PUBLICATIONS CITÉES

[1] H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921.

[2] W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles linéaires quelconques*, Fund. Math. 23 (1934), p. 125-134.

[3] — *Sur un théorème de recouvrement dans la théorie générale des ensembles*, Fund. Math. 20 (1933), p. 214-220.

[4] A. Tarski, *Drei Überdeckungssätze der allgemeinen Mengenlehre*, Fund. Math. 30 (1938), p. 132-155.

[5] S. Ulam, *Über gewisse Zerlegungen von Mengen*, Fund. Math. 20 (1933), p. 221-223.

ON A PERFECT SET

BY

P. ERDÖS (BUDAPEST) AND S. KAKUTANI (NEW HAVEN)

(From a letter of P. Erdös to E. Marczewski)

... Enclosed I send you our promised solution to your problem[1]). The problem is this: A linear set S is said to have *property* (S_n) if there exists an η_n such that if $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $x_n - x_1 < \eta_n$ are any n real numbers, there exist n elements $y_1, y_2, \ldots, y_n$ of S, congruent to $x_1, x_2, \ldots, x_n$. You ask: Does there exist a perfect set S of measure 0 having property (S_3)?

Kakutani and I have constructed a perfect set S of measure 0 having property (S_n) for all $n \geqslant 2$. Our set S is defined as the set of non-negative numbers

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{k!}, \qquad 0 \leqslant a_k \leqslant k-2.$$

It is easy to see that the measure of S is 0 (every number x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, is uniquely of the form

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{k!}, \qquad 0 \leqslant a_k \leqslant k-1).$$

Thus we only have to prove that S has property (S_n) for all $n \geqslant 2$.

To show that S has property (S_n) it clearly suffices to show that if we put $x_2 - x_1 = z_1, x_3 - x_1 = z_2, \ldots, x_n - x_1 = z_{n-1}, z_{n-1} < \eta_n$, there exists a number z_0 in S such that all the numbers $z_0 + z_i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, are also in S. Assume $\eta_n < 1/(m-1)!$ where m will be determined later. Then clearly

$$z_i = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{b_k^{(i)}}{k!}, \qquad 0 \leqslant b_k^{(i)} \leqslant k-1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

---

[1]) E. Marczewski, P 125, Colloquium Mathematicum 3.1 (1954), p. 75.

Now we have to determine

$$z_0 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k^{(0)}}{k!}, \qquad 0 \leqslant b_k^{(i)} \leqslant k-2,$$

so that all the z_0+z_i are in S. To do this put $b_k^{(0)} = 0$, $2 \leqslant k \leqslant m-1$, and further for $k \geqslant m$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$(1) \qquad b_k^{(0)}+b_k^{(i)} \neq k-1,\ k-2,\ 2k-2,\ 2k-3.$$

If $m > 4n$ such a choice of $b_k^{(0)}$ is always possible since for each i (1) excludes at most 4 values of $b_0^{(i)}$ and there are $k-1 \geqslant m-1$ possible values for $b_k^{(0)}$ (*i. e.* $0 \leqslant b_k^{(0)} \leqslant k-2$ and $k \geqslant m$).

If $b_0^{(k)}$ satisfies (1) for all $k \geqslant m$ then z_0+z_i is clearly in S since the k-th digit of z_0+z_i is $\leqslant k-2$, *i. e.*

$$z_0+z_i = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{k!}, \qquad 0 \leqslant c_k \leqslant k-2. \qquad \ldots$$

Budapest, October 4, 1955

SUR LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION DE SAUTS

PAR

J. S. LIPIŃSKI (ŁÓDŹ)

On appelle *fonction de sauts non décroissante* une fonction de la forme

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x), \qquad \text{où} \qquad \varphi_n(x) = \begin{cases} b_n+c_n & \text{pour} \quad x > a_n, \\ b_n & \text{pour} \quad x = a_n, \\ 0 & \text{pour} \quad x < a_n, \end{cases}$$

la suite a_n étant arbitraire, les nombres b_n, c_n non négatifs, la série $\sum (b_n+c_n)$ convergente et $b_n+c_n > 0$. Le nombre b_n est dit *saut à gauche*, le nombre c_n *saut à droite* de la fonction $f(x)$ au point a_n. On voit que cette fonction est non décroissante, et l'ensemble de ses points de discontinuité est l'ensemble $\{a_n\}$. La somme d'une série uniformément convergente de fonctions de sauts non décroissantes est aussi une fonction de sauts non décroissante. On appelle *fonction de saut* une fonction de la forme $f(x) = f_1(x)-f_2(x)$, où $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont des fonctions de sauts non décroissantes.

Remarques sur la définition. Si l'on suppose que la suite $\{a_n\}$ est contenue dans un intervalle ouvert, et si l'on considère la fonction de sauts définie uniquement sur cet intervalle, on obtient une définition de la fonction de sauts équivalente à celle de Riesz et Nagy ([3], p. 14). E. Marczewski ne définit que des fonctions de sauts monotones. En désignant la limite à gauche de la fonction par $f(x-0)$ et la limite à droite par $f(x+0)$, il appelle $f(x)$ *fonction de sauts monotone* lorsque

$$f(b-0)-f(a+0) = \sum_{a<x<b} [f(x+0)-f(x-0)] \qquad \text{pour} \qquad a < b.$$

(La somme du membre droit est comprise comme la somme des termes qui ne sont pas nuls, et l'ensemble de ceux-ci n'est que dénombrable; [1], p. 142). On voit que sa définition embrasse une classe de fonctions monotones plus étendue que la définition formulée au début. P. ex. $y = Ex$, étant une fonction de sauts au sens de Marczewski, ne l'est pas d'après la définition (1). Tous les théorèmes de ce travail, bien que démontrés pour la fonction de sauts définie au début, restent valables si l'on admet la définition de Marczewski.