\infty$ *pour toute fonction* $\Phi(z)\in\Phi_\infty$ *où* $R_\infty=|z|/[1-|z|^k]^{2/k}$.

III. $\arg\Phi(z)/z\leqslant\Omega_M$ *pour toute fonction* $\Phi(z)\in\Phi_M$ *où*

$$\Omega_M=\frac{1}{k}\cdot\frac{1-(R_M/M)^{2k}}{1+(R_M/M)^{2k}}\log\left[\frac{1-(R_M/M)^k}{1+(R_M/M)^k}:\frac{1-|z|^k}{1+|z|^k}\right],\qquad 0<R_M<|z|,$$

$$\frac{2(R_M/M)^k}{1+(R_M/M)^{2k}}\log\left[\frac{1-(R_M/M)^k}{1+(R_M/M)^k}:\frac{1-|z|^k}{1+|z|^k}\right]+$$

$$+\log M^k\frac{1-|z|^{2k}}{|z|^k[(M/R_M)^k-(R_M/M)^k]}=0.$$

IV. $\arg\Phi(z)/z\leqslant\Omega_M$ *pour toute fonction* $\Phi(z)\in\Phi_\infty$ *où*

$$\Omega_\infty=\frac{1}{k}\log\frac{1+|z|^k}{1-|z|^k}.$$

V. $\mathcal{R}\{\Phi(r)\}\leqslant R_M$ *pour toute fonction* $\Phi(z)\in\Phi_M$ *où*

$$0<R_M<|z|\qquad et\qquad \frac{R_M^k}{[1-(R_M/M)^k]^2}=\frac{r^k}{(1-r^k)^2}.$$

VI. $\mathcal{R}\{\Phi(r)\}\leqslant R_\infty$ *pour toute fonction* $\Phi(z)\in\Phi_\infty$ *où* $R_\infty=r/(1-r^k)^{2/k}$.

VII. $\mathcal{I}\{\Phi(r)\}\leqslant R_M\sin\Omega_M$ *pour toute fonction* $\Phi(z)\in\Phi_M$ *où*

$$0<R_M<r,\qquad \sin\Omega_M>0,$$

$$\frac{[1+(R_M/M)]^{2k}\sin\Omega-2(R_M/M)^k}{2(R_M/M)^k\sin\Omega-[1+R_M/M)^{2k}]}\log\left[\frac{1-(R_M/M)^k}{1+(R_M/M)^k}:\frac{1-r^k}{1+r^k}\right]+$$

$$+\log M^k\frac{1-r^{2k}}{r^k[(M/R_M)^k-(R_M/M)^k]}=0$$

et Ω *est égal à*

$$\frac{1}{k}\sqrt{\log^2\left[\frac{1-(R_M/M)^k}{1+(R_M/M)^k}:\frac{1-r^k}{1+r^k}\right]-\log^2M^k\frac{1-r^{2k}}{r^k[(M/R_M)^k-(R_M/M)^k]}}+2\pi\frac{l}{k},$$

l étant un entier entre 0 et $k-1$ et les trois nombres l, R_M et Ω_M, étant en outre choisis de façon que la valeur $R_M\sin\Omega_M$ soit la plus grande.

VIII. $\mathcal{I}\{\Phi(r)\}\leqslant R_\infty\sin\Omega_\infty$ *pour toute fonction* $\Phi(z)\in\Phi_\infty$ *où* R_∞ *et* Ω_∞ *satisfont aux équations*

$$\log R_\infty=\frac{1}{k}\left[\log\frac{r^k}{1-r^{2k}}+\sin\Omega_\infty\cdot\log\frac{1+r^k}{1-r^k}\right],$$

$$\Omega_\infty=\frac{1}{k}\cos\Omega_\infty\cdot\log\frac{1+r^k}{1-r^k}+2\pi\frac{l}{k},$$

et ces limites sont atteintes.

SECTION DE POZNAŃ

9. IV. 1953. J. Łoś (Toruń), *Sur les problèmes de l'algèbre générale.*

Quelques applications du théorème de Gödel sur le calcul étroit des fonctions propositionnelles aux problèmes de l'algèbre générale.

17. IV. 1953. J. Kurzweil (Prague), *On the metric theory of diophantine approximations.*

Given a positive function $\varphi(x)$ a number x is said to *admit the approximation* $\varphi(q)$, if there are infinitely many pairs of integers p,q such that $q>0$ and that the inequality

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\varphi(q)$$

is fulfilled.

Let A_φ be the set of all numbers x from the interval $I=(0,1)$, which admit the approximation $\varphi(q)$. The sets A_φ and $I-A_\varphi$ were investigated by means of the Lebesgue and Hausdorff measure, and results in this direction were obtained by Khintchine, Jarník (the case of simultaneous approximations) and by the author.

8. V. 1953. M. Altman (Varsovie), *Mean ergodic theorem in locally convex linear topological spaces* (voir Studia Mathematica 13 (1953), p. 190-193).

21. V. 1953. A. Schönhuber, *Problèmes de la didactique des mathématiques dans les écoles techniques.*

23. V. 1953. J. Krzyż (Lublin), *Sur un théorème de Lasker* (voir *On monotonity-preserving transformations*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 6 (1952), p. 91-111).

23. V. 1953. P. Roszko, *Sur l'histoire de la géométrie euclidienne.*

Analyse critique du rôle joué à diverses époques par les „Éléments" d'Euclide dans l'enseignement scolaire et de l'influence exercée par la réforme de d'Alembert.

22. IX. 1953. T. Popovici (Cluj), *Sur quelques propriétés des fonctions convexes.*

3. X. 1953. M. Biernacki (Lublin), *Sur les zéros des polynômes trigonométriques dont la suite des coefficients est monotone* [17]).

22. X. 1953. J. G.-Mikusiński (Wrocław), *On Schwartz's distributions and operational calculus* (expository lecture).

---

[17]) Cf. Section de Cracovie, séance du 29. IX. 1953, ce fascicule, p. 95.

Three different approaches to the theory of distributions were given:

1° based on the theory of linear functionals [18]),

2° based on the concept of weak convergence [19]),

3° algebraic approach [20]).

The relations of the theory of distributions with the direct method in the operational calculus [21]) were also discussed.

6. XI. 1953. W. Orlicz, W. Matuszewska et T. Albrycht, *Résultats de recherches des mathématiciens soviétiques dans le domaine de l'analyse fonctionnelle.*

21. XI. 1953. K. Tatarkiewicz (Lublin), *Sur l'allure asymptotique des solutions des équations différentielles presque linéaires* [22]).

Un aperçu de l'histoire et de l'état actuel des recherches sur les propriétés asymptotiques des équations différentielles ordinaires et les résultats de l'auteur sur les solutions de l'équation

$$x''-2a(t)x'-b(t)x=f(t)$$

tendant à 0 avec $t\to\infty$.

5. XII. 1953. W. Pogorzelski (Varsovie), *Sur les équations intégrales singulières* (aperçu historique).

On appelle *équations intégrales singulières* celles de la forme

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^b \frac{K(x,s)}{x-s}\,\varphi(s)\,ds,$$

où f et K sont des fonctions bornées et l'intégrale a la valeur principale de Cauchy. Des cas particuliers des équations intégrales singulières ont été étudiés par Kellog et Hilbert; un cas plus général a été traité par Poincaré à l'aide des moyens analytiques à propos d'un problème de marées. Ce n'est que dans la dernière dizaine d'années que les équations intégrales singulières ont été soumises à des études complètes et précises par les mathématiciens soviétiques Mouskhelichvili et Vécoua. Leurs recherches

[18]) L. S. Schwartz, *Théorie des distributions I et II*, Actualités Scientifiques et Industrielles 1091 (1950) et 1122 (1951).

[19]) J. G.-Mikusiński, *Sur la méthode de généralisation de Laurent-Schwartz et sur la convergence faible*, Fundamenta Mathematicae 35 (1948), p. 235-239.

[20]) H. König, *Neue Begründung der Theorie der Distributionen von L. Schwartz*, Mathematische Nachrichten 9 (1953), p. 129-148.

[21]) J. G. -Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica 11 (1950), p. 41-70.

[22]) Cf. Section de Cracovie, séance du 19. I. 1954, ce fascicule, p. 96.

ont été basées sur les propriétés des intégrales de Cauchy et sur la solution du problème aux limites d'Hilbert due à Gachov et Chvedelidzé. C'est ainsi que Vécoua a démontré l'équivalence entre les équations intégrales singulières et celles de Fredholm régulières. Les équations intégrales singulières ont beaucoup d'applications dans la théorie des fonctions harmoniques, dans celle de l'élasticité et dans l'hydrodynamique.

6. III. 1954. Z. Krygowski, *Sur une classe d'équations algébriques du 5^me degré qui sont résolubles algébriquement.*

6. III. 1954. Z. Krygowski, *Sur les courbes d'interpolation.*

20. III. 1954. Z. Charzyński (Łódź), *L'index d'un point par rapport à une courbe et son application aux équations non-linéaires* [23]).

27. III. 1954. E. Marczewski (Wrocław), *Sur les processus stochastiques.*

3. IV. 1954. L. Włodarski (Łódź), *Sur les méthodes continues de sommation* (voir Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, Volume 2, N° 1 (1954), p. 13-16).

10. IV. 1954. T. Seidler (Gdańsk), *Sur la théorie des informations.*

24. IV. 1954. T. Kopeć et T. Musielak, *L'estimation de la norme de l'opération symétrique* (en préparation pour Studia Mathematica).

24. IV. 1954. Z. Polniakowski, *Une généralisation du théorème de Mercer.*

Mercer a démontré [24]) que la convergence de la suite des nombres

$$t_n=as_n+(1-a)m_n \qquad \text{où} \qquad n=0,1,\ldots$$

entraîne celle de la suite des s_n lorsque

$$m_n=\frac{s_0+s_1+\ldots+s_n}{n} \qquad \text{et} \qquad a>0.$$

La généralisation est la suivante: la suite des s_n converge lorsque m_n est la deuxième moyenne de Cesàro et $a>0$ ou bien lorsque m_n est la troisième moyenne de Cesàro et $a>1/11$.

Pour les autres valeurs de a, la suite des s_n peut ne pas être convergente.

24. IV. 1954. T. Albrycht, *Une généralisation du théorème de Zygmund* (à paraître dans les Annales Polonici Mathematici).

[23]) Voir Section de Łódź, séance du 17. V. 1954, ce fascicule, p. 108.

[24]) J. Mercer, *On the limits of real variants*, Proceedings of the London Mathematical Society (2), 5 (1907), p. 206-224.

6. V. 1954. S. Knapowski (Wrocław), *Les plus grands diviseurs de certains polynômes* (à paraître ibidem).

15. V. 1954. K. Urbanik (Wrocław), *Sur les processus stochastiques de Markoff* (en préparation pour Studia Mathematica).

22. V. 1954. J. Łoś (Toruń), *Sur la décomposition de groupes abéliens libres en sommes directes* (en préparation pour Fundamenta Mathematicae).

25. VI. 1954. J. Szarski (Cracovie), *Remarques sur l'équation de la corde vibrante* (voir J. Szarski et T. Ważewski, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego (en polonais), à paraître).

SECTION DE TORUŃ

14. IV. 1953. W. Witaszek, *Sur certains corps de nombres définis par des matrices.*

17. IV. 1953. S. Drobot (Wrocław), *On the foundations of Dimensional Analysis* (voir Studia Mathematica 14 (1954), p. 84-99).

8. V. 1953. W. Witaszek, *Une application de la représentation de certains corps de nombres à la résolution des équations.*

L'application en question concerne la répresentation de l'équation réduite par une matrice dont le produit par une matrice auxiliaire a des éléments qui sont des résolvantes de Lagrange.

12. V. 1953. J. Łoś, *Sur une suite ascendante de groupes ordonnés.*

12. V. 1953. J. Łoś, *Sur les produits forts de groupes cycliques infinis.*

12. V. 1953. S. Balcerzyk, *Une propriété des sous-groupes du groupe additif des nombres rationnels.*

22. V. 1953. J. Łoś, *Sur le prolongement du modèle.*

22. V. 1953. J. Czajkowski et T. Tietz, *Sur une équation différentielle.*

16. VI. 1953. E. Marczewski (Wrocław), *Sur les processus stochastiques.*

20. VIII. 1953. L. Włodarski (Łódź), *Sur les espaces des suites limitables par les méthodes continues.*

26. VIII. 1953. W. Orlicz (Poznań), *Sur les problèmes d'approximation.*

27. VIII. 1953. K. Urbanik (Wrocław), *Sur les propriétés aux limites des processus purement discontinus.*

28. VIII. 1953. S. Balcerzyk, *Sur les sous-groupes libres du groupe des rotations de la sphère.*

9. X. 1953. J. Łoś, *On the existence of linear order in a group* (voir Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 2 (1954), p. 21-24).

9. X. 1953. J. Czajkowski et T. Tietz, *Sur la valeur propre $\lambda=0$ de l'équation de Schrödinger pour l'atome d'hydrogène.*

Démonstration que $\lambda=0$ est une valeur propre continue de l'équation de Schrödinger dans le cas de l'atome de H, de sorte que le spectre est discret pour $\lambda>0$ et continu pour $\lambda\leqslant 0$.

23. X. 1953. S. Jaśkowski, *Example of a class of systems of ordinary differential equations having no decision method for existence problems, Part I* (voir Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 2 (1954), p. 155-158).

6. XI. 1953. S. Jaśkowski, L. Jeśmanowicz et J. Łoś, *L'activité scientifique de A. N. Kolmogoroff.*

11. XII. 1953. S. Jaśkowski, *Example of a class of systems of ordinary differential equations having no decision method for existence problems, Part II* (voir Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 2 (1954), p. 159-161).

15. I. 1954. A. Alexiewicz (Poznań), *On the theorem of Vitali-Hahn-Saks.*

29. I. 1954. A. Mostowski (Varsovie), *Sur les quantificateurs.*

Entendons par quantificateur restreint à un ensemble E toute fonction f faisant correspondre l'une des valeurs logiques 0 et 1 à chacun des sous-ensembles X de E et satisfaisant à la condition suivante: si deux ensembles X et Y sont de puissance égale, en même temps que leurs complémentaires $E-X$ et $E-Y$, on a $f(X)=f(Y)$. On peut formuler pour les quantificateurs f ainsi définis un problème analogue à celui classique, concernant la complétitude des règles de déduction du calcul des fonctions propositionnelles. Si l'ensemble E est dénombrable, condition suffisante et nécessaire pour que ce problème pour les quantificateurs f, $\prod$ et $\sum$ se résout par l'affirmative est que f soit définissable par $\prod$ et $\sum$.

26. II. 1954. S. Jaśkowski, *On the homomorphism between the models of elementary theories.*

Let $\mathcal{T}_0$ be a subtheory of an elementary theory $\mathcal{T}_1$ and $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$ models of $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$, respectively. Let A_0 and A_1 be the sets of individuals of those models. Suppose that the notion of consequence is such that consequences of any X do not contain any constant function and relation absent in X. Hence some constants of $\mathcal{T}_1$ may not appear in $\mathcal{T}_0$ and may possess no realisation in $\mathfrak{M}_0$. A function h is called a *homomorphism mapping* $\mathfrak{M}_1$ on $\mathfrak{M}_0$ when following conditions are satisfied:

(1) h is defined on A_1 and $h(A_1)=A_0$;

(2) for every function F of $\mathcal{T}_0$, every relation R of $\mathcal{T}_0$ and for all $x_1,\dots,x_n \epsilon A$

$$F_0(hx_1,\dots,hx_n)=hF_1(x_1\dots x_n), \qquad R_0(hx_1,\dots,hx_n)\equiv R_1(x_1,\dots,x_n),$$

where F_i and R_i are realisations of the constants F and R in $\mathfrak{M}_i$ for $i=0$ and 1.

THEOREM. *If every model of $\mathcal{T}_0$ is a homomorphic image of some model of $\mathcal{T}_1$, then the theories $\mathcal{T}_0$ and $\mathcal{T}_1$ are identical in the scope of sentences expressed in constants of $\mathcal{T}_0$.*

26. III. 1954. J. Słomiński, *Sur le prolongement des algèbres définissables par des égalités les unes dans les autres.*

Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ des classes d'algèbres de types $\langle d_1,\dots,d_m\rangle$ et $\langle d_1,\dots,d_n\rangle$ respectivement, où $m\leqslant n$, définissables par des égalités et satisfaisant à la condition

$$E_m \cap E(\boldsymbol{B})=E(\boldsymbol{A}),$$

où E_m est l'ensemble de toutes les égalités écrites dans les opérations $d_1,\dots,d_m$, tandis que $E(\boldsymbol{A})$ et $E(\boldsymbol{B})$ sont les ensembles de toutes les égalités valables dans chacune des algèbres de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ respectivement. Soient U et V des algèbres libres de classes $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ respectivement, chacune à n générateurs libres. Soit enfin A une algèbre de classe $\boldsymbol{A}$ ayant n générateurs. On a alors le théorème:

Pour que l'algèbre A se laisse prolonger dans une algèbre de classe $\boldsymbol{B}$, il faut et il suffit qu'il existe une congruence L définie dans V et telle que $\tau \epsilon U$ et $\tau' \epsilon U$ entraînent $\tau K\tau'\equiv\tau L\tau'$, où K est la congruence définie dans U et qui est induite par l'homomorphie fondamentale de U en $\boldsymbol{A}$.

La condition de Ptàk [25]) pour le prolongement d'un sous-groupe dans un groupe est une conséquence immédiate de ce théorème.

2. IV. 1954. L. Jeśmanowicz, *Sur la sommabilité des séries par la méthode de Nörlund.*

Généralisation des résultats de Zygmund sur la sommation des séries trigonométriques par la méthode de Cesàro [26]). La généralisation repose sur l'application aux séries trigonométriques de la méthode de Nörlund définie par une classe de suites fondamentales. Cette méthode est ensuite appliquée aux problèmes de localisation des séries trigonométriques.

[25]) В. Птак, *О включении семигрупп*, Чехословацкий Математический Журнал 2 (1952), p. 247-271.

[26]) A. Zygmund, *Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques*, Mathematische Zeitschrift 24 (1926), p. 47-104.

30. IV. 1954. E. Sąsiada, *On abelian groups every countable subgroup of which is an endomorphic image* (voir Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 2 (1953), p. 359-362).

17. V. 1954. A. Śniatycki, *Sur les réseaux de polygones.*

Mikusiński [27]) a considéré les réseaux de triangles couvrant le plan de façon que

1° tout point commun de deux triangles qui est un sommet de l'un en est un de l'autre,

2° tout sommet n'est commun qu'à 6 triangles au plus.

Lorsqu'il l'est à $6-d$ triangles, il s'appelle *défectif* et le nombre d est dit celui de ses *défauts*. Le théorème établi est que le nombre de tous les défauts dans un parquetage du plan par des triangles assujetti aux conditions 1° et 2° ne dépasse jamais 6.

Ce résultat se laisse généraliser. On peut considérer un réseau quelconque de polygones à p sommets assujetti à la condition 1° (ces polygones y étant substitués aux triangles) et entendre par défaut d'un sommet le nombre $2p/(p-2)-k$, où k est celui de polygones qui s'y rencontrent. Alors on a les théorèmes:

1. *Si le réseau de polygones à p sommets couvre la sphère, la somme des défauts est égale à $2p/(p-2)$.*

2. *Si le réseau de polygones à p sommets couvre le tore, la somme des défauts est égale à 0.*

3. *Si le réseau de polygones à p sommets couvre le plan et il n'y a pas de défauts négatifs, la somme de tous les défauts ne dépasse pas p.*

On peut établir les théorèmes analogues à 1 et 2 pour toutes les surfaces unilatérales.

11. VI. 1954. A. Wilkoński (Wrocław), *Sur la délimitation des racines de polynômes.*

14. VI. 1954. J. Łoś, *Sur les jeux* (un compte rendu de la conférence homonyme tenue à Wrocław par l'Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences le 28. V. 1954).

[27]) J. G.-Mikusiński, *Sur le parquetage du plan par des polygones*, Colloquium Mathematicum 1 (1954), p. 14-18.

SECTION DE VARSOVIE

12. X. 1951 [28]). W. Sierpiński, *Sur une propriété d'ensembles plans, fermés et bornés.*

19. X. 1951. E. Marczewski (Wrocław), *Sur les congruences et les propriétés positives d'algèbres abstraites* (voir Colloquium Mathematicum 2 (1951), p. 220-228).

19. X. 1951. E. Marczewski (Wrocław), *Sur la mesurabilité des fonctions de deux variables* (voir E. Marczewski et C. Ryll-Nardzewski, *Sur la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 25 (1952), p. 145-154).

26. X. 1951. K. Zarankiewicz, *Einige Probleme über Gitterpunkte.*

9. XI. 1951. W. Orlicz (Poznań), *Sur l'oeuvre scientifique de M. Lavrentieff.*

9. XI. 1951. R. Sikorski, *Sur l'oeuvre scientifique de I. M. Gelfand.*

9. XI. 1951. M. Fisz, *Sur l'oeuvre scientifique de N. V. Smirnoff.*

16. XI. 1951. M. Olekiewicz (Lublin), *Sur la probabilité de la simultanéité de trois événements distincts.*

23. XI. 1951. A. Grzegorczyk, *Some classes of recursive functions* (voir Rozprawy Matematyczne IV, Varsovie 1953).

7. XII. 1951. K. Kuratowski et W. Sierpiński, *Impressions du voyage en Italie.*

14. XII. 1951. A. Mostowski, *Sur les problèmes actuels du domaine des fondements des mathématiques.*

Un aperçu sur les courants constructifs dans les fondements de la théorie des ensembles par l'opposition aux courants axiomatiques. Problèmes mathématiques (et non pas philosophiques) engendrés par les vues et résultats des constructivistes: démonstration par Gödel de la compatibilité de l'hypothèse du continu, analyse énumérable de Mazur et autres.

14. XII. 1951. K. Zarankiewicz, *Sur la dualité dans la division des régions par des continus.*

4. I. 1952. R. Sikorski, *Théorie des dimensions dans les algèbres des fermetures.*

11. I. 1952. W. Sierpiński, *Démonstration élémentaire d'un théorème de Fermat* (voir Matematyka 4 (32), 1954, p. 3-5, en polonais).

11. I. 1952. R. Hampel, *On the equation* $x^m+1=y^n$.

[28]) Pour les séances antérieures voir Annales de la Société Polonaise de Mathématique **24 (1953)**, p. 192-193.

A demonstration that the equation $x^m+1=y^n$ has no solution in natural numbers when $|x-y|=1$, $m>1$ and $n>1$, excepted the known case $2^3+1=3^2$.

More generally: $|x^m-y^n|\geqslant\max(5,x,y)$ for $|x-y|=1$, and the equality occurs exclusively in the cases $2^5-3^3=5=3^2-2^2$.

Two following congruences are deduced from the proved statement:

$$(L,p+1)\prod_{k=1}^{p}(L-k)\equiv 0\big(\mathrm{mod}\,(p+1)!\big) \tag{1}$$

for natural L and p, the symbol (a,b) denoting the g. c. d. (greatest common divisor) of a and b;

$$\frac{\prod_{k=0}^{p}(\varrho n^s-k)}{n^{s-p+1}}\equiv 0\big(\mathrm{mod}\,(p+1)!\big) \tag{2}$$

for natural ϱ, n, s and $p>1$.

The congruences (1) and (2) generalize the well known congruence

$$\prod_{k=1}^{p}(L-k)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p!)$$

in two different directions.

25. I. 1952. H. Rasiowa and R. Sikorski, *Algebraic treatment of the notion of satisfiability* (voir Fundamenta Mathematicae 40 (1952), p. 62-95).

22. II. 1952. J. Oderfeld, *Sur un mode de comparer deux processus de production* (voir le livre du même auteur *Zarys Statystycznej kontroli jakości*, Warszawa 1954, p. 139-140, en polonais).

22. II. 1952. A. Grużewski, *Sur la distribution exacte de la variable aléatoire envisagée par J. Oderfeld.*

22. II. 1952. M. Fisz, *The limiting distribution of a function of two independent random variables and its statistical application* (voir Colloquium Mathematicum 3 (1955), p. 138-146).

29. II. 1952. W. Sierpiński, *Sur des problèmes de P. Erdös et K. Zarankiewicz.*

29. II. 1952. K. Zarankiewicz, *Une remarque sur la présence des progressions arithmétiques dans des suites.*

7. III. 1952. J. Łoś (Toruń), *Recherches algébriques sur les opérations analytiques et quasi-analytiques* (voir Annales de la Société Polonaise de Mathématique 25 (1952), p. 131-139).

14. III. 1952. H. Milicer-Grużewska, *Sur la distribution des fonctions de plusieurs variables aléatoires.*

On trouve facilement la distribution d'une fonction de variables aléatoires en s'appuyant sur la définition de cette variable, due à Kolmogoroff [29]), et appliquant le théorème du même auteur, d'après lequel toute fonction (univoque) d'une variable aléatoire en est également une et sa distribution est déterminée par celle de la première. Ainsi,

$$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2),$$

où $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$, étant par exemple une variable aléatoire dans l'espace $\mathcal{E}^2$ de dimension 2 (aux coordonnées x_1 et x_2) et $F(x_1,x_2)=F_2(\boldsymbol{x})$ étant la distributrice de cette variable, toute fonction borelienne univoque $\varphi(\boldsymbol{x})$, définie dans $\mathcal{E}^2$, est une variable aléatoire dans E avec la distributrice $F_\varphi(a)$ définie par la formule

$$F_\varphi(a)=\int_A dF_2(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

où $A=\underset{\boldsymbol{x}}{E}[\varphi(\boldsymbol{x})\leqslant a]$ (ensemble des $\boldsymbol{x}\in\mathcal{E}^2$ qui satisfont à la condition entre crochets).

La formule (1) fournit aisément celles, d'ailleurs bien connues, pour la distribution de la somme, différence, produit et quotient de deux variables aléatoires X_1 et X_2. En particulier, lorsqu'elles sont normales (0,1) et que $\varphi(\boldsymbol{x})=x_1,x_2$, on trouve

$$F_\varphi(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_1^\infty e^{|a|z}\frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}} & \text{pour}\quad a\leqslant 0,\\[2ex] 1-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_1^\infty e^{-az}\frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}} & \text{pour}\quad a>0.\end{cases}$$

Si les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes et leurs densités de probabilité sont $f_1(x)$ et $f_2(x)$ respectivement, la formule (1) prend la forme

$$F_\varphi(a)=\int_A f_1(x_1)f_2(x_2)\,dx_1\,dx_2. \tag{2}$$

Si la fonction $\varphi(\boldsymbol{x})$ est biunivoque à l'égard de l'une des variables x_1 et x_2, de x_2 par exemple, et le jacobien $D_2=D_2(u_1,u_2)$ de la transformation

$$u_1=x_1,\qquad u_2=\varphi(x_1,x_2)$$

[29]) A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin 1933, p. 19-20.

est intégrable, la densité $f_\varphi(a)$ de la distribution $F_\varphi(a)$ existe et s'exprime par la formule

$$f_\varphi(a)=F'(a)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(u)f_2(\psi(u,0))|D_2(u,0)|\,du, \tag{3}$$

où $\psi(u_1,u_2)=x^2$ est la fonction inverse de $\varphi(x)$. L'application de la formule (3) est bien facile.

Les formules (1)-(3) se laissent généraliser pour une suite finie arbitraire de k variables aléatoires (il suffit de remplacer x_2 par $\ldots,x_k$). Elles subsistent aussi lorsque la fonction $\varphi(x)$ n'est définie que dans une partie de l'espace $\mathcal{E}^k$.

Un théorème de Fréchet [30]) permettant de passer à la limite sous le signe d'intégrale de Stieltjes par rapport à la ligne d'intégration, les formules (1) et (2) donnent, sous des hypothèses pratiquement peu restrictives, des expressions représentant la distributrice-limite de la fonction d'une suite de variables aléatoires comme celle de la même fonction de variables-limites.

28. III. 1952. K. Zarankiewicz, *Rapport de la III^me Olympiade Mathématique* en Pologne.

4. IV. 1952. K. Kuratowski et S. Turski, *Impressions d'une session de l'Union Mathématique Internationale à Rome.*

25. IV. 1952. K. Borsuk, *Sur quelques résultats récents d'ue session topologiques de l'Institut Mathématique de l'État* (voir les publications suivantes:

K. Borsuk, *Set theoretical approach to the disconnection theory of the euclidian space*, Fundamenta Mathematicae 37 (1950), p. 217-241;

K. Borsuk, *On a irreducible 2-dimensional absolute retract*, Fundamenta Mathematicae 37 (1950), p. 137-160;

K. Borsuk, *Concerning the cartesian product of Cantor-manifolds*, Fundamenta Mathematicae 38 (1951), p. 55-72;

M. Gindifer, *On generalized spheres*, Fundamenta Mathematicae 38 (1951), p. 167-178;

K. Borsuk, *Concerning the homological structure of the functional space S_m^X*, Fundamenta Mathematicae 39 (1952), p. 25-37;

K. Borsuk and J. Jaworowski, *On labil and stabil points*, Fundamenta Mathematicae 39 (1952), p. 159-175;

M. Lubański, *An example of an absolute neighbourhood retract which is the common boundary of three regions in the 3-dimensional Euclidean space*, Fundamenta Mathematicae 40 (1953), p. 29-38).

[30]) M. Fréchet, *Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités (I)*, Paris 1937, p. 180-185.

25. IV. 1952. E. Marczewski (Wrocław), *Projections in abstract sets* (voir Fundamenta Mathematicae 40 (1953), p. 160-164).

2. V. 1952. C. Kuratowski, *Sur les recherches topologiques de l'Institut Mathématique de l'État dans la direction ensembliste.*

9. V. 1952. W. Orlicz (Poznań), *On the convergence of functionals representable as integrals over some classes of bounded functions* (voir Studia Mathematica 13 (1953), p. 208-217).

9. V. 1952. H. Rasiowa, *Sur la compacité des classes arithmétiques.*

16. V. 1952. S. Turski, *Une contribution à la théorie du potentiel.*

23. V. 1952. M. Stark, *Sur l'enseignement des mathématiques aux universités soviétiques.*

30. V. 1952. E. Marczewski (Wrocław), *Sur les processus stochastiques poissoniens et les propriétés fondamentales de ceux le plus simples* (en préparation pour Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, en polonais).

6. VI. 1952. M. Fisz et O. Lange, *Sur les travaux de statistique mathématique de l'Institut Mathématique de l'Etat.*

6. VI. 1952. H. Rasiowa et R. Sikorski, *On the representation of pseudocomplemented lattices* (see *Algebraic treatment of the notion of satisfiability*, Fundamenta Mathematicae 40 (1953), p. 62-95, especially p. 88-92).

13. VI. 1952, S. Mazur, *Sur les recherches de l'Institut Mathématique de l'État dans le domaine de l'analyse fonctionnelle.*

20. VI. 1952. R. Sikorski, *Problèmes actuels de la théorie des fonctions quasi-périodiques.*

20. VI. 1952. M. Chojnacka, *On the congruences with given roots.*

A partial solution of the problem, whether for each finite set of remainders $x_1, x_2, \ldots, x_m \bmod m$ there exists a polynom $f(x)$ with integer coefficients such that the remainders are the only roots of the congruence $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$. Namely, if m is a prime number or the number 4, then the answer is positive. The negative answer was found for $m = 6, 8, 9$ and 10. In each of these cases some special set of remainders can be chosen for which the negative answer can be proved. If a polynom has some of the roots of this set, it has the others as well though they are not congruent with the first $\bmod m$.

27. VI. 1952. A. Rényi (Budapest), *Sur les travaux de l'Institut de Mathématique Appliquée de l'Académie Hongroise des Sciences.*

4. VII. 1952. W. Sierpiński, *Sur les travaux récents de la théorie des ensembles.*

11. VII. 1952. A. Granas, *Sur les applications des groupes de cohomotopie.*

10. X. 1952. V. Kníchal (Prague), *Sur le théorème de Stokes*[31].

17. X. 1952. P. Turán (Budapest), *On the theory of graphs*[32] (voir Colloquium Mathematicum 3 (1954), p. 191-230).

24. X. 1952. L. Łukaszewicz, *Analysateurs électroniques des équations différentielles.*

31. X. 1952. W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles analytiques linéaires (solution d'un problème de E. Marczewski)* (voir Fundamenta Mathematicae 40 (1953) p. 171).

7. XI. 1952. M. Stark, *Le plan des éditions mathématiques.*

14. XI. 1952. S. Turski, *Sur la théorie de l'élasticité.*

21. XI. 1952. C. Kuratowski, *Sur les résultats récents des mathématiciens soviétiques en topologie.*

21. XI. 1952. R. Sikorski, *Sur quelques résultats des mathématiciens soviétiques dans la théorie des fonctions réelles.*

21. XI. 1952. S. Turski, *Sur les travaux des mathématiciens soviétiques dans le domaine des applications.*

28. XI. 1952. H. Steinhaus (Wrocław), *The principles of statistical quality control* (see Zastosowania Matematyki 1 (1954), p. 4-27, in Polish).

The statistical quality control makes the decision concerning a lot of goods dependent upon the quality of specimens in a sample by means of a sampling acceptance plan. A plan which minimizes the economic loss is the best. The loss is the sum of the damage resulting from a wrong decision and of the cost of sampling; it has the form $S(a,t)$, where a is the quality of the lot and t — a real number associated in a bi-unique manner with a set of random numbers indicating the specimens assigned for a sample.

In order to determine the best plan it is necessary to give a numerical value to the function $S(a,t)$ by making a and t into apparent variables. Integration with respect to t changes the loss S into the expected loss,

[31]) Cf. Section de Wrocław, séance du 18. X. 1952, Colloquium Mathematicum 3 (1954), p. 196.

[32]) Cf. Section de Wrocław, séance du 27. X. 1952, Colloquium Mathematicum 3 (1954), p. 197.

while a can be eliminated by various methods. Each of those methods leads to a certain optimum plan if we accept a suitable hypothesis concerning the distribution of the quality $\{a_n\}$ in a sequence of lots presented for acceptance, and consider — instead of the loss in a single acceptance — the mean loss in a set of acceptances.

All known methods of statistical quality control fall under this scheme. Their economic rationality 'depends on the rationality of the hypothesis concerning the distribution of a_n. It has been found that all hypotheses appertaining to methods commonly applied are artificial, and the illusion that some modern methods are superior to others rests on the hypotheses being camouflaged. An analysis of five typical methods shows that the so-called *retrospective method*, condemned on account of its allegedly wrong application of the Bayes rule, is by no means inferior to other methods. On the contrary, the hypothesis appertaining to it is more natural than the hypotheses appertaining to other methods.

28. XI. 1952. J. Oderfeld et S. Zubrzycki (Wrocław), *Sur le contrôle des compteurs d'eau*[33]).

5. XII. 1952. W. Sierpiński, *Sur les formules pour le n-ième nombre premier.*

5. XII. 1952. W. Zawadowski, *Sur le théorème de Banach-Stone.*

12. XII. 1952. J. Novák (Prague), *Sur quelques problèmes de Lusin concernant les ensembles de nombres naturels*[34]).

19. XII. 1952. J. Mikusiński (Wrocław), *Sur le calcul opératoire et son rapport aux autres disciplines mathématiques* (voir le livre du même auteur *Rachunek operatorów*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1953).

9. I. 1953. R. Marczyński, *Machines électroniques universelles.*

16. I. 1953. M. Fisz, *Distributions-limites des sommes de variables aléatoires indépendantes.*

23. I. 1953. K. Zarankiewicz, *On a problem of P. Turán concerning graphs* (voir Fundamenta Mathematicae 41 (1954), p. 137-145).

Deux suites finies de points $p_1,\dots,p_m$ et $q_1,\dots,q_n$ situés sur le plan y sont unis chacun à chacun par des arcs (images homéomorphes du segment rectiligne) A_{ij} tels que $A_{ij'}\cdot A_{ij''}=(p_i)$ et $A_{i'j}\cdot A_{i''j}=(q_j)$ pour $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$, $i'\neq i''$ et $j'\neq j''$, et que les autres points d'intersections n'appartiennent jamais à trois arcs à la fois.

[33]) Cf. Section de Wrocław, séance du 20. II. 1953, Colloquium Math. 3 (1955), p. 203.

[34]) Cf. Section de Wrocław, séance du 15. XII. 1952, Colloquium Mathematicum 3 (1954), p. 198.

$I(m,n)$ désignant le plus petit nombre possible de ces points d'intersection et $R(m,n)$ — celui, également le plus petit possible, de régions en lesquelles $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}A_{ji}$ coupe le plan, on a

$$I(2m,2n)=(m^2-m)(n^2-n),\qquad I(2m,2n+1)=(m^2-m)n^2,$$

$$I(2m+1,2n+1)=m^2n^2,\qquad R(m,n)=I(m,n)+(m-1)(n-1)+1.$$

23. I. 1953. A. Mostowski, *Remarques sur les polynômes dans les corps abstraits.*

13. III. 1953. R. Hampel, *The length of the shortest period of rest* mod m *of the numbers* n^n.

Denote by S_m the shortest period of rests mod m of n^n, where $n=1,2,\dots$, by $p_1,\dots,p_k$ different prime numbers, by φ the Gauss function, and by L the least common multiple of the numbers $\varphi(p_i^{a_i})$, where $i=1,\dots,k$. Set

$$m=\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i}.$$

Then

$$m\,|\,S_m\,|\,L\cdot\prod_{i=1}^{k}p_i\,|\,\varphi(m)\cdot\prod_{i=1}^{k}p_i\,|\,m\cdot\varphi(m).$$

E. g. for

$$(1)\qquad m=p^a\quad\text{and}\quad m=2p^a,$$

where $p\neq 2$, we have $S_m=p^a(p-1)$. If

$$(2)\qquad p_i\geqslant a_i\quad\text{for}\quad i=1,\dots,k,$$

the period begins from $n=1$, and if not all the conditions (2) are satisfied, it suffices to begin the period from the number $n=\max\limits_{i=1,\dots,k}a_i$. Particularly for the moduli (1) the period begins from $n=1$, when $p\geqslant a$, and from $n=a$, when $p<a$.

20. III. 1953. M. Fisz, *The limiting distributions of sums of arbitrary independent and equally distributed r-point* ($r\geqslant 2$) *random variables* (voir Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 1 (1953), p. 231-234).

27. III. 1953. J. H. C. Whitehead (Oxford), *A first approximation to the homotopy theory.*

10. IV. 1953. T. Leżański, *The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces* (voir Studia Mathematica 13 (1953), p. 244-276).

17. IV. 1953. W. Pogorzelski, *Problèmes aux limites de Hilbert-Privaloff.*

24. IV. 1953. G. Hajós (Budapest), *Sur le problème de la factorisation des groupes*[35]).

8. V. 1953. G. Hajós (Budapest), *Une généralisation de la formule de Gauss-Bonnet*[36]).

15. V. 1953. J. Łoś (Toruń), *Sur les modèles de systèmes algébriques.*

15. V. 1953. A. W. Mostowski, *Sur les bases de groupes abéliens.*

La condition établie par Szele[37]), qui est suffisante pour qu'un ensemble Z de générateurs du groupe abélien G y soit une base, n'est pas nécessaire. Aucun ensemble de générateurs n'est extrémal dans la somme directe faible $C_{p_1}\times C_{p_2}\times\ldots$ de groupes cycliques dont les ordres $p_1<p_2<\ldots$ sont des nombres premiers.

Soient F et I l'ensemble des éléments d'ordre fini et de ceux d'ordre infini respectivement, et $r(x)$ — l'ordre de l'élément x du groupe G. Une modification de la condition de Szele conduit au théorème:

Pour qu'un ensemble Z de générateurs d'un groupe abélien G, distincts du zéro, y soit une base, il faut et il suffit que, quels que soient les ensembles finis X et Y engendrant le même sous-groupe de G, les deux conditions suivantes soient satisfaites:

(1) $X\subset F\cdot Z$ *et* $Y\subset F\cdot G$ *entraînent* $\prod_{x\in X} r(x)\leqslant\prod_{y\in Y} r(y)$,

(2) $X\subset I\cdot Z$ *et* $Y\subset G$ *entraînent* $\overline{\overline{X}}\leqslant\overline{\overline{I\cdot Y}}$

(le trait double désignant la puissance).

Ce théorème entraîne facilement celui d'existence d'une base dans les groupes abéliens à un nombre fini de générateurs.

22. V. 1953. R. Sikorski, *Sur le prolongement des fonctionnelles.*

29. V. 1953. A. Ehrenfeucht, *Deux théorèmes sur les groupes commutatifs.*

Un élément a d'un groupe G sera dit *simplement divisible* lorsque l'équation $nx=a$, où n est entier positif, n'est résoluble que pour un ensemble fini de valeurs de n.

J. H. C. Whitehead a posé les questions suivantes:

1. En supposant que tout élément distinct du zéro d'un groupe commutatif est simplement divisible, ce groupe est-il libre?

[35]) Cf. Section de Wrocław, séance du 28. IV. 1953, Colloquium Math. 3 (1955), p. 208.

[36]) Cf. Section de Wrocław, séance du 30. IV. 1953, Colloquium Math. 3 (1955), p. 208, et Section de Cracovie, séance du 2. V. 1953, ce volume, p. 95.

[37]) T. Szele, *On direct sums of cyclic groups*, Publicationes Mathematicae 2 (1951), p. 76.

2. Le groupe $C^{\aleph_0}$ (produit fort de groupes cycliques infinis) est-il un groupe libre?

Les réponses sont négatives.

La première: soient $a_1, a_2, \ldots$ les générateurs d'un groupe commutatif libre G, et H — le plus petit sous-groupe de G contenant tous les éléments de la forme $a_i-a_{i+1}-3a_{i+2}$ pour $i=1,2,\ldots$; alors le groupe-quotient G/H n'est pas libre, bien que chacun de ses éléments distincts du zéro soit simplement divisible.

La seconde: on a le

THÉORÈME. *G étant un groupe commutatif libre, toute suite infinie $a_1,a_2,\ldots$ de ses éléments indépendants contient une suite partielle $a_{i_1},a_{i_2},\ldots$ telle que, pour une suite convenable de nombres premiers croissants $p_1,p_2,\ldots$, la condition suivante est satisfaite: quel que soit $a\in G$, il existe un entier positif N tel que, $n_1,n_2,\ldots,n_k$ étant une suite finie arbitraire d'entiers positifs où $k>N$ et $(n_k,p_k)=1$, l'équation*

$$p_k x = a + n_1 a_{j_1} + n_2 a_{j_2} + \ldots + n_k a_{i_k}$$

n'a pas de solution dans G.

La thèse de ce théorème étant en défaut pour le groupe $C^{\aleph_0}$, ce groupe n'est pas libre.

12. VI. 1953. J. Kurzweil (Prague), *Contribution à la théorie des approximations dans les espaces de Banach*[38]).

9. X. 1953. H. Steinhaus (Wrocław), *Quelques applications des principes topologiques à la géométrie des corps convexes* (voir Fundamenta Mathematicae 41 (1955), p. 284-290).

Certains théorèmes topologiques, comme celui de Poincaré et Brouwer sur l'impossibilité d'avoir un champ continu de vecteurs non-nuls tangents à tous les points de la sphère, ou encore celui sur l'impossibilité de réaliser dans l'espace une image topologique du plan projectif, conduisent facilement à des théorèmes géométriques sur les corps convexes. Tel est, parmi dix exemples envisagés par l'auteur, le théorème suivant: *tout point intérieur d'un corps convexe est le centre de gravité d'au moins une section plane de ce corps convenablement choisie, et il y a de points qui le sont d'au moins deux sections à la fois.*

16. X. 1953. A. Mostowski, *Sur les puissances des algèbres finies.*

Solution partielle d'un problème de Scholz[39]).

Notations. F — une expression arbitraire du calcul fonctionnel restreint sans variables libres; Z_F — l'ensemble des entiers positifs n pour

[38]) Cf. Section de Cracovie, séance du 16. VI. 1953, ce fascicule, p. 95.

[39]) H. Scholz, Journal of Symbolic Logic 17 (1952), p. 160.

lesquels F a un modèle dans un ensemble à n éléments; Φ — la plus petite classe de fonctions qui contient les fonctions

$$z(x,n)=0, \quad S(x,n)=(x+1)\cdot\min(0,n-(x+1))$$

et qui est close à l'égard de trois opérations suivantes:

(a) substitutions aux variables distinctes de n,

(b) identification de variables, toutefois sans que n soit remplacé par une autre lettre,

(c) induction conduisant des fonctions

$$G(p_1,\ldots,p_k,n) \quad \text{et} \quad F(x,p_1,\ldots,p_k,u,n)$$

à la fonction $f(x,p_1,\ldots,p_k,n)$ telle que $f(0,p_1,\ldots,p_k,n)=G(p_1,\ldots,p_k,n)$ et

$$f(x+1,p_1,\ldots,p_k,n)=\begin{cases} F(x,p_1,\ldots,p_k,f(x,p_1,\ldots,p_k,n),n) & \text{lorsque le membre droit ne dépasse pas } n \text{ et } x<n,\\ 0 & \text{dans tous les autres cas;}\end{cases}$$

enfin, K — la classe de tous les ensembles de la forme $\underset{n}{E}(f(n)=0)$, où f est une fonction d'une seule variable et appartient à Φ.

Résultats. I. Z_F est un ensemble primitivement récursif, quel que soit F.

II. Il existe des ensembles A primitivement recursifs et tels que $A\neq Z_F$, quel que soit F.

III. Quel que soit $A\in K$, il existe un F tel que $A=Z_F$.

16. X. 1953. R. Sikorski, *Sur les mesures déterminées par des fonctions additives d'ensembles* (voir Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, seria I — Prace Matematyczne 1 (1955), en polonais, à paraître).

23. X. 1953. W. Sierpiński, *Sur les triangles pythagoréens aux aires égales* (voir Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, seria II, Wiadomości Matematyczne 1 (1955), en polonais, à paraître).

23. X. 1953. J. Łoś (Toruń), *Sur l'existence d'un ordre linéaire dans les groupes* [40].

30. X. 1953. W. Ślebodziński (Wrocław), *L'oeuvre scientifique de K. Żorawski* [41]) (voir ce fascicule, p. 74-88).

[40]) Voir Section de Toruń, séance du 9. X. 1953, ce fascicule, p. 115.

[41]) Voir Section de Wrocław, séance du 24. II. 1953, Colloquium Mathematicum 3 (1955), p. 203.

6. XI. 1953. T. Czechowski, M. Fisz et R. Sikorski, *Sur l'oeuvre scientifique de A. N. Kolmogoroff.*

13. XI. 1953. H. Greniewski, *Une application de l'algèbre de Boole à 2 éléments.*

20. XI. 1953. W. Słowikowski, *Sur une classe d'espaces B_0 de Mazur et Orlicz.*

L'espace $X(|x|_k)$ qui est un B_0 [42]) avec la suite $\{|x|_k\}$ de pseudonormes est dit *totalement complet,* lorsqu'il existe une suite $\{|x|_k^*\}$ de pseudonormes, équivalente dans cet espace à la suite $\{|x|_k\}$ et telle que, pour tout k_0, la convergence $|x_n-x_m|_{k_0}^*\to 0$ avec $n\to\infty$ et $m\to\infty$ entraîne l'existence d'un $x_0\in X$ pour lequel on a la convergence $|x_n-x_0|_{k_0}^*\to 0$ avec $n\to\infty$.

Le théorème suivant constitue la solution d'un problème proposé par A. Alexiewicz:

Pour qu'un espace $X(|x|_k)$ étant un B_0 soit totalement complet, il faut et il suffit qu'il existe une suite $\{a_n\}$ de nombres positifs pour laquelle

$$\sup_n a_n \inf(|x+y|_n; x\in X, y\in X, |y|_k=0)<\infty,$$

quel que soit $k=1,2,\ldots$

4. XII. 1953. S. Drobot et M. Warmus (Wrocław), *Dimensional Analysis in sampling inspection of merchandise* [43]) (voir Rozprawy Matematyczne V (1953), en anglais, et Zastosowania Matematyki 2 (1954), p. 1-33, en polonais avec un résumé en anglais).

11. XII. 1953. A. Schinzel, *Sur un problème de Fermat* (à paraître dans Wiadomości Matematyczne 1 (1955), en polonais).

P. Fermat a posé à J. Wallis le problème de trouver tous les entiers positifs $n\neq 1$ tels que la somme des diviseurs de n^3 soit un carré. D'après le théorème établi récemment par l'auteur, le nombre 7 est le seul nombre premier ayant cette propriété.

11. XII. 1953. K. Zarankiewicz, *Un théorème sur l'uniformisation de fonctions continues et son application à la démonstration du théorème de F. J. Dyson concernant les transformations continues de la surface sphérique* (voir Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 2 (1954), p. 115-119, et R. Sikorski and K. Zarankiewicz, *On uniformization of functions (I),* Fundamenta Mathematicae 41 (1955), p. 339-344).

[42]) S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires (I),* Studia Mathematica 10 (1948), p. 184-208.

[43]) Cf. Section de Wrocław, séance du 26. IX. 1952, Colloquium Mathematicum 3 (1955), p. 196.

Théorème. *Soit $f_i(x)$, où $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $i=1,2,\dots,n$, un système de n fonctions continues satisfaisant aux deux conditions suivantes*:

(1) $0=f_i(0)\leqslant f_i(x)\leqslant f_i(1)=1$ *pour* $i=1,2,\dots,n$,

(2) *l'intervalle* $(0,1)$ *se laisse décomposer en un nombre fini d'intervalles dans lesquels chacune des fonctions* $f_i(x)$ *est monotone.*

Alors, il existe un système $g_i(t)$ où $0\leqslant t\leqslant 1$ et $i=1,2,\dots,n$ de fonctions continues, satisfaisant pour tout t aux deux conditions suivantes:

(3) $0=g_i(0)\leqslant g_i(t)\leqslant g_i(1)=1$,

(4) $f_1 g_1(t)=f_2 g_2(t)=\dots=f_n g_n(t)$.

18. XII. 1953. A. Ehrenfeucht, *Un théorème sur les polynômes absolument indécomposables.*

Théorème. *Soit $W_i(x_i)$, où $i=1,2,\dots,n$, un polynôme de degré m_i aux coefficients complexes. Si $(m_1,m_2,\dots,m_n)=1$, le polynôme*

$$W(x_1,x_2,\dots,x_m)=\sum_{i=1}^{n} W_i(x_i)$$

est absolument indécomposable.

18. XII. 1953. A. W. Mostowski, *Une méthode de prévision pour les solutions des équations différentielles aux coefficients constants.*

Il s'agit des équations différentielles linéaires de la forme

(1) $$\alpha(\varphi)\equiv\frac{d^n\varphi}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\dots+a_0\varphi=\psi(t)$$

aux coefficients (complexes) constants.

Les fonctions complexes indéfiniment différentiables d'une variable réelle constituent un espace linéaire dans lequel les transformations

$$M(\varphi)\equiv\frac{d\varphi}{dt}-\varrho\varphi \quad \text{et} \quad D(\varphi)\equiv\frac{d\varphi}{dt},$$

où ϱ est un nombre complexe, sont linéaires.

Soit $[\psi,D]$ le plus petit espace E, tel que $\psi\in E$ et $D(E)\subset E$. Qualifions l'équation (1) *résoluble par la méthode des coefficients indéterminés* lorsqu'il existe un espace R de dimension finie tel que

(2) $$\psi\in\alpha(R)\subset R.$$

La solution de l'équation (1) est alors une combinaison linéaire de $k=\dim R$ vecteurs de la base et leurs coefficients se laissent déterminer en résolvant un système d'équations linéaires. On a le théorème:

Pour qu'il existe un espace R satisfaisant à (2), il faut et il suffit que l'espace $[\psi,D]$ soit de dimension finie.

La nécessité de cette condition est triviale. Pour en établir la suffisance, on peut se borner au cas $\alpha(\varphi)=M(\varphi)$, car toute transformation $\alpha(\varphi)$ se laisse obtenir par superposition de celles de la forme $M(\varphi)$. Or, si ϱ n'est pas une valeur propre de la transformation D de l'espace $[\psi,D]$, cet espace satisfait à (2); il suffit donc de poser $R=[\psi,D]$. Si, par contre, ϱ est une valeur propre de D, et que s est sa multiplicité, l'espace engendré par $[\psi,D]$ et par le vecteur $(t^s/s!)e^{\varrho t}$ satisfait à (2), ce qui achève la démonstration du théorème.

En ramenant la matrice de la transformation D à la forme canonique de Jordan et intégrant le système d'équations ainsi formé, on voit que les espaces $[\psi,D]$ de dimension finie coïncident avec ceux engendrés par un nombre fini de vecteurs de la forme

(3) $$\psi_\lambda=e^{\lambda t}(c_0+c_1t+\dots+c_mt^m),$$

où λ est arbitraire et $m=0,1,\dots,k(\lambda)$.

On a donc le corollaire:

Les fonctions de la forme (3) *et leurs combinaisons linéaires pour divers λ coïncident avec les membres droits de toutes les équations* (1) *résolubles par la méthode de prévision.*

La construction de l'espace R pour l'équation $\alpha(\varphi)=\psi(\lambda)$ entraîne l'autre corollaire, à savoir que *la solution particulière est à chercher dans la forme*

$$\varphi_0=e^{\lambda t}(b_0+b_1t+\dots+b_{m+r}t^{m+r}),$$

où r est la multiplicité de la racine λ du polynôme

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0=0.$$

15. I. 1954. H. Rasiowa, *Algebraic models of axiomatic theories* (voir Fundamenta Mathematicae 41 (1955), p. 291-310).

15. I. 1954. M. Fisz, *A generalization of a theorem of Khintchine* (voir Studia Mathematica 14 (1955), p. 310-313).

15. I. 1954. M. Fisz, *Impressions du séjour en Hongrie.*

19. II. 1954. J. Perkal (Wrocław), *Quelques applications des espaces à plusieurs dimensions dans les sciences naturelles.*

En étudiant un object naturel uniquement à l'égard de ses n caractères fixés d'avance, on peut traiter cet objet comme un système ordonné de n nombres, à savoir qui expriment respectivement les degrés (grandeurs, valeurs) des n caractères en question. On peut donc représenter l'objet étudié par un point de l'espace à n dimensions, les degrés des n caractères jouant le rôle des coordonnées cartésiennes (ou autres) de ce point. D'après certains avis, il serait du formalisme que de traiter des objets naturels comme des points. Cependant, il n'en est pas ainsi. Il n'y a, en effet, que de l'abstraction légitime qui consiste à ne considérer que n caractères de l'objet et d'en négliger les autres [44]).

Les trois problèmes de la systématique, à savoir: ordination, classification et typologie, correspondent au rangement, à la décomposition en parties disjointes et au groupement en types d'un ensemble de points dans un espace à n dimensions.

L'ordination linéaire consiste à tracer un arc (image biunivoque et continue du segment rectiligne) par tous les points de cet ensemble. On peut le faire de diverses manières. L'une en a été proposée par Fisher [45]); elle présume que les points de l'ensemble se laissent ordonner linéairement — hypothèse qui est artificielle et trop restrictive dans bon nombre des cas. Il est plus naturel et plus conforme aux faits de la remplacer par l'ordination ramifiée. Elle consiste à tracer une dendrite passant par tous les points de l'ensemble. On peut le faire de façon que cette dendrite soit la plus courte [46]).

La meilleure décomposition d'un ensemble en parties disjointes peut être obtenue à l'aide de la dendrite par la méthode de minimisation de leurs moments d'inerties, par celle de l'hypersurface de décomposition ou par la méthode des cubes (à n dimensions) de Wanke [47]).

Le problème du groupement en types vient s'y rattacher. La méthode dendritique et celle de Wanke permettent de trouver les points d'accumulation de l'ensemble. Le critériums génétiques de la typologie exigent de trouver dans l'espace à n dimensions les régions invariantes à l'égard de l'hérédité, c'est-à-dire qui contiennent, avec les points des parents, ceux des enfants. Ce sont ces régions qui peuvent être appelées les *types*.

Les régions des excès trouvées par Wanke peuvent tomber sous cette définition.

[44]) *Conférence typologique des antropologues polonais à Wrocław 1954*, Przegląd Antropologiczny 21 (1955), allocution de J. Perkal (à paraître).

[45]) R. A. Fisher *Statistical Methods for Research Workers*, 10me édition, London 1948, p. 285.

[46]) K. Florek J. Łukaszewicz, J. Perkal, H. Steinhaus et S. Zubrzycki, *Sur la liaison et la division des points d'un ensemble fini*, Colloquium Mathematicum 2 (1951), p. 282-285, et *Taksonomia Wrocławska*, Przegląd Antropologiczny 17 (1951), p. 193-211 (en polonais).

[47]) A. Wanke, *Fréquence des systèmes de caractères antropologiques*, Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Wrocław 7 (1952), a paraître.

Une autre notion de type, due à Czekanowski [48]), est définie comme un système de points dits *points de repères* d'un ensemble ponctuel.

On peut déterminer ce système par divers procédés. L'un, proposé par Czekanowski, consiste à résoudre un système d'équations qui, cependant, n'est pas toujours résoluble d'une manière univoque [49]).

26. II. 1954. V. Klega (Prague), *L'itération de deux chemins dans le choix aléatoire.*

26. II. 1954. A. Granas, *Sur la vie mathématique à Moscou.*

5. III. 1954. V. Klega et J. Sedlaček (Prague), *Sur le mode d'appliquer la statistique dans l'industrie.*

5. III. 1954. J. Sedlaček (Prague), *Sur le classement des qualités de matières premières pour les fonderies.*

12. III. 1954. A. Kosiński, *On manifolds and r-spaces* (voir Fundamenta Mathematicae 42 (1955), p. 111-124).

La notion de r-espace, introduite par l'auteur dans ses recherches sur le problème de caractériser topologiquement les variétés de dimension finie, est définie comme celle d'espace métrique séparable de dimension $n<\infty$ dans lequel la frontière de tout domaine ouvert et connexe est un rétracte par déformation de ce domaine privé au préalable d'un point. C'est donc une définition topologique intrinsèque.

Les r-espaces ont beaucoup de propriétés communes avec les variétés topologiques. En particulier, les r-espaces de dimension $n\leqslant 2$ sont des variétés. Pour $n>2$, ce problème est ouvert.

12. III. 1954. R. Sikorski, *A definition of the notion of distribution* (voir Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 2 (1954), p. 209-211).

2. IV. 1954. A. Mostowski, *Sur les prédicats dans les corps algébriques clos.*

Robinson a signalé récemment [50]) le théorème suivant établi par lui:

Tout prédicat $Q(x_1,\ldots,x_n)$ dont les constantes extralogiques désignent la relation $=$, les opérations $+$, $\cdot$ et les éléments d'un corps F détermine un nombre fini d'idéaux $I_0,I_1,\ldots,I_{2k+1}$ de l'anneau $F[x_1,\ldots,x_n]$ qui ont la propriété suivante: F' étant un corps algébri-

[48]) Voir J. Perkal, *Taksonomia Wrocławska* (suite), Przegląd Antropologiczny 19 (1953), p. 82-105 (en polonais), en particulier p. 85.

[49]) J. Perkal, *O pewnych ideach Czekanowskiego i o metodzie Wankego*, Przegląd Antropologiczny 21 (1955), p. 378-395 (en polonais).

[50]) A. Robinson, *On predicates in algebraically closed fields*, Journal of Symbolic Logic 19 (1954), p. 103-114.

que clos contenant F, l'ensemble des points $(a_1,\ldots,a_n)$ où $a_j \epsilon F'$ pour $i=1,\ldots,n$ et qui satisfont dans F' au prédicat Q est de la forme

$$(V_0-V_1)+(V_2-V_3)+\ldots+(V_{2k}-V_{2k+1}),$$

où V_j est pour $j=0,1,\ldots,2k+1$ la variété de l'idéal J_j sur le corps F'.

Or, ce théorème de Robinson résulte d'une manière très simple du théorème de Tarski [51]) sur la décision dans la théorie des corps algébriques clos.

2. IV. 1954. A. Grzegorczyk, *Conceptions constructives de l'analyse* (voir *Elementarily definable analysis*, Fundamenta Mathematicae 41 (1955), p. 311-338, et *Computable functionals*, ibid. 42 (1955), p. 168-202).

9. IV. 1954. W. Sierpiński, *Sur certains développements des nombres réels en produits infinis* (à paraître dans Wiadomości Matematyczne, en polonais).

Généralisations du développement des nombres $\sqrt{(k+2)/(k-2)}$ où $k>2$ publié récemment par Escott [52]) et Oppenheim [53]).

23. IV. 1954. A. Mostowski, *Sur les bases normales pour les extensions infinies.*

Soient L une extension algébrique infinie du corps K ayant la caractéristique 0, G — le groupe de Galois topologique de L par rapport à K et K^G — le module des fonctions continues transformant G en K, la topologie dans K étant supposée isolée. La représentation régulière du groupe G dans K^G soit définie par la formule usuelle

$$g\colon f\to f_g, \quad \text{où} \quad f_g(x)=f(g^{-1}x), \quad g\epsilon G, \quad f\epsilon K^G \quad \text{et} \quad x\epsilon L.$$

Alors, le corps L, considéré comme module par rapport au groupe d'opérateurs G, est isomorphe au module K^G.

23. IV. 1954. R. Sikorski, *Une remarque sur le théorème de Schur de la théorie de sommabilité.*

Démonstration que le théorème de Schur, dans sa forme généralisée par Mazur et Orlicz, est un corollaire immédiat des théorèmes de Vitali, Nikodym et Saks sur les suites de fonctions d'ensembles dénombrablement additives.

23. IV. 1954. R. Sikorski, *Sur une définition des fonctions analytiques* (à paraître dans Wiadomości Matematyczne 1 (1956), en polonais).

[51]) A. Tarski, *A decision method for elementary algebra and geometry*, 2nd edition, Berkeley and Los Angeles 1951, p. 54-55.

[52]) E. B. Escott, American Mathematical Monthly 44 (1937), p. 644-646, et Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 1953, p. 520-529.

[53]) A. Oppenheim, *On the representation of real numbers by products of rational numbers*, Quarterly Journal of Mathematics (2), 4 (1953), p. 303-307.

7. V. 1954. E. Marczewski (Wrocław), *Quelques remarques sur les fonctions monotones* [54]).

7. V. 1954. S. Hartman (Wrocław), *Quelques remarques sur la mesure et la topologie dans les semi-groupes* [55]).

7. V. 1954. W. Słowikowski, *Sur les prolongements algébriques des anneaux et leurs applications à l'analyse.*

14. V. 1954. H. Greniewski, *De l'histoire de la logique.*

21. V. 1954. J. Aczél (Debrecen), *Sur la solution de l'équation de Kolmogoroff concernant les probabilités enchaînées.*

21. V. 1954. H. Steinhaus (Wrocław), *Measuring by comparison* (Voir J. Łukaszewicz i H. Steinhaus, *O mierzeniu przez porównywanie*, à paraître dans Zastosowania Matematyki 2, en polonais) [56]).

21. V. 1954. J. Mikusiński (Wrocław), *Le théorème sur les moments et ses généralisations.*

Théorèmes classiques sur les moments égaux à 0 (théorèmes de Lerch, Müntz et Szász) et leurs analogues plus récents sur les moments bornés. Problèmes connexes concernant les approximations de fonctions continues et la croissance de fonctions analytiques.

4. VI. 1954. M. Fisz, *Sur les distributions limites des distributions polynomiales.*

11. VI. 1954. S. Kulczycki, *Au centenaire de la leçon inaugurale de Riemann.*

SECTION DE WROCŁAW

2. X. 1953. H. Steinhaus, *Quelques applications des principes topologiques à la géométrie des corps convexes* (voir Fundamenta Mathematicae 41 (1955), p. 284-290) [57]).

2. X. 1953. S. Hartman, *Quelques remarques sur les expansions de Fourier* (voir Studia Mathematica 14 (1955), p. 200-208).

2. X. 1953. M. Reichbach, *Une simple démonstration du théorème de Cantor-Bernstein* (voir Colloquium Mathematicum 3 (1954), p. 163).

2. X. 1953. S. Gładysz, *Une application du théorème ergodique* (en préparation pour Studia Mathematica).

[54]) Cf. Section de Wrocław, séance du 4. V. 1954, ce fascicule, p. 147.

[55]) Voir, pour le résumé, Section de Wrocław, séance du 27. IV. 1954, ce fascicule, p. 145.

[56]) Voir, pour le résumé, Section de Wrocław, séance du 11. XII. 1953, ce fascicule, p. 138.

[57]) Cf. Section de Varsovie, séance du 9. X. 1953, ce fascicule, p. 127.

9. X. 1953. J. Łopuszański, *Lösung der Gleichungen von Jánossy für die kosmischen Schauer* (voir Acta Physica Polonica 12 (1953), p. 156-159).

23. X. 1953. J. Słupecki, *Un système de la logique sans opérateurs.*

23. X. 1953. S. Paszkowski, *New methods of tabulation of functions.*

The aim of these new methods is a multiple shortening of tables, only insignificantly enlarging the number of operations necessary at their application. The new kind of factor-method to compute logarithms is an example of a method utilizing the individual properties of functions. In general this method consists in a decomposition of a given number into specially chosen factors (in ordinary tables they were of the form $1+n_i 10^{-k_i}$, where $i=1,2,\ldots,m$ and $0=k_1<k_2<\ldots<k_m$, n_i are positive integers), whose logarithmes are given in tables.

The innovation consists in a different matching of factors, not requiring the use of an arithmometer.

The general methods of tabulation of functions consist in the application of the approximate formula in the form not requiring multiplications:

$$f(a+kx)\approx f(a)+\mathrm{Nlog}[A(a)+X(x)],$$

or

$$f(a+kx)\approx f(a)+\mathrm{Nlog}[A(a)+\log x]+n(a,x),$$

where Nlog denotes the antilogarithm, $0<x<1$, k is the interval of the argument, $f(a)$, $A(a)$, $X(x)$, tabulated values, and the function $n=n(a,x)$ can be represented by an aligment chart. Besides, in order to minimize the error it is very essential to utilize a certain kind of Tchebychev polynomials best uniformly approximating 0.

30. X. 1953. H. Fast, *Étude des courbes à l'aide de l'indicatrice.*

3. XI. 1953. H. Fast, H. Steinhaus, K. Urbanik et S. Zubrzycki, *Sur l'oeuvre scientifique de A. N. Kolmogoroff.*

6. XI. 1953. J. Perkal, *Sur certaines idées de Czekanowski et sur la méthode de Wanke* (Przegląd Antropologiczny 19 (1955), p. 378-395, en polonais [58])).

13. XI. 1953. K. Urbanik, *On quotient-fields generated by pseudonormed rings* (à paraître dans Studia Mathematica).

13. XI. 1953. Z. Moroń, *Sur les décompositions du rectangle en carrés inégaux* (voir Wiadomości Matematyczne 1 (1955), p. 75-94).

13. XI. 1953. H. Fast, *Sur l'ensemble des distances entre les points d'un ensemble de mesure linéaire positive.*

[58]) Cf. Section de Varsovie, séance du 19. II. 1954, ce fascicule, p. 131.

13. XI. 1953. B. Knaster, *Un théorème sur les décompositions semicontinues.*

Un ensemble compact X situé dans le cube à un nombre fini n de dimensions $\mathcal{I}^n$ est supposé décomposé continuement en tranches W_y où $y\epsilon Y$ (c'est-à-dire que la fonction $f(x)=y$ pour $x\epsilon W_y$ est continue et transforme les ensembles ouverts en ensembles ouverts) qui sont des continus de diamètre $\delta_y\geqslant 1$. Elles sont donc des continus disjoints. Quel que soit $\varepsilon>0$, il existe dans $\mathcal{I}^n$ un ensemble fini des solides à n dimensions, disjoints, de diamètres inférieurs à ε et qui immobilisent toutes les tranches de X (c'est-à-dire que chacune d'elles a des points communs avec un au moins de ces solides) [59]).

L'existence d'une telle immobilisation pour les décompositions semi-continues (c'est-à-dire pour le cas des fonctions $f(x)$ continues arbitraires) semble douteuse.

13. XI. 1953. J. Mycielski, *Sur la fonction* $\gamma(n)$ (en préparation pour Annales Polonici Mathematici).

20. XI. 1953. J. Mikusiński, *Sur la notion de distribution.*

27. XI. 1953. A. Rybarski, *Le principe de variation en hydromécanique.*

27. XI. 1953. K. Urbanik, *Un problème de J. F. Pál* (voir Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, classe III, 2 (1954), p. 203-205).

27. XI. 1953. C. Ryll-Nardzewski (Varsovie), *Sur le corps des opérateurs de Mikusiński* (voir Studia Mathematica 14 (1954), p. 247-248).

4. XII. 1953. J. Mycielski, *Ensembles singuliers sur la sphère* (en préparation pour Fundamenta Mathematicae).

4. XII. 1953. A. Götz, *Über eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer invarianten Metrik in homogenen Räumen* (voir Bull. de l'Acad. Pol. de Sci., Cl. III, 3 (1955), p. 467-469).

4. XII. 1953. H. Steinhaus, *Sur l'impossibilité de prolonger un champ vectoriel continu, défini aux points de la frontière d'une région plane, conformément à la tangente en ces points.*

Il s'agit du théorème d'après lequel la seule région plane multicohérente qui ne se prête pas à un tel prolongement est l'anneau circulaire. Ce théorème est une conséquence directe de celui dû à Lefschetz et d'après lequel la somme des tourbillons du champ vectoriel continu, défini sur la sphère à 2 dimensions privée d'un nombre fini de points, est toujours égale à 4π. Sans recourir à des moyens aussi profonds, l'im-

[59]) Une démonstration plus récente et plus simple de ce théorème est due à A. Kosiński; voir Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences 3 (1955), p. 69-72.

possibilité du prolongement en question est facile à démontrer dans les cas particuliers où la région est l'intérieur du cercle sans ou avec 2 trous.

11. XII. 1953. J. Łukaszewicz et H. Steinhaus, *Mesurage par comparaison* [60]).

L'assortiment de calibres comprend n orifices ronds de diamètres $k_1<k_2<\ldots<k_n$. Si un cylindre de diamètre s ne passe pas par le r-ième orifice, mais passe par le suivant, on a $k_r<s<k_{r+1}$. Il s'agit de trouver r, c'est-à-dire épuiser les renseignements que l'assortiment peut fournir. Si $n=2^m-1$ (pour un m entier positif), il suffit à cette fin de faire m épreuves; le nombre m est le plus petit ayant cette propriété.

Cette méthode peut être améliorée en introduisant les *jugements* à savoir les nombres j_i (pour $i=1,2,\ldots,n+1$) tels que

$$j_1<k_1<j_2<k_2<\ldots<k_n<j_{n+1},$$

et en convenant de juger $s=j_{r+1}$ lorsque $k_r<s<k_{r+1}$.

Le problème s'impose de déterminer le minimum de l'erreur absolue moyenne, c'est-à-dire de l'expression $E|s-j|$. Connaissant la densité $f(s)$ de la distribution des diamètres s dans la collection examinée et fixant le nombre n, les conditions nécessaires et suffisantes pour le minimum sont les suivantes:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & k_i=\dfrac{1}{2}(j_i+j_{i+1}) \\ (2) & \displaystyle\int_{k_i}^{j_{i+1}} f(s)\,ds=\int_{j_{i+1}}^{k_{i+1}} f(s)\,ds\end{array}\right\}\quad \text{pour}\quad i=0,1,\ldots,n,$$

où $k_0=0$ et $k_{n+1}=\infty$.

Pour déterminer les calibres lorsque ce sont les jugements qui sont connus, ou réciproquement, on a qu'à appliquer directement les formules (1) dans le premier cas et les formules (2) dans le second. Lorsque ni les calibres, ni les jugements ne sont donnés, la construction de l'assortiment exige la solution simultanée des systèmes d'équations (1) et (2), ce qui est réalisable dans des cas concrets par voie graphique ou par celle d'approximations successives.

Sous des hypothèses tout à fait générales sur la densité $f(s)$, la solution théorique et celle numérique ne semblent point faciles.

11. XII. 1953. B. Knaster, *Sur certaines bases dans les cubes à n dimensions.*

[60]) Cf. Section de Varsovie, séance du 21. V. 1954, ce fascicule, p. 135.

Admettons que les tranches d'une décomposition continue de l'ensemble compact $X\subset\mathcal{T}^n$ sont des continus. Ils sont donc disjoints, mais peuvent être de dimension et de diamètre fort divers.

Il existe dans $\mathcal{T}^n$ une base (c'est-à-dire une famille d'ensembles ouverts telle que tout ensemble ouvert est somme de certains d'eux) dénombrable et satisfaisant à la condition suivante: *la frontière de tout ensemble de la base n'a avec chacune des tranches de X (qui ne se réduit pas à un seul point) une partie commune non-dense dans cette tranche.*

Ce théorème se déduit par la méthode de catégorie de celui sur l'immobilisation des tranches [61]), et il en est de même quant à la possibilité de le généraliser aux décompositions semi-continues.

8. I. 1954. S. Drobot, *Applications du calcul des opérateurs en statique* (voir Archiwum Mech. Stos. 6 (1954), p. 93-100, en polonais).

8. I. 1954. Jan Mycielski, *Sur les noeuds* (en préparations pour Fundamenta Mathematicae).

11. I. 1954. E. Marczewski, *Impressions du séjour en Hongrie.*

15. I. 1954. S. Gładysz, *A random ergodic theorem* (voir Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 3 (1955), p. 411-414).

15. I. 1954. H. Steinhaus, *Un problème sur les angles entre les tangentes à la sphère aux sommets d'un polyèdre régulier inscrit.*

Il s'agit de placer les vecteurs tangents (par leurs bouts initiaux) à la sphère aux sommets de l'icosaèdre régulier par exemple, de manière que les angles entre les vecteurs voisins soient égaux et les plus petits possibles.

15. I. 1954. H. Steinhaus, *Sur les points ombilicaux de surfaces fermées convexes.*

Une démonstration topologique de l'existence d'un point ombilical sur toute surface fermée convexe a été communiquée à l'auteur avant 1939 par H. Auerbach à Lwów. Le problème proposé à résoudre est d'établir l'existence de deux points de ce genre.

15. I. 1954. J. Mikusiński, *Sur le calcul des opérateurs dans l'intervalle fini.*

19. I. 1954. E. Marczewski, *A remark on the conditional probability in the sense of A. Rényi.*

Let M be a σ-field of subsets of a fixed set X. A function $P(A|B)$ of two variables, where A runs over M and B runs over a subclass Q of M, is called a *conditional probability* (in the sense of Rényi) if and only if:

[61]) Voir séance du 13. XI. 1953, ce fascicule, p. 137.

1. for every fixed B the function $P(A|B|)$ of the variable A is a probability-measure in M,

2. $P(A|BC)\cdot P(B|C)=P(AB|C)$, whenever $A,B\epsilon M$, $C\epsilon Q$ and $BC\epsilon Q$.

It is easy to see that the ordinary conditional probability corresponding to a probability-measure $P(E)$,

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}, \quad \text{where} \quad P(B)>0,$$

is a conditional probability in sense of Rényi. More generally, we say that a conditional probability $P(A|B)$ in M *corresponds to the measure* μ if

$$P(A|B)=\frac{\mu(AB)}{\mu(B)} \quad \text{and} \quad 0<\mu(B)<\infty$$

for every $A\epsilon M$ and $B\epsilon Q$.

In particular, A. Rényi considers the conditional probability corresponding to the Lebesgue measure on the line $-\infty<t<+\infty$.

It is easy to see, that this conditional probability corresponds to no finite measure (and, consequently, to no probability measure).

The purpose of this communication is to prove that there is a conditional probability in the sense of Rényi, which correponds to no measure (that is the answer to a question of A. Rényi).

Let us denote by Q_j $(j=1,2)$ the class of all plane Borel sets, whose j-dimensional measure m_j is finite and positive. Put $Q=Q_1+Q_2$ and

$$P(A|B)=\frac{m_j(AB)}{m_j(B)} \quad \text{for} \quad B\epsilon Q_j \quad (j=1 \text{ and } 2).$$

It is easy to verify that $P(A|B)$ is a conditional probability in the sense of Rényi. From the fact that a square contains infinitely many of disjoint congruent intervals, it follows easily that $P(A|B)$ corresponds to no measure.

19. I. 1954. A. Götz, *Un paradoxe lié à la notion de la probabilité conditionnelle.*

Lorsque la probabilité de la condition est égale à 0, il y a notoirement des difficultés à définir la probabilité conditionnelle. On peut souvent[62]) définir comme il suit la probabilité d'un événement Z à condition que la variable aléatoire v aurait pris la valeur a:

[62]) A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung,* Berlin 1933.

$$P(Z|v=a)=\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} P(Z|a-h<v<a+k),$$

où les conditions des probabilités conditionnelles figurant dans le membre droit ont en général des probabilités positives.

Cependant la probabilité conditionnelle ainsi définie doit être traitée elle-même comme une variable aléatoire (une fonction mesurable de a). Mais alors la valeur $P(Z|v=a)$ ne correspond pas à l'intuition que l'on attache d'habitude à la notion de probabilité conditionnelle.

En traitant les événements comme des ensembles de points du segment $0\leqslant t\leqslant 1$, la probabilité comme mesure de Lebesgue et les variables aléatoires comme des fonctions mesurables, soient $f(t)$ et $g(t)$ deux variables aléatoires définies par les formules:

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \text{lorsque} \quad t=0, \\ 1-\dfrac{1}{n+1} & \text{lorsque} \quad \dfrac{1}{n+1}<t\leqslant\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}, \\ 0 & \text{lorsque} \quad \dfrac{2n+1}{2n(n+1)}<t\leqslant\dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

$$g(t)=\begin{cases} 1 & \text{lorsque} \quad t=0, \\ 0 & \text{lorsque} \quad \dfrac{1}{n+1}<t\leqslant\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}, \\ 1-\dfrac{1}{n+1} & \text{lorsque} \quad \dfrac{2n+1}{2n(n+1)}<t\leqslant\dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

où $n=1,2,\ldots$ Les événements $f(t)=1$, $g(t)=1$ et $t=0$ sont évidemment équivalents. Il est donc naturel d'exiger conformément à l'intuition que l'on ait

$$P(Z|f=1)=P(Z|g=1)=\begin{cases} 1 & \text{lorsque } 0\epsilon Z, \\ 0 & \text{en cas contraire.} \end{cases}$$

On a cependant pour l'ensemble

$$Z=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}, \frac{2n+1}{2n(n+1)}\right]$$

$P(Z|f=1)=1$ et $P(Z|g=1)=0$ simultanément.

D'ailleurs, étant donné un nombre quelconque λ dans l'intervalle $(0,1)$, on peut choisir un ensemble Z ne contenant pas le point 0, donc pour lequel on s'attendrait par intuition à $P(Z|f=1)=0$, mais pour lequel on a $P(Z|f=1)=\lambda$ et $P(Z|g=1)=1-\lambda$.

22. I. 1954. A. Götz, *Sur la séparabilité des groupes topologiques* (voir Fundamenta Mathematicae 42 (1955), p. 55-56, en russe).

Une mesure dénombrablement additive μ est dite *séparable* lorsqu'il existe une famille au plus dénombrable M d'ensembles mesurables par μ et ayant la propriété suivante: quel que soient le nombre $\varepsilon>0$ et l'ensemble E de mesure $\mu(E)$ finie, il existe dans la famille M un ensemble M tel que $\mu\big((E-M)+(M-E)\big)<\varepsilon$. On a le

THÉORÈME. *Pour qu'un groupe topologique localement compact soit séparable, il faut et il suffit que sa mesure de Haar le soit.*

22. I. 1954. J. Perkal, *Sur les ensembles ε-convexes* (voir ce volume, p. 1-10).

22. I. 1954. Z. Moroń, *Sur le problème de Mayer.*

22. I. 1954. S. Gładysz, *Sur l'existence de la limite pour deux transformations conservant la mesure.*

22. I. 1954. S. Hartman, *Sur l'indécomposabilité de transformations en cas de convergence des moyennes vers une constante.*

29. I. 1954. C. Ryll-Nardzewski (Varsovie), *Sur une propriété du processus de Poisson homogène* (voir *Remarks on the Poisson process (III)*, Studia Mathematica 14 (1954), p. 314-318).

29. I. 1954. C. Ryll-Nardzewski (Varsovie), *Un problème sur les probabilités.*

16. II. 1954. S. Hartman, *Compactification de groupes et presque-périodes.*

19. II. 1954. J. Zamorski, *Sur les équations de Spencer-Charzyński pour les fonctions univalentes.*

19. II. 1954. J. Mikusiński, *Une démonstration géométrique de la formule pour la somme de la progression géométrique.*

19. II. 1954. S. Gładysz et H. Steinhaus, *Sur l'égalité asymptotique des sommes de segments rectilignes dont les bouts sont des points successifs d'un ensemble périodique plan.*

23. II. 1954. A. Götz, *Sur la métrisation du groupe des isométries.*

$\mathcal{E}$ étant un espace métrique avec une distance $d(P,Q)\leqslant 1$ et G — un groupe transitif des isométries de $\mathcal{E}$, on appelle *système de repère* de cet espace par rapport au groupe G tout ensemble $\mathcal{S}\subset\mathcal{E}$ tel que pour toute suite $\{x_n\}$ d'éléments de G l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} x_n P = P$$

pour $P\epsilon\mathcal{S}$ entraîne la même égalité pour tous les $P\epsilon\mathcal{E}$.

Etant donné un système de repère $\mathcal{S}$, soit

$$N(x)=\sup_{P\epsilon\mathcal{S}} d(P,xP). \tag{1}$$

Soit ϱ la distance définie dans G à l'aide de la fonction $N(x)$:

$$\varrho(x,y)=N(x^{-1}y). \tag{2}$$

Cette métrique est invariante de gauche

$$\varrho(zx,zy)=\varrho(x,y) \quad \text{pour tout} \quad z\epsilon G,$$

et la fonction xP est continue dans le produit cartésien $G\times\mathcal{E}$.

Divers systèmes de repère donnent lieu ainsi à des métriques différentes et la topologie déterminée dans G par un $\mathcal{S}$ plus vaste est plus forte.

Si le système de repère est compact, la topologie qu'il détermine dans G est la plus faible de toutes celles dans lesquelles la fonction xP est continue. Il en résulte en particulier que toutes les métriques déterminées par les $\mathcal{S}$ compacts sont topologiquement équivalentes.

S'il existe dans G un système de repère compact, ce groupe, pourvu de la métrique définie par les formules (1) et (2), est un groupe topologique pour tout $\mathcal{S}$ (pas nécessairement compact).

26. II. 1954. S. Knapowski, *Sur les plus grands diviseurs premiers de certains produits.*

Soit $\{a_n\}$ une suite croissante d'entiers positifs. Etant donné un entier positif $x\geqslant 1$ et P_x désignant le plus grand diviseur premier du produit

$$\prod_{n=1}^{x}(1+a_n^2),$$

on a le théorème:

Si

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\log(a_1a_2\dots a_n)}{a_n\log a_n}>\frac{1}{2},$$

on a

$$\frac{P_x}{a_x}\to\infty \quad \textit{et} \quad \frac{P_x}{x}\to\infty \quad \textit{pour} \quad x\to\infty.$$

Ce théorème est une généralisation de celui de Tchebycheff pour $a_n=n$. Stormer[63]) en a déduit, pour le même cas particulier, un théorème dont la généralisation — dans la notation ci-dessus — est la suivante:

[63]) C. Stormer, *Une application d'un théorème de Tchebycheff*, Archiv for Mathematik of Naturvidenskab 24 (1902), p. 26.

Si, en outre $a_n = O(n)$, il n'y a parmi les nombres

$$i(i-a_1)(i-a_2)\dots(i-a_x)$$

où $x\to\infty$ qu'un nombre fini avec partie réelle ou partie imaginaire nulle.

26. II. 1954. H. Steinhaus, *Sur l'antipodisme des triangles* (à paraître dans Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, en polonais).

L'ensemble des formes différentes de triangles plans (celles des triangles symétriques étant traitées comme distinctes) peut être transformé par homéomorphie en surface sphérique. Il existe donc un antipodisme dans l'ensemble de ces formes. Un tel antipodisme se laisse définir d'une façon élémentaire.

26. II. 1954. W. Wolibner, *Sur les fonctions p-valentes et p-valentes en moyenne.*

26. II. 1954. J. Perkal, *Sur les équations de Czekanowski*[64]) (voir *O pewnych ideach Czekanowskiego i o metodzie Wankego*, Przegląd antropologiczny 19 (1955), p. 378-395).

2. III. 1954. A. Krzywicki, *Sur l'existence et l'unicité des solutions de certaines équations intégro-différentielles.*

2. III. 1954. M. Warmus, *Un procédé pour résoudre les équations linéaires par la méthode des plus petits carrés* (voir J. Łukaszewicz et M. Warmus, *Metody numeryczne i graficzne*, Warszawa 1955, à paraître).

5. III. 1954. A. Krzywicki, *Sur les méthodes de résolution des équations intégro-différentielles* (suite).

12. III. 1954. J. Łopuszański, *Sur le nombre de formes des cascades cosmiques.*

19. III. 1954. S. Paszkowski, *Sur l'approximation uniforme avec noeuds* (à paraître dans Annales Polonici Mathematici).

26. III. 1954. A. Zięba, *Sur les jeux de position.*

26. III. 1954. K. Urbanik, *Bemerkungen über die mittlere Anzahl von Partikeln in gewissen stochastischen Schauern* (voir Stud. Math. 15 (1955), p. 34-42).

2. IV. 1954. W. Ślebodziński, *Sur les déformations de l'espace.*

8. IV. 1954. J. Rzewuski, *Construction de la solution d'une équation intégro-différentielle.*

[64]) Cf. aussi Section de Varsovie, séance du 19. II. 1954, ce fascicule, p. 131.

8. IV. 1954. Jan Mycielski et S. Paszkowski, *Sur la fonction de Möbius.*

$\mu(n)$ désignant la fonction de Möbius, on a pour tout n entier positif les identités

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{[n/k]}\mu(j)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{[n/k]}\mu(k)=1,$$

dont la seconde est bien connue. Pareillement,

$$\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{[n/k]}j^{\mu(j)}=\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{[n/k]}k^{\mu(j)}=\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{[n/k]}j^{-\mu(k)}=\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{[n/k]}k^{-\mu(j)},$$

ce que l'on peut écrire dans la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{[n/k]}(\log j+\log k)\mu(k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{[n/k]}(\log j+\log k)\mu(j)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{[n/k]}\big(\mu(j)+\mu(k)\big)\log k=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{[n/k]}\big(\mu(j)+\mu(k)\big)\log j$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{[n/k]}\big(\mu(j)+\mu(k)\big)(\log j+\log k)=0.$$

$\Theta_k(n)$ désignant le nombre des représentations de n dans la forme du produit de k facteurs entiers positifs et dépassant 1, et deux représentations différant par l'ordre des facteurs étant considérées comme distinctes on a

$$\mu(n)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\Theta_k(n)\qquad\text{pour } n>1.$$

8. IV. 1954. H. Steinhaus, *Convergence fondamentale et convergence en mesure.*

12. IV. 1954. A. Hulanicki, *Nouvelle démonstration du théorème sur le point invariant* (à paraître dans Wiadomości Matematyczne).

23. IV. 1954. Jan Mycielski, *Sur les non-puissances.*

27. IV. 1954. S. Hartman, *Quelques remarques sur la mesure et la topologie dans les semi-groupes.*

Un élément a d'un semi-groupe abélien H s'appelle *indéfiniment divisible* lorsque l'équation $bx=a$ est résoluble pour tout $b\in H$. Il y a des éléments indéfiniment divisibles dans tout semi-groupe abélien compact. Il résulte des théorèmes connus[65]) qu'ils constituent un groupe compact.

[65]) A. H. Clifford and D. D. Miller, *Semigroups having zeroid elements*, American Journal of Mathematics 70 (1948), p. 117-125.

Un semi-groupe (peut-être non abélien) H étant donné, supposons que $sx=sy$ entraîne toujours $x=y$.

Pour un ensemble $A\subset H$ posons

$$s^{-1}(A)=\{x:x\in H, sx\in A\}.$$

Soit μ une mesure σ-additive dans un corps borelien M de sous-ensembles de H. Si

$$\mu(s^{-1}(A))=\mu(A) \quad \text{pour tout} \quad A\in M,$$

H se laisse prolonger dans un groupe ou bien il existe dans H deux éléments différents a et b tels que $f(ax)=f(bx)$ pour toute fonction $f\in L^2(\mu)$ et pour presque tout $x\in H$.

27. IV. 1954. Z. Mροń, *Sur les bases des décompositions des rectangles en carrés* [66]).

Une décomposition du rectangle en carrés inégaux deux à deux s'appelle *parfaite*. Elle est dite *presque parfaite* lorsqu'il peut y avoir des carrés égaux, mais qui n'ont deux à deux aucun point commun. Le nombre de carrés différents dans une décomposition presque parfaite s'appelle le *degré de cette décomposition.*

Tout carré est décomposable presque parfaitement en 7 carrés dont les côtés sont en rapport 1:3:4:5:6:11:15. Ces carrés se répètent dans la décompositions, mais 4 fois au plus, de sorte que le degré de la décomposition ne dépasse pas 20. L'élément de cette décomposition est le rectangle aù côtés en rapport 11:15, qui se laisse décomposer en 9 carrés dont 5 diffèrent deux à deux. Il est établi qu'aucun autre rectangle n'est susceptible d'une décomposition presque parfaite de degré inférieur à 5 ou en moins que 9 carrés.

Tout rectangle aux côtés commensurables est décomposable en un nombre fini de carrés égaux. En décomposant chacun d'eux presque parfaitement en degré 7, on forme une décomposition presque parfaite du rectangle entier dont le degré est également 7, car les petits carrés angulaires sont inégaux, et il en est de même des petits carrés qui avoisinent l'un l'autre à travers le contour.

On dit que la famille des carrés de côtés 1, 3, 4, 5, 6, 11, 15 constitue une *base de degré* 7 pour les décompositions presque parfaites des rectangles, c'est-à-dire que tout rectangle dont les côtés sont en un rapport rationnel quelconque se laisse décomposer presque parfaitement en degré 7, les carrés de la décomposition ayant les côtés proportionnels à ces 7 nombres.

[66]) Cf. la séance du 13. XI. 1953, ce fascicule, p. 136.

Il n'existe aucune base de degré 5. On ignore s'il en existe une de degré 6.

4. V. 1954. S. Paszkowski, *Sur l'approximation uniforme avec noeuds* (suite).

4. V. 1954. E. Marczewski, *Quelques remarques sur les fonctions monotones.*

11. V. 1954. K. Urbanik, *Limit properties of homogeneous Markoff processes with a denumerable set of states* (voir le Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences Classe III, volume II (1954), p. 371-373).

14. V. 1954. A. Kelus et J. Łukaszewicz, *Le groupement des populations humaines d'après la fréquence de groupes sanguins* (voir Przegląd Antropologiczny 20 (1954), p. 24-63, en polonais, avec un résumé en anglais).

14. V. 1954. J. Łukaszewicz, *Sur la recherche de paternité.*

14. V. 1954. L. Fleck, J. Łukaszewicz et H. Steinhaus, *Sur les porteurs des germes de la diphtérie* (en préparation pour Zastosowania Matematyki).

21. V. 1954. Z. Charzyński (Łódź), *Index d'un point par rapport à une surface fermée dans des espaces à n dimensions et dans celui d'Hilbert.*

21. V. 1954. Z. Charzyński (Łódź), *Équations non-linéaires à plusieurs inconnues et à une infinité d'inconnues.*

28. V. 1954. A. Hallay, *Sur la poursuite dans le cercle.*

28. V. 1954. J. Aczél (Debrecen), *О теории средних* (voir ce fascicule, p. 33-55).

4. VI. 1954. W. Sierpiński (Varsovie), *Ce que je sais et ce que j'ignore sur les décompositions de nombres naturels en sommes de carrés* (voir le livre du même auteur „Teoria Liczb", volume II, a paraître).

4. VI. 1954. R. Sikorski (Varsovie), *On uniformization of functions* (voir Fundamenta Mathematicae 41 (1955), p. 339-350).

8. VI. 1954. K. Borsuk (Varsovie), *Un théorème sur le balayage.*

11. VI. 1954. W. Słowikowski (Varsovie), *Sur la topologie dans l'espace des distributions.*

11. VI. 1954. H. Steinhaus, *Une remarque sur les fonctions essentiellement de 3 variables* (à la communication de J. Aczél du 28. V. 1954).

11. VI. 1954. J. Mikusiński, *Une remarque sur les démonstrations difficiles de l'analyse.*

18. VI. 1954. J. Battek et J. Perkal, *Sur le développement des arbres et des peuplements d'arbres.*

18. VI. 1954. J. Perkal, *Sur le développement des caractères morphologiques de la tête.*

18. VI. 1954. H. Steinhaus, *Sur la variance limite du nombre de sommets d'un réseau qui tombent dans une région donnée.*

COLLOQUIUM MATHEMATICUM
est à obtenir par l'intermédiaire de
KSIĄŻKA i PRASA
Bureau d'Importation et d'Exportation
Varsovie (Pologne), Koszykowa 31
Le prix d'un fascicule est 1,25 $