H. Steinhaus a attiré l'attention sur le paradoxe des mesures d'une longueur; il a aussi indiqué une méthode pour l'éviter [6]). Ce paradoxe réside dans l'impossibilité de mesurer avec exactitude la longueur des lignes offertes par la nature, telles que la longueur de la rive gauche de la Vistule, par exemple, ou d'une lame de couteau. En effet, plus fin est le mesurage, plus la longueur augmente: elle semble tendre à l'infini avec l'exactitude du mesurage. Or, le paradoxe en question se laisse supprimer également au moyen de l'enveloppe ε-convexe. Il n'y a pas de difficulté à la définir pour la rive d'un fleuve. La valeur de ε peut être de 1 km ou de 1 cm par exemple. On peut fixer cette valeur conformément au but du mesurage. C'est donc une question de convention, mais toutes les solutions du paradoxe de la longueur qui me sont connues contiennent des grandeurs de pure convention.

Un paradoxe analogue se présente pour l'aire d'une surface naturelle, d'un terrain ou d'un lambeau de cuir par exemple. En le mesurant de plus en plus exactement, il faut tenir compte des rugosités de plus en plus petites de sa surface, ce qui en augmente l'aire indéfiniment. Ce paradoxe, tout comme le précédent, peut être supprimé par le passage à l'enveloppe ε-convexe du lot ou du cuir.

Le paradoxe du volume est un peu différent. En mesurant avec l'exactitude croissante le volume d'un corps naturel, d'un animal par exemple, on est contraint de soustraire d'abord le volume des cavités, puis celui des espaces intercellulaires, intermoléculaires et ainsi de suite. Le volume de l'animal tombe ainsi presque à zéro. Mais ici encore l'emploi de l'enveloppe ε-convexe avec un ε raisonnablement choisi permet de s'entendre sur l'objet qu'il s'agit de mesurer et d'en déterminer le volume.

En examinant la pousse des herbes des prairies, il m'a fallu définir géométriquement la touffe d'herbes et son aire [7]). J'ai été amené au paradoxe de l'aire, analogue à celui du volume qui vient d'être décrit: je devais sans cesse rejeter de la touffe les rognures non couvertes par les projections des feuilles. Ces difficultés m'ont suggeré l'idée d'enveloppes ε-convexes. Il s'est montré bientôt que l'on pouvait assigner à chaque espèce d'herbe un ε choisi de façon que l'enveloppe ε-convexe d'une prairie ne confonde jamais deux touffes distinctes et qu'elle fasse d'une touffe toujours une région simplement connexe.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

[6]) H. Steinhaus, *Length, shape and area*, Colloquium Mathematicum 3 (1954), p. 1-13, en particulier p. 8-9.

[7]) J. Perkal, *Geometryczne wskaźniki łąk*, Zastosowania Matematyki II. 2 (1955), p. 133-149 (avec résumés en anglais et en russe).

A NOTE ON LABIL POINTS

BY

A. KOSIŃSKI (WARSAW)

A point p of a (metric, separable) space K is said to be an *homotopically labil point* (h. l. p.) in K if, given a neighbourhood U of p, there exists a continuous deformation $f(x,t)$ of $\overline{U}$ into itself which is the identity on $\mathrm{Fr}(\overline{U})$ and such that p is not in $f(\overline{U},1)$.

If K is an ANR (absolute neighbourhood retract), then this definition is equivalent to the following one: given $\varepsilon>0$ there exists a continuous mapping f of K into itself such that $\varrho(x,f(x))<\varepsilon$ and p non $\epsilon f(K)$ (see [1], 1 and 3).

H. Noguchi established recently a theorem giving a characterization of h. l. p.'s in polytopes ([2], theorem 3.1). His proof is based on a theorem concerning the homological structure of absolute retracts and on the Borsuk-Jaworowski (sufficient) homological criterion for a point to be an h. l. p.

The aim of this note is:

1° to show that the theorem of Noguchi may be extended to a more general class of spaces than that of the polytopes;

2° to give a short proof of the theorem based only on most elementary facts from retracts theory; in particular, no homological notions will be applied.

A neighbourhood U of a point p in a space K will be called *star-shaped* if $\overline{U}$ is an AR and $\mathrm{Fr}(\overline{U})$ is a retract of $\overline{U}-(p)$. A space K will be called *regular* if any point of K has arbitrarily small star-shaped neighbourhoods.

Obviously, every polytope is a regular space (stars being star-shaped neighbourhoods), and any regular space in an ANR. It is easy to give examples of regular spaces which are not polytopes (*e. g.* space Q^* in [3], 2.3).

THEOREM. *A point p of a regular space K is h. l. p. in K if and only if boundaries of sufficiently small star-shaped neighbourhoods of p are absolute retracts.*

Sufficiency proof. (In fact, in this part of proof no regularity conditions are used.) Let $p\epsilon K$ and let U be a neighbourhood of p of diameter less than $\varepsilon>0$ and such that $\mathrm{Fr}(\overline{U})$ is an AR. We have to prove that p is an h. l. p.

Let r be a retraction of $\overline{U}$ to $\mathrm{Fr}(\overline{U})$. Define

$$f(x)=\begin{cases} r(x) & \text{if} \quad x\in\overline{U}, \\ x & \text{if} \quad x\in K-\overline{U}. \end{cases}$$

Then $f(x)$ is a continuous mapping of K into itself, $f(K)$ does not contain p and $\varrho(x,f(x))<\varepsilon$. Hence p is an h. l. p.

Necessity proof. Let p be an h. l. p. and let U be a star-shaped neighbourhood of p. We have to prove that $\mathrm{Fr}(\overline{U})$ is an AR.

Since p is an h. l. p. there exists a continuous deformation $f(x,t)$ of U such that $f(x,0)=x$, $f(x,1)=x$ for $x\in\mathrm{Fr}(\overline{U})$, $f(x,t)\in\overline{U}$, and p is not in $f(\overline{U},1)$. Let r be a retraction of $\overline{U}-(p)$ to $\mathrm{Fr}(\overline{U})$. Then $rf(x,1)$ is a retraction of $\overline{U}$ to $\mathrm{Fr}(\overline{U})$. Since $\overline{U}$ is an AR, so is also $\mathrm{Fr}(\overline{U})$.

REFERENCES

[1] K. Borsuk and J. W. Jaworowski, *On labil and stabil points*, Fund. Math. 39 (1952), p. 159-175.

[2] H. Noguchi, *A characterization of homotopically labil points*, Kodai Mathematical Seminar Reports 1 (1954), p. 13-16.

[3] A. Kosiński, *A topological characterization of 2-polytopes*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 2 (1954), p. 321-323.

SUR LA STRUCTURE DES ENSEMBLES DE NIVEAU DES FONCTIONS RÉELLES À UNE VARIABLE

PAR

Á. CSÁSZÁR (BUDAPEST)

1. On considère déjà en Analyse élémentaire une classification de l'allure d'une fonction réelle $f(x)$ de la variable réelle x au voisinage d'un point x_0 à l'aide de la structure locale des ensembles de niveau

$$\underset{x}{E}[f(x)>f(x_0)], \quad \underset{x}{E}[f(x)\geqslant f(x_0)],$$
$$\underset{x}{E}[f(x)<f(x_0)] \quad \text{et} \quad \underset{x}{E}[f(x)\leqslant f(x_0)].$$

Les faits que $f(x)$ est croissante, décroissante, non-décroissante ou non-croissante au point x_0, ou qu'elle a en ce point un maximum (au sens strict ou au sens large) etc. peuvent être caractérisés par le type de la structure locale au point x_0 des ensembles de niveau mentionnés; or, l'étude de ces types de points est un des problèmes principaux de la théorie élémentaire des fonctions réelles à une variable.

Le but de cette note est de donner deux classifications différentes de l'allure d'une fonction $f(x)$ au voisinage d'un point x_0 d'après la structure locale de ses ensembles de niveau et d'examiner la question quels, parmi les différents types d'allure, sont exceptionnels d'un certain point de vue et quels peuvent être considérés ordinaires. Les classifications que nous allons donner dans ce qui suit et les résultats que nous allons obtenir ont leur analogues dans la théorie des fonctions réelles à plusieurs variables réelles; nous reviendrons sur ces généralisations dans un autre article (voir [2]).

2. Désignons par $\mathfrak{N}$ une famille d'ensembles situés sur la droite $-\infty<x<+\infty$ qui jouit des propriétés suivantes:

(2.1) Si $A\in\mathfrak{N}$ et $B\subset A$, on a $B\in\mathfrak{N}$;

(2.2) Si $A_k\in\mathfrak{N}$ $(k=1,2,\ldots)$, on a $\sum_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathfrak{N}$.

Nous désignons par $\overline{\mathfrak{N}}$ la famille des ensembles qui sont de la forme $N+H$, où $N\in\mathfrak{N}$ et H est dénombrable. La famille $\overline{\mathfrak{N}}$ jouit évidemment