and if this sequence contains k_0 terms, then

$$V=\sum_{k=1}^{k_0-1}\sum_{j=i_k}^{i_{k+1}-1}a_j^1\ldots a_j^n+\sum_{j=i_{k_0}}^{\infty}a_j^1\ldots a_j^n>\sum_{k=1}^{k_0-1}a_{i_{k+1}}^1\sum_{j=i_k}^{i_{k+1}-1}a_j^2\ldots a_j^n>D^{n-1}\sum_{k=1}^{k_0-1}a_{i_{k+1}}^1.$$

Thus in any case

$$\sum_k a_{i_k}^1<\frac{V}{D^{n-1}}+a_1^1\leqslant\frac{V}{D^{n-1}}+D. \tag{5}$$

Assign to each i_k a positive number ε_k such that

$$\sum_k \varepsilon_k=\frac{V}{D^{n-1}}+D-\sum_k a_{i_k}^1$$

(such a sequence exists by (5)) and let Q_k be the parallelepiped with base P_k' and height ε_k. Set the parallelepipeds P_k, Q_k on top of each other in the following order: $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots$ Then we shall obtain an n-dimensional parallelepiped with edges $3D, 3D, \ldots, 3D, \sum_k a_{i_k}^1+\sum_k \varepsilon_k=(V+D^n)/D^{n-1}$, and all the familly $\mathfrak{V}$ will be embedded in P in the desired manner.

MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

SUR LES PARTAGES DU TRIANGLE

PAR

L. DUBIKAJTIS (TORUŃ)

Supposons que dans un triangle il y ait des lignes divisant son intérieur en quelques parties; dans ce cas nous disons que nous avons un *partage* de ce triangle. Nous désignerons le partage par un nombre entre parenthèses ou par une lettre grecque.

Nous dirons que deux partages du triangle sont *équivalents*, si l'on peut transformer l'un d'eux en l'autre à l'aide d'une transformation homéomorphe qui laisse invariants les sommets du triangle divisé. Dorénavant nous ne distinguerons pas les partages équivalents, et nous désignerons l'équivalence des deux partages α et β en écrivant $\alpha=\beta$.

Nous appellerons *noeuds* du partage: 1° les sommets du triangle divisé, en les notant toujours par les lettres A, B, C; 2° les points où se rencontrent au moins trois lignes de partage, en tenant aussi compte des segments des côtés du triangle ABC.

La notion de noeud est une notion invariante des transformations homéomorphes.

Étant donné un partage du triangle, on peut en déduire un nouveau partage en ajoutant de nouvelles lignes de partage. Nous appelons ce nouveau partage — *condensation* du partage précédent.

On peut distinguer parmi tous les partages du triangle une classe spéciale. A cette classe appartiennent les partages qui divisent le triangle ABC en un nombre fini de triangles qui ne possèdent pas de noeuds sur leurs côtés (à l'exception de leurs sommets). Nous appellerons ces partages — *simpliciaux*. Étant donné que nous ne distinguons pas les partages équivalents, nous appelons ici partage simplicial non seulement le partage en triangles — décrit plus haut — mais aussi chaque partage qui lui est équivalent. Par conséquent la notion de partage simplicial a ici un sens plus large que dans la topologie combinatoire. Par exemple, dans la fig. 2, les partages (a) et (b) sont tous les deux simpliciaux alors que, d'après la définition classique, le partage (b) n'est pas simplicial.

Un partage simplicial est donc un partage du triangle ABC en un nombre fini de domaines sur les frontières desquels il y a exactement trois noeuds. Remarquons pourtant que cette dernière condition n'est pas suffisante pour que le partage soit simplicial. Par exemple nous avons, dans la fig. 2(c), un partage du triangle ABC en quatres domaines et la frontière de chacun d'eux contient trois noeuds, pourtant ce partage n'est équivalent à aucun partage en triangles. Les partages indiqués dans la fig. 1 peuvent servir d'exemples des partages simpliciaux; au contraire aucun des partages de la fig 3 n'est pas un partage simplicial, car les domaines hachurés ne sont pas des triangles (même à l'équivalence près).

J. Łoś a posé la question de savoir à quel point la méthode de condensation des partages est efficace pour former les partages simpliciaux. Plus précisément il demande s'il existe un nombre fini de partages simpliciaux tels que chaque autre partage simplicial soit une condensation de l'un d'eux.

Ce travail a pour but de démontrer qu'il en est ainsi, et nous prouverons ici le théorème suivant:

Théorème. *Chaque partage simplicial est la condensation d'un des quatre partages indiqués dans la fig.* 1[1]) *(bien entendu à l'équivalence près).*

Si nous appelons *partage primitif* un partage simplicial qui n'est la condensation d'aucun autre partage simplicial, notre théorème peut être formulé de la manière suivante:

Il n'y a que quatre partages primitifs, à savoir les partages (1), (2), (3) *et* (4) *de la fig.* 1.

Démonstration. Soit α un partage simplicial du triangle ABC. Considérons 10 partages de la fig. 3, ils ne sont pas simpliciaux. Pour démontrer le théorème nous construirons une suite

$$(*) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

de partages du triangle ABC ayant les quatre propriétés suivantes:

I. Pour chaque j le partage α_j est équivalent à l'un des partages (1), (2), ..., (14) des fig. 1 et fig. 3.

II. Pour chaque j, le partage α est une condensation du partage α_j telle que les segments désignés dans la fig. 3 par P_1P_2 et P_1Q ne contiennent pas dans leurs intérieurs de nouveaux noeuds. (C'est pour cela que ces segments sont représentés par de gros traits dans la fig. 3.)

III. Si le partage α_j est équivalent à l'un des partages (5), (6), ..., (14) de la fig. 3, le nombre des triangles du partage α contenus dans le domaine Γ du partage α_j, qui est hachuré dans la fig. 3, n'est pas supérieur à $n-j$, où n est le nombre des triangles du partage α.

---

[1]) Les trois premiers partages sont dûs à J. Łoś, le quatrième à S. Jaśkowski.

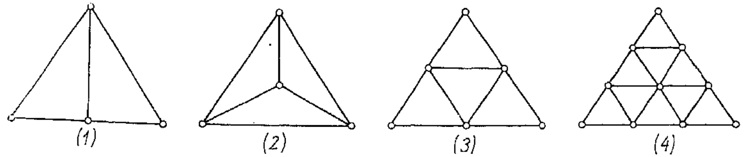

Fig. 1

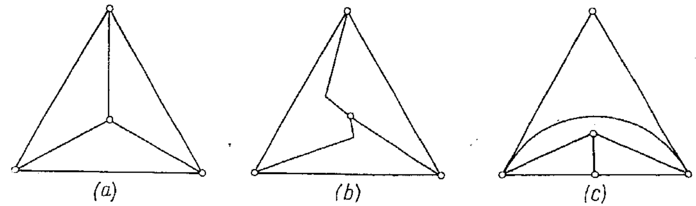

Fig. 2

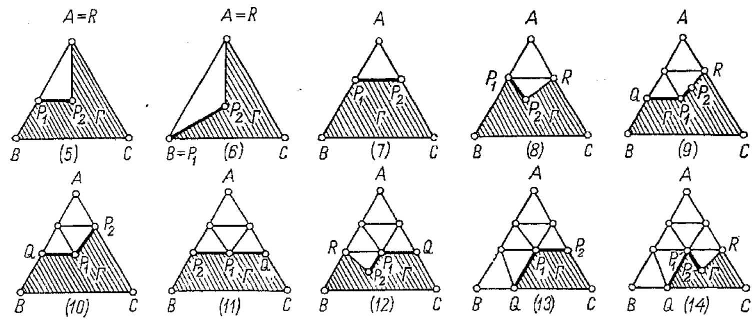

Fig. 3

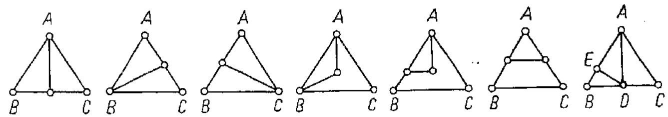

Fig. 4

IV. Si le partage α_j est équivalent à l'un des partages (5), (6), ..., (14) de la fig. 3, on peut toujours construire un partage α_{j+1} remplissant les conditions I, II et III.

Supposons maintenant que l'on ait déjà construit une suite (*) aussi longue que possible. Alors la propriété III implique que la suite (*) a un nombre fini de teimes. Vu la propriété IV elle contient (à la fin) un partage qui est équivalent à l'un des partages (1), (2), (3) et (4) de la fig. 1. Cela et la propriété II établissent notre théorème.

Il nous reste ainsi à construire une suite (*). Considérons le triangle du partage α, dont un côté est situé sur le côté AB du triangle ABC, et dont un sommet est le point A. Toutes les positions possibles de ce triangle sont indiqués dans la fig. 4. Or, si la position est une de six premières positions indiqués dans la fig. 4, nous prenons pour α_1 le partage du triangle ABC, dans lequel les seules lignes de partage sont les côtés du triangle considéré. Dans le septième cas on verra facilement qu'il y a aussi un partage α_1 remplissant les conditions I-IV; il suffit de rejeter le segment DE du dernier partage indiqué dans la fig. 4. Ainsi, dans tous les cas nous pouvons construire le partage α_1.

Ayant le partage α_j équivalent à l'un des partages (5), (6), ..., (14) de la fig. 3, nous pouvons construire le partage α_{j+1} de la manière suivante: D'abord nous formons une condensation β_j du partage α_j en ajoutant les côtés du triangle du partage α, situé dans le domaine Γ et ayant les sommets P_1 et P_2. L'existence de ce triangle est une conséquence de la propriété II et du fait que le partage α est un partage simplicial. Dans chaque position possible du troisième sommet du triangle ajouté $(P_1P_2P_3)$ on peut facilement vérifier que le partage obtenu β_j est une condensation d'un des partages (1)-(14) qui remplit les conditions I-III. Nous prenons ce dernier partage comme le terme suivant de notre suite — α_{j+1} (en particulier on peut avoir $\alpha_{j+1} = \beta_j$).

La table donnée ci-dessous montre comment α_{j+1} dépend de α_j et de la position de P_3 — troisième sommet du triangle ajouté. Les cas (a)-(i) de cette table correspondent aux situations suivantes du point P_3:

(a) P_3 est identique à Q;
(b) P_3 „ „ „ R;
(c) P_3 „ „ „ C;
(d) P_3 „ „ „ B;
(e) P_3 est situé à l'intérieur du segment AB et il diffère des points A, B, C, P_1, P_2, Q, R;
(f) P_3 „ „ „ „ „ „ BC „ „ „ ;
(g) P_3 „ „ „ „ „ „ CA „ „ „ ;
(h) P_3 „ „ „ „ „ „ P_2R „ „ „ ;

(i) P_3 est situé à l'intérieur du domaine Γ (mais il n'est pas situé sur son bord).

Les lettres A, B, C, P_1, P_2, Q, R désignent les points du partage α_j notés par les mêmes lettres dans la fig. 3.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)
α_j \ P_3	$= Q$	$= R$	$= C$	$= B$	$\epsilon\, AB$	$\epsilon\, BC$	$\epsilon\, CA$	$\epsilon\, P_2R$	$\epsilon\, \Gamma$
(5)	—	—	(1)	(6)	(5)	(1)	(7)	(5)	(5)
(6)	—	—	(2)	—	—	(1)	(1)	(6)	(6)
(7)	—	—	(1)	(1)	(7)	(3)	(7)	—	(8)
(8)	—	(7)	(1)	(1)	(9) (10)	(3)	(7)	(8)	(8)
(9)	(9) (10)	(10)	(1)	(1)	(9) (10)	(3)	(11)	(9)	(9)
(10)	(7)	—	(1)	(1)	(7)	(3)	(11)	—	(9)
(11)	(7)	—	(1)	(1)	(11)	(13)	(7)	—	(12)
(12)	(8)	(11)	(1)	(1)	(11)	(13)	(8)	(12)	(12)
(13)	(3)	—	(1)	—	—	(4)	(13)	—	(14)
(14)	(3)	(13)	(1)	—	—	(4)	(13)	(14)	(14)

Ainsi notre théorème est complètement démontré.

On peut évidemment généraliser le problème en cherchant les partages primitifs pour des simplexes n-dimensionaux. Mais, même pour $n = 3$, il semble difficile de voir si le nombre des partages primitifs est fini ou non (**P 165**).