$\varphi_0(x) = f(x)$, also das Nullelement der Gruppe Γ ergeben. Mithin würde g ein Element k-ter Ordnung darstellen, im Widerspruch damit, daß Γ torsionsfrei ist.

ZITIERTE LITERATUR

[1] J. Braconnier, *Sur les groupes topologiques localement compacts*, Journ. de Math. Pures et Appl. 27 (1948), S. 1-85.

[2] D. van Dantzig, *Über topologisch-homogene Kontinua*, Fund. Math. 15 (1930), S. 102-125.

[3] B. Eckmann, *Über monothetische Gruppen*, Comm. Math. Helv. 16 (1943), S. 249-263.

[4] B. Gelbaum, G. K. Kalisch and J. M. H. Olmsted, *On the embedding of topological semigroups and integral domains*, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), S. 807-821.

[5] М. И. Граев, *Теория топологических групп I*, Успехи Мат. Наук 5 (1950), S. 3-56.

[6] P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York 1950.

[7] — *Comment on the real line*, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), S. 877-878.

[8] — and H. Samelson, *On monothetic groups*, Proc. Nat. Ac. Sci. USA 28 (1942), S. 254-258.

[9] S. Hartman, *Über die Verteilung der Fastperioden von fastperiodischen Funktionen auf Gruppen*, Stud. Math. 15 (1955), S. 56-61.

[10] — E. Marczewski et C. Ryll-Nardzewski, *Théorèmes ergodiques et leurs applications*, Coll. Math. 2 (1951), S. 109-123.

[11] E. v. Kampen, *Locally bicompact Abelian groups*, Ann. of Math. 36 (1935), S. 436-448.

[12] J. Kaplansky, *Infinite Abelian groups*, Ann Arbor 1954.

[13] А. Г. Курош, *Теория групп*, Москва 1953 (zweite Ausgabe).

[14] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Москва 1954 (zweite Ausgabe).

[15] A. Shields, *Sur la mesure d'une somme vectorielle*, Fund. Math. 42 (1955), S. 57-60.

[16] H. Weyl, *Über die Verteilung von Zahlen mod Eins*, Math. Ann. 77 (1916), S. 313-352.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

SUR UNE PROPRIÉTÉ D'UNE CLASSE DE MESURES ABSTRAITES

PAR

J. POPRUŻENKO (ŁÓDŹ)

Soit $\mathfrak{n}$ un nombre cardinal indénombrable. Désignons par $I(\mathfrak{n})$ l'hypothèse suivante:

$I(\mathfrak{n})$ *Il n'existe aucun aleph inaccessible*[1]) $\leqslant \mathfrak{n}$.

S. Ulam ([5], p. 223) a démontré que si l'hypothèse $I(2^{\aleph_0})$ est vraie, tout ensemble de mesure extérieure (lebesguienne) positive contient une infinité non dénombrable de sous-ensembles disjoints de mesure extérieure positive.

W. Sierpiński ([2], p. 125) en a déduit le théorème suivant:

Si l'hypothèse $I(2^{\aleph_0})$ est vraie, tout ensemble linéaire indénombrable E contient une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints, dont chacun a une mesure extérieure (lebesguienne) égale à celle de l'ensemble E.

Le but de la présente note est de généraliser ce théorème: je vais démontrer que *tout* ensemble indénombrable jouit d'une pareille propriété relativement à une vaste classe de mesures abstraites.

Soient E un ensemble de puissance $\mathfrak{n}$, $\varphi(X)$ une mesure extérieure définie sur E, disparaissant ponctuellement et telle que $\varphi(E_1) < +\infty$ pour un certain sous-ensemble E_1 de E de puissance $\mathfrak{n}$. On sait qu'une telle fonction d'ensemble définit, à l'aide de l'équation bien connue de Carathéodory, le σ-corps d'ensembles mesurables φ, sur lequel elle est σ-additive, et que tout ensemble de mesure extérieure 0 est mesurable φ (voir p. ex. [1], p. 424-430).

Désignons par $\mathfrak{m}_\varphi$ le premier aleph tel qu'il existe une famille de puissance $\mathfrak{m}_\varphi$ d'ensembles de mesure $\varphi = 0$, dont la somme est un ensemble de mesure extérieure $\varphi > 0$. On voit que $\mathfrak{m}_\varphi$ est un aleph régulier satisfaisant, dans les conditions posées, à l'inégalité $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{m}_\varphi \leqslant \mathfrak{n}$.

---

[1]) Un aleph $\aleph_\alpha$ est dit *inaccessible* s'il est régulier (c'est-à-dire, s'il n'est pas la somme de moins de $\aleph_\alpha$ nombres cardinaux, dont chacun est $< \aleph_\alpha$), et si son indice α est un nombre ordinal de $2^{\text{ème}}$ espèce.

Cela étant, désignons par $\boldsymbol{K}$ la classe de toutes les fonctions d'ensemble $\varphi(X)$ définies pour $X \subset E$ et assujetties aux 5 conditions suivantes:

1° *On a* $0 \leqslant \varphi(X) < +\infty$ *pour tout* $X \subset E$, *et* $\varphi(E) > 0$;

2° *Si* $X_1 \subset X_2$, *on a* $\varphi(X_1) \leqslant \varphi(X_2)$;

3° $\varphi\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(X_n)$ *pour toute suite* $\{X_n\}$, $X_n \subset E$;

4° $\varphi\big((p)\big) = 0$ *pour tout élément* $p \in E$;

5° *Il existe une famille de puissance* $< \mathfrak{m}_\varphi$ *d'ensembles mesurables* φ [2]) *telle que, quels que soient* $X \subset E$ *et* $\varepsilon > 0$, *les inégalités* $\varphi(M) < \varphi(X) + \varepsilon$ *et* $\varphi(XM) > \varphi(X) - \varepsilon$ *soient vérifiées par au moins un ensemble* M *appartenant à cette famille.*

Vu les conditions 1°-3°, on a ainsi défini sur E une classe de mesures extérieures satisfaisant à certaines conditions spéciales (4°-5°), et l'on ne sait pas *a priori* si cette classe n'est pas vide.

Démontrons que *la classe* $\boldsymbol{K}$ *n'est jamais vide, si* $\mathfrak{n} \geqslant 2^{\aleph_0}$.

En effet, supposons d'abord que $\mathfrak{n} = 2^{\aleph_0}$. La mesure extérieure de Lebesgue, considérée dans l'intervalle $[0 \leqslant x \leqslant 1]$, appartient à $\boldsymbol{K}$, car la famille (dénombrable) de toutes les sommes finies d'intervalles fermés d'extrémités rationnelles satisfait à la condition 5° ([2], Lemme I, p. 125). L'assertion résulte alors du fait que les conditions 1°-5°, ainsi que la propriété d'un ensemble d'être mesurable, sont invariantes par rapport aux transformations biunivoques de l'espace.

Si $\overline{\overline{E}} = \mathfrak{n} > 2^{\aleph_0}$, il existe un sous-ensemble E_1 de E de puissance $2^{\aleph_0}$. $\psi(X)$ étant une fonction définie sur E_1 et satisfaisant aux conditions 1°-5° — une telle fonction existe d'après ce qui précède — on pose $\varphi(X) = \psi(XE_1)$.

On vérifie sans peine que la fonction $\varphi(X)$, définie sur E, satisfait encore aux mêmes conditions. Elle appartient donc à $\boldsymbol{K}$.

Ceci établi, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème. Prémisses:

1* *L'hypothèse* $I(\mathfrak{n})$ *est vraie*;

2* $\overline{\overline{E}} = \mathfrak{n} \geqslant 2^{\aleph}$;

3* $\varphi(X) \in \boldsymbol{K}$.

Thèse: *Il existe dans tout sous-ensemble* E_0 *de* E *une infinité de puissance* $\geqslant \mathfrak{m}_\varphi$ *d'ensembles disjoints (qui peuvent être vides), dont chacun est de même mesure extérieure* φ *que l'ensemble* E_0.

La démonstration de ce théorème s'appuie sur les propositions auxiliaires qui vont suivre.

[2]) La mesurabilité est toujours comprise au sens de Carathéodory.

Lemme I. $\varphi(X)$ *satisfaisant aux conditions* 1°-4°, *l'hypothèse* $I(\mathfrak{n})$ *entraîne la conséquence suivante: Il existe dans tout ensemble* X_0, *tel que* $\varphi(X_0) > 0$, *une infinité de puissance* $\geqslant \mathfrak{m}_\varphi$ *de sous-ensembles disjoints de mesure extérieure* φ *positive.*

Démonstration. Posons $\mathfrak{m}_\varphi = \aleph_\beta$. Cet aleph étant régulier, l'hypothèse $I(\mathfrak{n})$ entraîne l'égalité $\beta = \alpha + 1$.

Supposons maintenant que toute famille formée de sous-ensembles disjoints de X_0, de mesure extérieure φ positive, soit de puissance $< \mathfrak{m}_\varphi = \aleph_{\alpha+1}$. Elle serait donc nécessairement de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$. Dans ce cas il existerait, d'après le théorème de recouvrement de Sierpiński ([3], p. 214), généralisé par Tarski[3]) ([4], p. 133), une famille de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$ de sous-ensembles de X_0 de mesure $\varphi = 0$ recouvrant X_0 à un ensemble de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$ près. On aurait donc, d'après la définition du nombre $\mathfrak{m}_\varphi$ et l'inégalité $\aleph_\alpha < \mathfrak{m}_\varphi$, $\varphi(X_0) = 0$, contrairement à la condition $\varphi(X_0) > 0$. Le Lemme I est ainsi démontré.

Les raisonnements ultérieurs diffèrent peu de ceux de Sierpiński. En particulier, on obtient nos Lemmes II-IV de ses Lemmes II-IV de [2] (p. 126-130) en y remplaçant les mots „dénombrable", resp. „indénombrable", par „$< \mathfrak{m}_\varphi$", resp. „$\geqslant \mathfrak{m}_\varphi$", ce qui n'altère pas les démonstrations en vertu de la régularité du nombre $\mathfrak{m}_\varphi$.

Lemme II. *Soit* $\varphi \in \boldsymbol{K}$. Φ *étant une famille quelconque de puissance* $\geqslant \mathfrak{m}_\varphi$, *dont les éléments sont des sous-ensembles de* E *de mesure extérieure* $\varphi > 0$, *il existe un ensemble* M_0, *mesurable* φ *et tel que* $\varphi(M_0) > 0$, *ayant cette propriété: quel que soit* $\varepsilon > 0$, *la famille* Φ *contient une infinité de puissance* $\geqslant \mathfrak{m}_\varphi$ *d'ensembles* X *pour lesquels* $\varphi(XM_0) > \varphi(M_0) - \varepsilon$.

Lemme III. $\{\Phi_n\}$ *étant une suite infinie d'ensembles quelconques de puissance* $\geqslant \mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} \geqslant \aleph_1$), *il existe une suite infinie* $\{\Psi_n\}$ *d'ensembles disjoints tels que* $\overline{\overline{\Psi}}_n \geqslant \mathfrak{m}$ *et* $\Psi_n \subset \Phi_n$ *pour tout* n *naturel.*

Lemme IV. *Soit* $\varphi \in \boldsymbol{K}$. Φ *étant une famille de puissance* $\geqslant \mathfrak{m}_\varphi$, *formée de sous-ensembles disjoints de* E *de mesure extérieure* $\varphi > 0$, *il existe un ensemble* M_0, *mesurable* φ *et tel que* $\varphi(M_0) > 0$, *et une famille* Ψ *de puissance* $\geqslant \mathfrak{m}_\varphi$, *formée d'ensembles disjoints et vérifiant les relations* $\Psi \subset \Phi_\sigma$ *et* $\varphi(XM_0) = \varphi(M_0)$ *pour tout* $X \in \Psi$.

La démonstration de ces Lemmes est indépendante de l'hypothèse $I(\mathfrak{n})$. Les Lemmes II et III ne sont nécessaires que pour la démonstra-

[3]) Voici ce théorème: *Soit* Z *un ensemble de puissance* $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$ — *un nombre cardinal* $\leqslant \mathfrak{n}$.

L'hypothèse $I(\mathfrak{n})$ *supposée vraie, si l'on divise tous les sous-ensembles de* Z *en deux classes,* $\boldsymbol{Q}$ *et* $\boldsymbol{R}$, *de sorte que toute famille d'ensembles disjoints de la classe* $\boldsymbol{Q}$ *soit de puissance* $\leqslant \mathfrak{m}$, *il existe une famille de puissance* $\leqslant \mathfrak{m}$ *d'ensembles de* $\boldsymbol{R}$ *dont la somme recouvre* Z *à un ensemble de puissance* $\leqslant \mathfrak{m}$ *près.*

tion du Lemme IV, qui est d'importance fondamentale. En nous appuyant sur les Lemmes I et IV, nous pouvons appliquer la méthode de Sierpiński aux espaces abstraits.

Démonstration du Théorème. Soient E un ensemble abstrait de puissance $\mathfrak{n} \geqslant 2^{\aleph_0}$, E_0 un sous-ensemble indénombrable de E. On a, comme nous l'avons vu, $\boldsymbol{K} \neq 0$. Soit $\varphi(X)$ une mesure extérieure quelconque appartenant à $\boldsymbol{K}$. Le problème étant trivial lorsque $\varphi(E_0) = 0$, nous pouvons supposer que $\varphi(E_0) > 0$. Dans ce cas, il existe, d'après 1^* et le Lemme I, une infinité de puissance $\geqslant \mathfrak{m}_\varphi$ de sous-ensembles disjoints de E_0 de mesure extérieure $\varphi > 0$.

En vertu du Lemme IV, il existe au moins un ensemble $M = M_0$, mesurable φ, jouissant des deux propriétés suivantes:

(1) $$\varphi(M) > 0;$$

(2) *$\varphi(MX) = \varphi(M)$ pour une infinité de puissance $\geqslant \mathfrak{m}_\varphi$ de sous-ensembles disjoints X de E_0.*

Soit

(3) $$M_0, M_1, \ldots, M_\xi, \ldots \quad (\xi < \Theta)$$

une suite transfinie formée de tous les ensembles mesurables φ satisfaisant aux conditions (1)-(2); soit

(4) $$M_{a_0} = M_0, M_{a_1}, \ldots, M_{a_\lambda}, \ldots \quad (\lambda < \mu)$$

la suite saturée d'ensembles disjoints deux à deux, extraite de (3) et contenant l'ensemble M_0. D'après (1) et l'inégalité $\varphi(E) < +\infty$, la suite (4) est au plus dénombrable. Nous la supposons rangée en une suite infinie $\{H_n\}$.

Il résulte de la définition de (4) qu'il n'existe dans (3) aucun ensemble M tel que

$$M \sum_{n=1}^{\infty} H_n = 0$$

ou, ce qui revient au même, tel que

$$\varphi\Big(M \sum_{n=1}^{\infty} H_n\Big) = 0.$$

Or, je dis que ceci entraîne l'inégalité

(5) $$\varphi(E_0) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(H_n).$$

En effet, supposons le contraire et posons

$$E^0 = E_0 - \sum_{n=1}^{\infty} H_n.$$

Comme on a, d'après notre supposition, $\varphi(E^0) > 0$, il existe (en vertu des mêmes prémisses que plus haut) un ensemble mesurable φ $M = M^0$ vérifiant (1) et (2), le symbole E_0 y étant remplacé par E^0. D'après $E^0 \subset E_0$, M^0 est donc un terme de la suite (3). D'autre part on a

(6) $$M^0 E^0 = M^0 E_0 - M^0 \sum_{n=1}^{\infty} H_n \subset M^0 - M^0 \sum_{n=1}^{\infty} H_n \subset M^0$$

et, d'après l'égalité $\varphi(M^0) = \varphi(M^0 X)$, vérifiée par certains $X \subset E^0$,

(7) $$\varphi(M^0) = \varphi(M^0 E^0).$$

Les formules (6) et (7) donnent

$$\varphi(M^0) = \varphi(M^0 E^0) \leqslant \varphi\Big(M^0 - M^0 \sum_{n=1}^{\infty} H_n\Big) \leqslant \varphi(M_0),$$

d'où $\varphi\big(M^0 \sum_{n=1}^{\infty} H_n\big) = 0$, ce qui est impossible, comme nous l'avons vu.

La formule (5) étant ainsi établie, la démonstration s'achève comme il suit.

D'après 1^*, on a $\mathfrak{m}_\varphi = \aleph_{\alpha+1}$ $(\alpha \geqslant 0)$. Soit $\omega_{\alpha+1}$ le plus petit nombre ordinal de puissance $\aleph_{\alpha+1}$. Les ensembles H_n appartenant à (3), soient $\{X_\xi^n\}$, $0 \leqslant \xi < \omega_{\alpha+1}$, les suites transfinies satisfaisant à (2) pour $M = H_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Posons

$$E_\xi = \sum_{n=1}^{\infty} H_n X_\xi^n \quad (0 \leqslant \xi < \omega_{\alpha+1}).$$

On vérifie sans peine, d'après la définition des ensembles H_n et les formules (2) et (5), que $E_\xi \cdot E_{\xi'} = 0$ pour $\xi \neq \xi'$ et que

$$\varphi(E_\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(H_n X_\xi^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(H_n) \geqslant \varphi(E_0).$$

Comme $E_0 \supset E_\xi$, il vient $\varphi(E_\xi) = \varphi(E_0)$. Les ensembles E_ξ $(0 \leqslant \xi < \omega_{\alpha+1})$ satisfont donc aux conditions de notre Théorème, qui se trouve ainsi démontré.

PUBLICATIONS CITÉES

[1] H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921.

[2] W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles linéaires quelconques*, Fund. Math. 23 (1934), p. 125-134.

[3] — *Sur un théorème de recouvrement dans la théorie générale des ensembles*, Fund. Math. 20 (1933), p. 214-220.

[4] A. Tarski, *Drei Überdeckungssätze der allgemeinen Mengenlehre*, Fund. Math. 30 (1938), p. 132-155.

[5] S. Ulam, *Über gewisse Zerlegungen von Mengen*, Fund. Math. 20 (1933), p. 221-223.

ON A PERFECT SET

BY

P. ERDÖS (BUDAPEST) AND S. KAKUTANI (NEW HAVEN)

(From a letter of P. Erdös to E. Marczewski)

... Enclosed I send you our promised solution to your problem[1]). The problem is this: A linear set S is said to have *property* (S_n) if there exists an η_n such that if $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $x_n - x_1 < \eta_n$ are any n real numbers, there exist n elements $y_1, y_2, \ldots, y_n$ of S, congruent to $x_1, x_2, \ldots, x_n$. You ask: Does there exist a perfect set S of measure 0 having property (S_3)?

Kakutani and I have constructed a perfect set S of measure 0 having property (S_n) for all $n \geqslant 2$. Our set S is defined as the set of non-negative numbers

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{k!}, \qquad 0 \leqslant a_k \leqslant k-2.$$

It is easy to see that the measure of S is 0 (every number x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, is uniquely of the form

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{k!}, \qquad 0 \leqslant a_k \leqslant k-1).$$

Thus we only have to prove that S has property (S_n) for all $n \geqslant 2$.

To show that S has property (S_n) it clearly suffices to show that if we put $x_2 - x_1 = z_1, x_3 - x_1 = z_2, \ldots, x_n - x_1 = z_{n-1}, z_{n-1} < \eta_n$, there exists a number z_0 in S such that all the numbers $z_0 + z_i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, are also in S. Assume $\eta_n < 1/(m-1)!$ where m will be determined later. Then clearly

$$z_i = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{b_k^{(i)}}{k!}, \qquad 0 \leqslant b_k^{(i)} \leqslant k-1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

[1]) E. Marczewski, P 125, Colloquium Mathematicum 3.1 (1954), p. 75.