Now we have to determine

$$z_0 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k^{(0)}}{k!}, \qquad 0 \leqslant b_k^{(i)} \leqslant k-2,$$

so that all the z_0+z_i are in S. To do this put $b_k^{(0)} = 0$, $2 \leqslant k \leqslant m-1$, and further for $k \geqslant m$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$,

(1) $$b_k^{(0)} + b_k^{(i)} \neq k-1,\ k-2,\ 2k-2,\ 2k-3.$$

If $m > 4n$ such a choice of $b_k^{(0)}$ is always possible since for each i (1) excludes at most 4 values of $b_0^{(i)}$ and there are $k-1 \geqslant m-1$ possible values for $b_k^{(0)}$ (*i. e.* $0 \leqslant b_k^{(0)} \leqslant k-2$ and $k \geqslant m$).

If $b_0^{(k)}$ satisfies (1) for all $k \geqslant m$ then z_0+z_i is clearly in S since the k-th digit of z_0+z_i is $\leqslant k-2$, *i. e.*

$$z_0+z_i = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{k!}, \qquad 0 \leqslant c_k \leqslant k-2. \qquad \ldots$$

Budapest, October 4, 1955

SUR LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION DE SAUTS

PAR

J. S. LIPIŃSKI (ŁÓDŹ)

On appelle *fonction de sauts non décroissante* une fonction de la forme

(1) $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x), \qquad \text{où} \qquad \varphi_n(x) = \begin{cases} b_n+c_n & \text{pour} \quad x > a_n, \\ b_n & \text{pour} \quad x = a_n, \\ 0 & \text{pour} \quad x < a_n, \end{cases}$$

la suite a_n étant arbitraire, les nombres b_n, c_n non négatifs, la série $\sum(b_n+c_n)$ convergente et $b_n+c_n > 0$. Le nombre b_n est dit *saut à gauche*, le nombre c_n *saut à droite* de la fonction $f(x)$ au point a_n. On voit que cette fonction est non décroissante, et l'ensemble de ses points de discontinuité est l'ensemble $\{a_n\}$. La somme d'une série uniformément convergente de fonctions de sauts non décroissantes est aussi une fonction de sauts non décroissante. On appelle *fonction de saut* une fonction de la forme $f(x) = f_1(x)-f_2(x)$, où $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont des fonctions de sauts non décroissantes.

Remarques sur la définition. Si l'on suppose que la suite $\{a_n\}$ est contenue dans un intervalle ouvert, et si l'on considère la fonction de sauts définie uniquement sur cet intervalle, on obtient une définition de la fonction de sauts équivalente à celle de Riesz et Nagy ([3], p. 14). E. Marczewski ne définit que des fonctions de sauts monotones. En désignant la limite à gauche de la fonction par $f(x-0)$ et la limite à droite par $f(x+0)$, il appelle $f(x)$ *fonction de sauts monotone* lorsque

$$f(b-0)-f(a+0) = \sum_{a<x<b} [f(x+0)-f(x-0)] \qquad \text{pour} \qquad a < b.$$

(La somme du membre droit est comprise comme la somme des termes qui ne sont pas nuls, et l'ensemble de ceux-ci n'est que dénombrable; [1], p. 142). On voit que sa définition embrasse une classe de fonctions monotones plus étendue que la définition formulée au début. P. ex. $y = Ex$, étant une fonction de sauts au sens de Marczewski, ne l'est pas d'après la définition (1). Tous les théorèmes de ce travail, bien que démontrés pour la fonction de sauts définie au début, restent valables si l'on admet la définition de Marczewski.

On sait que pour un ensemble arbitraire D de mesure nulle il existe une fonction continue non décroissante $\varphi(x)$ qui n'est différentiable en aucun point de l'ensemble D. Il existe aussi une fonction de sauts non décroissante $f(x)$ qui n'est différentiable en aucun point de l'ensemble D (cf. [1], théorème 2). On peut choisir la fonction $\varphi(x)$ de sorte que l'on ait $\varphi'(x) = \infty$ pour $x \in D$ (cf. [1], démonstration du théorème 1, ou aussi [2], p. 189). E. Marczewski a posé la question si la fonction $f(x)$ peut toujours être choisie de telle sorte que l'on ait $f'(x) = \infty$ aux points de l'ensemble D. La réponse est négative. L'ensemble D doit en effet remplir une certaine condition nécessaire (théorème 2), en particulier il doit être de première catégorie. La condition que j'énonce est, on le verra, aussi suffisante (théorème 3).

Voici les termes et les notations que je vais employer dans la suite: l'ensemble E sera dit de *mesure pleine* si son complément est de mesure nulle. La dérivée inférieure de Dini de la fonction $f(x)$ sera désignée par $\underline{D}f(x)$. Soit $f(x)$ une fonction définie par la formule (1), $(a, b) = d$ un intervalle ouvert arbitraire, et A l'ensemble de tous les nombres naturels n tels que $a < a_n < b$. Je pose

$$S(a, b) = S(d) = \sum_{A}(b_n+c_n); \qquad D(a, b) = D(d) = \frac{S(d)}{|d|} = \frac{S(a, b)}{b-a}.$$

LEMME 1. *Soient les points $a < a_{n_1} < a_{n_2} < \ldots < a_{n_r} < b$, qui partagent l'intervalle (a, b) en $r+1$ intervalles $(a, a_1) = d_1$, $(a_{n_{p-1}}, a_{n_p}) = d_p$ $(p = 2, 3, \ldots, r)$, $(a_{n_r}, b) = d_{r+1}$. Soit m un nombre naturel. Je désignerai par un astérisque, soit d_p^*, les intervalles d_p pour lesquels $D(d_p) \geqslant 1/m$. On peut toujours choisir les nombres a_{n_p} de sorte que*

$$\sum |d_p^*| < \frac{b-a}{2}. \tag{2}$$

Démonstration. Je choisis les points a_{n_p} de sorte que l'on ait

$$S(a, b) - \sum_{p=1}^{r} (b_{n_p}+c_{n_p}) < \frac{b-a}{2m}, \tag{3}$$

ce qui est possible, car $S(a, b)$ est la somme d'une série convergente de nombres positifs et b_n+c_n sont les termes de cette série. De la définition de $S(a, b)$ on tire

$$S(a, b) - \sum_{p=1}^{r} (b_{n_p}+c_{n_p}) = \sum_{p=1}^{r+1} S(d_p). \tag{4}$$

Supposons que l'inégalité (2) n'ait pas lieu, c'est-à-dire que

$$\sum |d_p^*| \geqslant \frac{b-a}{2}. \tag{5}$$

Nous avons $D(d_p^*) = S(d_p^*)/|d_p^*| \geqslant 1/m$, d'où

$$S(d_p^*) \geqslant \frac{1}{m} |d_p^*| \qquad \text{et} \qquad \sum S(d_p^*) \geqslant \frac{1}{m} \sum |d_p^*|.$$

En vertu de (4) et (5) nous aurions

$$S(a, b) - \sum_{p=1}^{r} (b_{n_p}+c_{n_p}) \geqslant \sum S(d_p^*) \geqslant \frac{b-a}{2m},$$

ce qui est en contradiction avec (3). Le lemme est ainsi démontré.

LEMME 2. *Pour tout nombre naturel m il existe un ensemble ouvert G_m, de mesure pleine et de composantes A_n telles que*

$$|A_n| \leqslant \frac{1}{m}; \qquad D(A_n) < \frac{1}{m}. \tag{6}$$

Démonstration. Je définis la classe des composantes en y mettant d'abord tous les intervalles $(i/m, (i+1)/m)$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, pour lesquels $D(i/m, (i+1)/m) < 1/m$. Si l'intervalle $(i/m, (i+1)/m)$ n'est pas un intervalle A_n, alors, en vertu du lemme 1, je le partage en un nombre fini d'intervalles d_p de sorte que $\sum |d_p^*| < 1/2m$. J'appelle les intervalles d_p^* intervalles initiaux au premier pas de l'induction, et je prends les autres comme composantes A_n. Supposons que la somme des longueurs de tous les intervalles initiaux au n-ième pas de l'induction, contenus dans $(i/m, (i+1)/m)$, soit inférieure à $1/2^n m$. Soit (c, d) un intervalle initial au n-ième pas de l'induction. En vertu du lemme 1 je le partage en un nombre fini d'intervalles l_p $(p = 1, 2, \ldots, s)$, tels que $\sum |l_p^*| < (d-c)/2$ (l_p^* désigne les intervalles pour lesquels $D(l_p) \geqslant 1/m$). J'appelle les intervallles l_p^* intervalles initiaux au $n+1$-ème pas de l'induction et je mets les autres intervalles l_p parmi les composantes A_n. On voit que la somme des longueurs des intervalles initiaux au $n+1$-ème pas de l'induction, contenus dans $(i/m, (i+1)/m)$, est inférieure à $1/2^{n+1}m$. Tous les intervalles A_n sont disjoints et ouverts. Leur somme forme un ensemble de mesure pleine, ouvert, dont les composantes A_n satisfont à l'inégalité (6), elle est donc l'ensemble G_m dont l'existence était à démontrer.

THÉORÈME 1. *Si $f(x)$ est une fonction de sauts non décroissante, on a $\{\underline{D}(f(x) = 0\} \supset G$, où l'ensemble G est de mesure pleine et $G \in G_\delta$.*

Démonstration. Soient G_m les ensembles dont il a été question dans le lemme 2. Je pose

$$G = \prod_{m=1}^{\infty} G_m .$$

Les ensembles G_m sont de mesure pleine et ouverts, l'ensemble G est donc de mesure pleine et de classe G_δ. Pour établir le théorème, il suffit de prouver que pour $x_0 \epsilon G$ on a $\underline{D}f(x_0) = 0$. Dans chaque ensemble G_m il existe une composante A_m, telle que $x_0 \epsilon A_m$. En vertu de l'inégalité (6) il vient

$$\{x_0\} = \prod_{m=1}^{\infty} A_m .$$

On doit avoir

(7) $$x_0 \neq a_s .$$

En effet, si $x_0 = a_s$, on aurait $S(A_m) \geqslant b_s + c_s > 0$ et, en tenant compte de (6),

$$D(A_m) = \frac{S(A_m)}{|A_m|} \geqslant \frac{b_s+c_s}{|A_m|} \geqslant (b_s+c_s)\,m .$$

Il en résulterait que

$$\lim_{n\to\infty} D(A_m) = \infty ,$$

en contradiction avec (6). Posons $A_m = (x_0 - a_m, x_0 + \beta_m)$. De l'inégalité (7) il vient

(8) $$S(x_0 - a_m, x_0) + S(x_0, x_0+\beta_m) = S(A_m).$$

Pour l'un au moins des intervalles $(x_0 - a_m, x_0)$, $(x_0, x_0+\beta_m)$ on a $D(x_0 - a_m, x_0) < 1/m$, ou $D(x_0, x_0+\beta_m) < 1/m$. Sinon on aurait

$$S(x_0 - a_m, x_0) \geqslant a_m/m \quad \text{et} \quad S(x_0, x_0+\beta_m) \geqslant \beta_m/m ,$$

d'où, en tenant compte de (8),

$$S(A_m) \geqslant \frac{a_m+\beta_m}{m} = \frac{|A_m|}{m}, \quad \text{ou} \quad D(A_m) \geqslant 1/m ,$$

en contradiction avec (6). Si $D(x_0 - a_m, x_0) < 1/m$, je pose $x_m = x_0 - a_m/2$, dans le cas contraire $x_m = x_0 + \beta_m/2$. Nous avons alors $D(x_0, x_0+\beta_m) < 1/m$.

Supposons vrai le premier cas. Alors $0 < x_0 - x_m = a_m/2$, et $0 \leqslant f(x_0) - f(x_m) \leqslant S(x_0 - a_m, x_0)$, d'où

$$0 \leqslant \frac{f(x_0)-f(x_m)}{x_0-x_m} \leqslant \frac{2S(x_0-a_m, x_0)}{a_m} = 2D(x_0-a_m, x_0) < \frac{2}{m} .$$

Dans le second cas nous obtenons d'une manière analogue la même inégalité

$$0 \leqslant \frac{f(x_0)-f(x_m)}{x_0-x_m} < \frac{2}{m} .$$

Il en résulte

$$\lim_{m\to 0} \frac{f(x_0)-f(x_m)}{x_0-x_m} = 0 ;$$

en tenant compte de l'inégalité $|x_0 - x_m| < |A_m| \leqslant 1/m$, ceci donne $\underline{D}f(x_0) = 0$.

Théorème 2. *Si $f(x)$ est une fonction de sauts, il existe un ensemble F, de mesure nulle et de classe F_σ, tel que*

(9) $$\{f'(x) = \infty\} \subset F .$$

Démonstration. Soient $f_1(x)$ et $f_2(x)$ des fonctions de sauts non décroissantes, telles que $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. La fonction $f_2(x)$ étant non décroissante, nous avons $\underline{D}f(x) \leqslant \underline{D}f_1(x)$. De là

(10) $$\{f'(x) = \infty\} \subset \{f_1'(x) = \infty\} .$$

En vertu du théorème 1 il existe un ensemble $G \epsilon G_\delta$, de mesure pleine, contenu dans l'ensemble $\{\underline{D}f_1(x) = 0\}$. Je désigne par F le complément de l'ensemble G. Évidemment $F \epsilon F_\sigma$, $|F| = 0$ et $F \supset \{\underline{D}f_1(x) \neq 0\} \supset$ $\supset \{f_1'(x) = \infty\}$; avec (10) ceci entraîne (9).

En vertu d'un théorème bien connu de Lebesgue, une fonction de sauts est différentiable presque partout. Évidemment sa dérivée, partout où elle existe, est égale à la dérivée inférieure de Dini. On sait que celle-ci est presque partout nulle (théorème 1). Une fonction de sauts non décroissante a donc presque partout une dérivée nulle. Il en est de même de la différence de deux telles fonctions. Nous arrivons ainsi à la conclusions suivante:

Corollaire. *Une fonction de sauts a presque partout une dérivée nulle.*

Riesz et Nagy obtiennent ce résultat comme conséquence immédiate du théorème de Fubini sur la dérivation terme à terme d'une série de fonctions monotones (cf. [3], p. 14).

Lemme 3. *Soit E un ensemble fermé, de mesure nulle, contenu dans l'intervalle ouvert (a, b). Il existe une suite de points isolés $a_n \epsilon (a, b) - E$ et une fonction de sauts non décroissante $f(x)$, continue en chaque point différent de a_n et discontinue aux points a_n, ayant une dérivée en chaque point et telle que $f'(x) = \infty$ pour $x \epsilon E + \{a_n\}$ et $f'(x) = 0$ pour $x \bar{\epsilon} E + \{a_n\}$.*

Démonstration. Toutes les composantes de l'ensemble ouvert $(a,b)-E$ forment une suite d'intervalles ouverts (α_m,β_m). Pour $\alpha_m\neq a$ je ferme la suite

$$a_{m,k}=\alpha_m+\frac{1}{2^k}\qquad \left(k\geqslant N,\ \frac{1}{2^N}\leqslant\frac{\beta_m-\alpha_m}{2}\right),$$

pour $\beta_m\neq b$, la suite

$$b_{m,k}=\beta_m-\frac{1}{2^k}\qquad \left(k\geqslant N,\ \frac{1}{2^N}\leqslant\frac{\beta_m-\alpha_m}{2}\right).$$

Je range les nombres $a_{m,k}$ et $b_{m,k}$ en une suite a_n. L'ensemble $\{a_n\}$ se compose de points isolés et $\{a_n\}\subset(a,b)-E$. L'ensemble $E+\{a_n\}$ est fermé, l'ensemble $(a,b)-(E+\{a_n\})$ ouvert. Je range les composantes de celui-ci en une suite (γ_ν,δ_ν) de sorte que la suite $\{\delta_\nu-\gamma_\nu\}$ soit non croissante. Comme $|E|=0$, on a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(\delta_\nu-\gamma_\nu)=b-a.$$

Je choisis une série convergente de nombres positifs $\sum_{\nu=1}^{\infty}d_\nu$ telle que

(11) $$\lim_{\nu\to\infty}\frac{d_\nu}{\delta_\nu-\gamma_\nu}=\infty.$$

Soit $(\gamma_{\nu_n},\delta_{\nu_n})$ le plus long, respectivement l'un des deux intervalles contigus à a_n, s'ils sont égaux. Je pose $b_n=c_n=d_{\nu_n}$ et je définis la fonction $f(x)$ par la formule (1). Je dis que la fonction (1) a les propriétés mentionnées dans l'énoncé du lemme.

Nous avons $\varphi_n(x)\leqslant 2d_{\nu_n}$. La série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}d_\nu$$

est convergente, donc la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$$

est uniformément convergente. Les fonctions $\varphi_n(x)$ sont continues en dehors de l'ensemble $\{a_n\}$, la fonction

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n}\varphi_n(x)$$

est donc continue pour $x\neq a_n$; la fonction $\varphi(x)$ est discontinue au point a_n, et toutes les autres fonctions $\varphi_i(x)$ y sont continues; la fonction $f(x)$ est donc discontinue. Au point a_n nous avons $\varphi_n'(a_n)=\infty$. Toutes les fonctions $\varphi_i(x)$ sont non décroissantes, donc $f'(a_n)=\infty$. Dans chaque composante (γ_ν,δ_ν) les fonctions $\varphi_n(x)$ sont constantes, la fonction $f(x)$, qui est leur somme, l'est aussi; dans l'ensemble $(a,b)-(E+\{a_n\})$ nous avons donc $f'(x)=0$.

Il reste à montrer que l'on a $f'(x)=\infty$ pour $x\in E$. Soit M un nombre positif quelconque. En vertu de (11) il existe un nombre N tel que

(12) $$\frac{d_\nu}{\delta_\nu-\gamma_\nu}>M\qquad\text{pour}\qquad \nu>N.$$

La somme

$$H=\sum_{\nu=1}^{N}[\gamma_\nu,\delta_\nu]$$

est un ensemble fermé et bornée, n'ayant aucun point commun avec E, donc la distance η entre E et H est positive. Soit $x_0\in E$, $\delta=\min(\eta,b-x_0)$ et $0<h<\delta$. Désignons par A l'ensemble de tous les nombres naturels k tels que $x_0<a_k<x_0+h$. Soit Ω la somme des longueurs de tous les intervalles $(\gamma_{\nu_k},\delta_{\nu_k})$ pour $k\in A$. Nous avons

$$(x_0,x_0+h)\subset E\cdot(x_0,x_0+h)+\{a_n\}(x_0,x_0+h)+\sum_{x_0<\gamma_\nu<x_0+h}(\gamma_\nu,\delta_\nu).$$

Comme $|E|=0$ et $|\{a_n\}|=0$, nous avons

$$h=|(x_0,x_0+h)|\leqslant\sum_{x_0<\gamma_\nu<x_0+h}(\delta_\nu-\gamma_\nu)<2\sum_{k\in A}(\delta_{\nu_k}-\gamma_{\nu_k})=2\Omega,$$

d'où $\Omega>h/2$.

D'autre part, nous avons

$$f(x_0+h)-f(x_0)\geqslant\sum_{k\in A}(b_k+c_k)=\sum_{k\in A}2d_{\nu_k}.$$

En tenant compte de (12) et de l'inégalité

$$\min_{k\in A}\{\nu_k\}>N,$$

on conclut que

$$f(x_0+h)-f(x_0)>\sum_{k\in A}2M(d_{\nu_k}-\gamma_{\nu_k})=2M\Omega>Mh,$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>M.$$

Il en résulte que la dérivée à droite de la fonction $f(x)$ aux points de l'ensemble E est égale à ∞. Pour la dérivée à gauche la démonstration est analogue. De l'existence de ces dérivées et de leur égalité nous concluons finalement que l'on a $f'(x) = \infty$ pour $x \in E$, c. q. f. d.

Remarque. Parmi les hypothèses du lemme 3 on peut supprimer celle qui suppose l'ensemble E borné. En effet, l'ensemble E est partout non-dense, dans chaque intervalle $(k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ il existe donc un point $p_k \bar{\epsilon} E$. Alors

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\cdot(p_k, p_{k+1}).$$

S'ils ne sont pas vides, les ensembles $E\cdot(p_k, p_{k+1})$ vérifient les hypothèses du lemme 3: les suites $a_n^{(k)}$ et les fonctions $f_{(k)}(x)$, ayant les propriétés mentionnées dans l'énonce du lemme, existent pour ces ensembles. Si l'ensemble $E\cdot(p_k, p_{k+1})$ est vide, je pose $f_{(k)}(x) = 0$. De la définition (1) des fonctions $f_{(k)}(x)$ il résulte qu'elles sont bornées: $0 \leqslant f_{(k)}(x) < M_k$. Je range les nombres $a_n^{(k)}$ $(n = 1, 2, \ldots;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ en une suite a_n et je définis la fonction $f(x)$ par l'égalité

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{(k)}(x)\cdot\frac{1}{2^{|k|}M_k};$$

on vérifie aisément que la suite et la fonction ainsi obtenues ont les propriétés mentionnées dans l'énoncé.

THÉORÈME 3. *Si l'ensemble $E \epsilon F_\sigma$ et $|E| = 0$, il existe une fonction de sauts non décroissante $f(x)$ telle que $f'(x) = \infty$ pour $x \epsilon E$.*

Démonstration. L'ensemble E peut être mis sous la forme

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} F_n,$$

où les ensembles F_n sont de mesure nulle, fermés et bornés. En vertu du lemme 3 il existe pour chacun d'eux une fonction de sauts non décroissante $f_n(x)$ telle que $f_n'(x) = \infty$ pour $x \epsilon F_n$. De la définition d'une fonction de sauts non décroissante il résulte que les fonctions $f_n(x)$ sont bornées: $0 \leqslant f_n(x) < M_n$. Je pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n M_n}\cdot f_n(x).$$

Cette fonction étant la somme d'une série uniformément convergente de fonctions de sauts non décroissantes, elle est une fonction de sauts non décroissante. Comme les fonctions $f_n(x)$ sont non décroissantes, on conclut de $f_n'(x) = \infty$ que $f'(x) = \infty$. Pour chaque point $x_0 \epsilon E$ il existe un ensemble F_n tel que $x_0 \epsilon F_n$. En ce point on a $f_n'(x_0) = \infty$, donc aussi $f'(x_0) = \infty$, c. q. f. d.

TRAVAUX CITÉS

[1] E. Marczewski, *Uwagi o zbiorach miary zero i o różniczkowalności funkcji monotonicznych*, Roczniki P. T. M., Ser. I, Prace Matematyczne I. 1 (1955), p. 141-144.

[2] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*. Москва-Ленинград 1950.

[3] F. Riesz et B. Sz. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest 1953.

UNIVERSITÉ DE ŁÓDŹ