PRINTED IN POLAND

Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Warszawa 1956

Nakład 1450+163 egz.
Ark. wyd. 10,5; druk. 9,25
Papier druk. sat. bezdrz. kl. III, 70×100, 100 g

Podpisano do druku 31. I. 1956 r.
Druk ukończono w lutym 1956 r.
Zamówienie nr 925/55

Cena zł 21.—

Wrocławska Drukarnia Naukowa — Wrocław, Świerczewskiego 19

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. IV 1956 FASC. 1

C O M M U N I C A T I O N S

SUR LES ENSEMBLES ε-CONVEXES

PAR

J. PERKAL (WROCŁAW)

1. Introduction. Deux opérations sont employées d'habitude pour simplifier la structure d'un ensemble de points E: la formation de sa *fermeture* $\bar{E}$ et celle de son *enveloppe convexe* $C(E)$, qui est par définition la partie commune de tous les ensembles fermés convexes qui le contiennent. Les deux opérations enrichissent l'ensemble et les deux peuvent être regardées comme extrêmes dans un certain sens: la fermeture n'ajoute à l'ensemble que les points infiniment proches, tandis que l'enveloppe convexe va jusqu'à lui ajouter parfois des points qui en sont éloignés de la moitié de son diamètre. La fermeture ne simplifie que peu considérablement la structure d'un ensemble de points. Elle le rend mesurable, mais le laisse souvent non-connexe et multicohérent. Par contre, l'enveloppe convexe comporte une simplification trop radicale, car elle transforme tout ensemble en un continu unicohérent. Les enveloppes convexes d'ensembles de dimension égale sont topologiquement équivalentes et même coïncident par certaines propriétés géométriques.

Certains problèmes exigent cependant des opérations intermédiaires entre les deux, c'est-à-dire qui simplifient la structure des ensembles de points plus que la formation de la fermeture et moins que celle de l'enveloppe convexe. J'en vais décrire une classe.

2. Notations, définitions et exemples. Les points seront désignés par les minuscules et leurs ensembles par les majuscules latines; les nombres — par les minuscules grecques. $|p,q|$ désignera la distance entre p et q; de même $|p,E|$ désignera celle entre p et E. L'ensemble des points de l'intérieur d'une sphère (la sphère ouverte) de centre et diamètre arbitraires sera désigné par Q sans indice; Q_ε désignera Q de diamètre ε et de centre quelconque; enfin, $Q_\varepsilon(p)$ désignera Q_ε de centre p.

Appelons *enveloppe ε-convexe* de E et désignons par $C_\varepsilon(E)$ l'ensemble de tous les points p distants au mois de $\varepsilon/2$ de tout point q qui est distant au moins de $\varepsilon/2$ de l'ensemble E. On a donc par définition

$$\text{(D)} \qquad C_\varepsilon(E) = \underset{p}{E}\Big[\prod_q \big(|q,E| \geqslant \varepsilon/2 \rightarrow |p,q| \geqslant \varepsilon/2\big)\Big],$$

l'aiguille désignant l'implication.

Soit $C'_\varepsilon(E)$ le complémentaire de $C_\varepsilon(E)$:

$$C'_\varepsilon(E)=1-C_\varepsilon(E),$$

1 désignant l'espace. Le complémentaire de l'enveloppe ε-convexe de E est donc par définition l'ensemble-somme de toutes les sphères ouvertes de diamètre ε qui sont disjointes de E:

(D′) $$C'_\varepsilon(E)=\sum_{E\cdot Q_\varepsilon=0} Q_\varepsilon.$$

En d'autres termes: l'ensemble $C'_\varepsilon(E)$ est la partie de l'espace qui se laisse balayer par la sphère ouverte Q_ε sans empiéter sur aucun point de l'ensemble E.

Les définitions (D) et (D′) sont équivalentes. En effet, Q_ε est par définition l'ensemble de la forme

$$Q_\varepsilon=\mathop{E}_{p}(|p,q|<\varepsilon/2),$$

le centre de cette sphère ouverte étant un point q quelconque. Pour que la sphère ouverte $Q_\varepsilon(q)$ soit disjointe de l'ensemble E, il faut et il suffit que l'on ait $|q,E|\geqslant\varepsilon/2$. La définition (D′) peut donc être écrite:

$$C'_\varepsilon(E)=\sum_{|q,E|\geqslant\varepsilon/2}\mathop{E}_{p}(|p,q|<\varepsilon/2),$$

d'où, par commutation formelle des opérateurs $\sum$ et E,

$$C'_\varepsilon(E)=\mathop{E}_{p}\Big(\sum_{|q,E|\geqslant\varepsilon/2}|p,q|<\varepsilon/2\Big),$$

$\sum$ jouant à présent le rôle du quantificateur d'existence. On peut donc écrire après lui la condition concernant q qui se trouvait au-dessous de lui:

$$C'_\varepsilon(E)=\mathop{E}_{p}\Big[\sum_{q}(|q,E|\geqslant\varepsilon/2)\cdot(|p,q|<\varepsilon/2)\Big],$$

d'où, par passage au complémentaire,

$$C_\varepsilon(E)=\mathop{E}_{p}\Big[\sum_{q}(|q,E|\geqslant\varepsilon/2)\cdot(|p,q|<\varepsilon/2)\Big]',$$

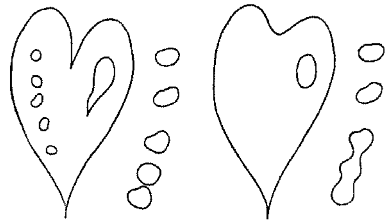
le signe ′ étant celui de négation. Or, cette formule équivaut précisément à (D).

La fig. 1 représente un ensemble plan E (à gauche) et son enveloppe ε-convexe $C_\varepsilon(E)$ (à droite). On voit que tous les trous dans lesquels aucun cercle ouvert de diamètre ε ne pouvait trouver place sont disparus; il n'est resté que la partie du grand trou qui peut être balayé par un cercle ouvert de diamètre ε. La forme de l'ensemble E s'est également modifiée: il n'y a plus d'entailles ne se laissant pas balayer par un tel cercle et les composantes de E entre lesquelles il était impossible d'en faire glisser aucun se sont unies l'une à l'autre.

Admettons enfin la définition suivante: un ensemble E est *ε-convexe* lorsque

$$E=C_\varepsilon(E).$$

D'après la propriété (5), qui va être établie, l'enveloppe ε-convexe de tout ensemble, quel qu'il soit, est un ensemble ε-convexe.



ε

Fig. 1

3. Propriétés élémentaires. Signalons-en les suivantes:

(1) *Toute enveloppe ε-convexe est un ensemble fermé;* en formule

$$C_\varepsilon(E)=\overline{C_\varepsilon(E)}.$$

C'est une simple conséquence de (D′).

(2) $$\bar{E}\subset C_\varepsilon(E).$$

En effet, si $p\epsilon E$ et $|q,E|\geqslant\varepsilon/2$, on a $|p,q|\geqslant\varepsilon/2$, d'où $p\epsilon C_\varepsilon(E)$ conformément à (D). Ainsi $E\subset C_\varepsilon(E)$, donc (2) en vertu de (1).

(3) $$X\subset Y\rightarrow C_\varepsilon(X)\subset C_\varepsilon(Y).$$

Il suffit de montrer que $C'_\varepsilon(Y)\subset C'_\varepsilon(X)$. Or, si $p\epsilon C'_\varepsilon(Y)$, il existe d'après (D′) une sphère ouverte Q_ε telle que $p\epsilon Q_\varepsilon$ et que $Q_\varepsilon\cdot Y=0$, d'où à plus forte raison $Q_\varepsilon\cdot X=0$, donc $p\epsilon C'_\varepsilon(X)$ en vertu de (D′).

(4) $$C_\varepsilon(X)+C_\varepsilon(Y)\subset C_\varepsilon(X+Y).$$

C'est une conséquence évidente de (3).

Le signe $\subset$ dans (4) ne peut pas être remplacé par celui d'égalité, comme le montre l'exemple de deux côtés parallèles du rectangle, X et Y, de longueur 2ε et distants de $\varepsilon/3$ l'un de l'autre: on a pour eux $C_\varepsilon(X)=X$ et $C_\varepsilon(Y)=Y$; cependant $C_\varepsilon(X+Y)$ contient l'interstice entre les deux.

(5) $$C_\varepsilon[C_\varepsilon(E)]=C_\varepsilon(E).$$

On a en effet $C_\varepsilon(E)\subset C_\varepsilon[C_\varepsilon(E)]$ d'après (2). Reste donc à montrer que, réciproquement, $p\epsilon C'_\varepsilon(E)$ entraîne $p\epsilon C'_\varepsilon[C_\varepsilon(E)]$. Or, il existe d'après (D′) une sphère ouverte Q_ε telle que $p\epsilon Q_\varepsilon$ et $Q_\varepsilon\cdot E=0$, d'où $Q_\varepsilon\subset C'_\varepsilon(E)$, c'est-à-dire $Q_\varepsilon\cdot C_\varepsilon(E)=0$. On a donc $p\epsilon C'_\varepsilon[C_\varepsilon(E)]$ d'après (D′).

(6) $$C_\varepsilon(E)=C_\varepsilon(\bar{E}).$$

On a en effet $C_\varepsilon(E)\subset C_\varepsilon(\bar{E})$ en vertu de (3), puisque $E\subset\bar{E}$. L'inclusion réciproque résulte de (2) en appliquant successivement (3) et (5):

$$\bar{E}\subset C_\varepsilon(E)\rightarrow C_\varepsilon(\bar{E})\subset C_\varepsilon[C_\varepsilon(E)]=C_\varepsilon(E).$$

(7) *La partie commune d'une famille quelconque d'ensembles ε-convexes est ε-convexe.*

Posons en effet $P=\prod\limits_t E_t$, où t parcourt un espace quelconque et $E_t=C_\varepsilon(E_t)$ pour tout t. On a alors $P\subset E_t$ et il en résulte d'après (3) que $C_\varepsilon(P)\subset C_\varepsilon(E_t)=E_t$ pour tout t. Par conséquent, $C_\varepsilon(P)\subset P$, ce qui entraîne avec l'inclusion réciproque comprise dans (2) l'égalité $P=C_\varepsilon(P)$ qu'il fallait établir.

(8) $$\varepsilon\leqslant\eta\rightarrow C_\varepsilon(E)\subset C_\eta(E).$$

Il suffit de montrer que $C'_\eta(E)\subset C'_\varepsilon(E)$. Or, si $p\,\epsilon\, C'_\eta(E)$, il existe d'après (D′) une sphère ouverte Q_η telle que $p\,\epsilon\, Q_\eta$ et $Q_\eta\cdot E=0$, ce qui entraîne l'existence d'une sphère plus petite $Q_\varepsilon\subset Q_\eta$ ayant les mêmes propriétés. On a donc $p\,\epsilon\, C'_\varepsilon(E)$ en vertu de (D′).

(9) $$C_\varepsilon(E)\subset C(E) \quad \textit{pour tout} \quad \varepsilon>0.$$

On sait en effet que le complémentaire $C'(E)$ d'une enveloppe convexe $C(E)$, lorsqu'il n'est pas vide, contient, pour chacun de ses points, une sphère ouverte qui contient ce point et qui est de diamètre aussi grand que l'on veut. Si $p\,\epsilon\, C'(E)$, il existe donc une sphère ouverte Q_ε telle que $p\,\epsilon\, Q_\varepsilon$ et que $Q_\varepsilon\cdot C(E)=0$, d'où à plus forte raison $Q_\varepsilon\cdot E=0$. Par conséquent, $p\,\epsilon\, C'_\varepsilon(E)$ en vertu de (D′).

(10) *Tout ensemble convexe est ε-convexe, quel que soit $\varepsilon>0$.*

On a en effet $E\subset C_\varepsilon(E)\subset C(E)$ en vertu de (2) et (9). Par conséquent, $E=C(E)$ entraîne $E=C_\varepsilon(E)$.

(11) $$\delta[C_\varepsilon(E)]=\delta(E).$$

Cette égalité des diamètres n'est qu'une conséquence immédiate de (9) et de la propriété $\delta[C(E)]=\delta(E)$ de l'enveloppe convexe.

4. Relations entre fermeture, enveloppe ε-convexe et enveloppe convexe. D'après (1) et (10), la famille de tous les ensembles ε-convexes de l'espace est en effet intermédiaire entre celle des ensembles fermés et celle des ensembles convexes: elle est contenue dans la première et contient la seconde. D'après (2) et (9), l'enveloppe ε-convexe d'un ensemble est contenue dans son enveloppe convexe et contient sa fermeture.

D'après les propriétés (14) et (15), qui vont être établies, l'enveloppe ε-convexe d'un ensemble E tend à sa fermeture avec ε infiniment décroissant et, du moins lorsque E est un domaine euclidien (au sens précisé plus loin), son enveloppe ε-convexe tend à son enveloppe convexe avec ε infiniment croissant. En vertu de (8), la famille des enveloppes ε-convexes d'un ensemble, considérée comme famille à un paramètre (à savoir au paramètre ε), est monotone:

$$\varepsilon\leqslant\eta \quad \textit{entraîne} \quad C_\varepsilon(E)\subset C_\eta(E).$$

Quelle que soit la suite $\{\varepsilon_\mu\}$ où $\lim\limits_{\mu=\infty}\varepsilon_\mu=0$, la partie commune $\prod\limits_{\mu=1}^{\infty}C_{\varepsilon_\mu}(E)$ est la même. Désignons-la, plus simplement, par $\prod\limits_\varepsilon C_\varepsilon(E)$.

La somme

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}C_{\varepsilon_\mu}(E)$$

coïncide d'après (8) avec son terme $C_{\varepsilon_0}(E)$, où ε_0 désigne le plus grand des nombres ε_μ pour $\mu=1,2,\ldots$ On a donc

(*) $$\sum_{\mu=1}^{\infty}\prod_{\nu=1}^{\infty}C_{\varepsilon_{\mu+\nu}}(E)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\prod_{\varepsilon}C_\varepsilon(E)=\prod_\varepsilon C_\varepsilon(E).$$

En désignant par ε_{μ_0} le plus grand des nombres $\varepsilon_{\mu+\nu}$ pour $\nu=1,2,\ldots$, on a pour la même raison

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}C_{\varepsilon_{\mu+\nu}}(E)=C_{\varepsilon_{\mu_0}}(E),$$

d'où, μ et μ_0 croissant vers l'infini simultanément,

(**) $$\prod_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}C_{\varepsilon_{\mu+\nu}}(E)=\prod_{\mu=1}^{\infty}C_{\varepsilon_{\mu_0}}(E)=\prod_\varepsilon C_\varepsilon(E).$$

On voit ainsi que les membres gauches des formules (*) et (**) sont égaux. Leur valeur commune, c'est-à-dire la limite de la suite d'ensembles $\{C_{\varepsilon_\mu}(E)\}$ [1]), est en même temps — comme il est facile de voir — sa limite topologique [2]). Puisqu'elle est la même, quelle que soit la suite $\{\varepsilon_\mu\}$ convergeant vers 0, désignons-la par $\operatorname{Lim}\limits_{\varepsilon=0}C_\varepsilon(E)$. On a donc

(12) $$\operatorname*{Lim}_{\varepsilon=0}C_\varepsilon(E)=\prod_\varepsilon C_\varepsilon(E).$$

Pareillement, quelle que soit la suite $\{\varepsilon_\mu\}$ où $\lim\limits_{\mu=\infty}\varepsilon_\mu=\infty$, la somme $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}C_{\varepsilon_\mu}(E)$ est la même. Désignons-la par $\sum\limits_\varepsilon C_\varepsilon(E)$.

[1]) C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa-Wrocław 1948, p. 76.

[2]) Ibidem, p. 245.

Le produit $\prod_{\mu=1}^{\infty} C_{\varepsilon_\mu}(E)$ coïncide d'après (5) avec son terme $C_{\varepsilon_0}(E)$, où ε_0 désigne cette fois-ci le plus petit des nombres ε_μ pour $\mu=1,2,\ldots$ On vérifie comme plus haut que les membres gauches des mêmes formules sont égaux, à savoir à l'ensemble $\sum_{\varepsilon} C_\varepsilon(E)$ qui est la limite topologique de la suite d'ensembles $\{C_{\varepsilon_\mu}(E)\}$ lorsque ε_μ croît indéfiniment d'une manière quelconque. On peut donc écrire

(13) $$\operatorname*{Lim}_{\varepsilon=\infty} C_\varepsilon(E) = \sum_{\varepsilon} C_\varepsilon(E).$$

On a

(14) $$\operatorname*{Lim}_{\varepsilon=0} C_\varepsilon(E) = \bar{E}.$$

En effet, vu (12), il suffit d'établir l'égalité $\prod_{\varepsilon} C_\varepsilon(E) = \bar{E}$. On a $\bar{E} \subset \prod_{\varepsilon} C_\varepsilon(E)$ en vertu de (2). Pour montrer que $\bar{E}' \subset [\prod_{\varepsilon} C_\varepsilon(E)]' = \sum_{\varepsilon} C'_\varepsilon(E)$, soit $p \in \bar{E}'$, c'est-à-dire $\eta = |p, \bar{E}| > 0$. La sphère ouverte $Q_\eta(p)$ est donc disjointe de E. L'existence d'un $\eta > 0$ tel que $p \in C'_\eta(E)$, c'est-à-dire que $p \in \sum_{\varepsilon} C'_\varepsilon(E)$, est ainsi établie.

Un ensemble E est dit *domaine ouvert* lorsque $E = \operatorname{Int}(\bar{E})$ et *domaine fermé* lorsque $E = \overline{\operatorname{Int}(E)}$ [3]). Appelons E *domaine intermédiaire* ou *domaine* tout court lorsque

$$\operatorname{Int}(\bar{E}) \subset E \subset \overline{\operatorname{Int}(E)}.$$

Passons aux espaces euclidiens.

Il résulte facilement d'un théorème bien connu [4]) que, dans un espace euclidien, tout domaine est en chacun de ses points exactement de la dimension égale à celle de l'espace. On a pour les domaines l'égalité suivante:

(15) $$\overline{\operatorname*{Lim}_{\varepsilon=\infty} C_\varepsilon(E)} = C(E).$$

En effet, vu (13), il suffit d'établir l'égalité $\overline{\sum_{\varepsilon} C_\varepsilon(E)} = C(E)$. On a $\overline{\sum_{\varepsilon} C_\varepsilon(E)} \subset C(E)$ en vertu de (9), puisque $C(E) = \overline{C(E)}$ par définition. Pour montrer que $C(E) \subset \overline{\sum_{\varepsilon} C_\varepsilon(E)}$, remarquons d'abord que, E étant un domaine, $C(E)$ est un domaine fermé, c'est-à-dire $C(E) = \overline{\operatorname{Int}[C(E)]}$. Il s'agit donc de montrer que l'hypothèse $p \in \operatorname{Int}[C(E)]$ entraîne l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $p \in C_\varepsilon(E)$.

[3]) Ibidem, p. 42 et 43.

[4]) C. Kuratowski, *Topologie II*, Warszawa-Wrocław 1950, p. 352, 10.

Or, cette hypothèse équivaut à l'existence d'un $\xi > 0$ tel que $Q_{2\xi}(p) \subset C(E)$ et elle entraîne, en posant $\delta = \delta[C(E)]$, l'absence dans $C(E)$ des points éloignés du point p pas moins que de δ (par suite de la convexité de cet ensemble). On a donc $C(E) \subset Q_{2\delta}(p)$ et $\xi < \delta$.

Posons $\varepsilon = 2(\xi + \delta^2/\xi)$. Pour conclure que $p \in C_\varepsilon(E)$, il ne reste donc qu'à montrer que $p \in Q_\varepsilon$ entraîne l'inégalité

(i) $$Q_\varepsilon \cdot E \neq 0.$$

Soit s le centre de Q_ε. Dans le cas où $|s,p| \leqslant \xi$, on a $E \subset Q_{2\delta}(p) \subset Q_\varepsilon$, car $\varepsilon/2 - \xi > \delta$; on a donc (i) à plus forte raison. La démonstration se réduit ainsi au cas où $|s,p| > \xi$.

Considérons dans ce cas l'hyperplan normal à la droite sp au point distant de $\xi/2$ de p et désignons par S celui des demi-espaces ouverts (en lesquels cet hyperplan coupe l'espace) qui contient le point s. Comme $|p, S| = \xi/2$, on a $S \cdot Q_{2\xi}(p) \neq 0$, d'où $S \cdot C(E) \neq 0$ d'après la définition de ξ et par conséquent $S \cdot E \neq 0$, car tout demi-espace ouvert contenant un point de $C(E)$ en contient qui appartiennent à E. Comme $E \subset C(E) \subset Q_{2\delta}(d)$, on a donc

(ii) $$S \cdot E \cdot Q_{2\delta}(p) \neq 0.$$

On a en outre

(iii) $$S \cdot Q_{2\delta}(p) \subset Q_\varepsilon.$$

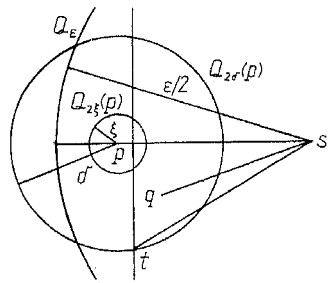


Fig. 2

Soient, en effet, $q \in S \cdot Q_{2\delta}(p)$ et t un point d'intersection des frontières de S et de $Q_{2\delta}(p)$ situé sur le plan à 2 dimensions contenant les points p, q et s. Ce plan est représenté à la fig. 2. On a évidemment $|q,s| \leqslant |s,t|$ et le segment st est l'hypoténuse du triangle dont l'un des autres côtés est de longueur inférieure à celle δ du rayon, tandis que la longueur de l'autre ne dépasse pas $\varepsilon/2 - \xi/2$, car $|p,s| \leqslant \varepsilon/2$. Par conséquent,

$$|q,s|^2 \leqslant |s,t|^2 \leqslant \delta^2 + (\varepsilon/2 - \xi/2)^2 = \delta^2 + \varepsilon^2/4 + \xi^2/4 - \varepsilon\xi/2$$
$$= \delta^2 + \varepsilon^2/4 + \xi^2/4 - \xi^2 - \delta^2 = \varepsilon^2/4 - 3\xi^2/4 < \varepsilon^2/4,$$

d'où $q \in Q_\varepsilon$. L'inclusion (iii) est ainsi établie. L'inégalité (i), qui était à établir, résulte immédiatement de (ii) et (iii).

Les théorèmes (14) et (15) montrent que la fermeture d'un ensemble peut être regardée dans un certain sens comme son enveloppe 0-convexe et que son enveloppe convexe tout court en est, dans le même sens, l'enveloppe ∞-convexe.

5. Enveloppe ε-convexe et ε-connexité. Un ensemble est dit *ε-connexe* lorsque tout couple de ses points y appartient à une suite finie de points, la distance entre deux termes consécutifs de laquelle étant inférieure à ε [5]). Une partie ε-connexe d'un ensemble qui n'est contenue dans aucune autre partie ε-connexe de lui s'appelle son *ε-composante*.

Evidemment, tout ensemble se compose de ses ε-composantes pour tout $\varepsilon>0$; elles y sont fermées. Si, pour un $\varepsilon>0$ donné, il n'y en a qu'une, l'ensemble est lui-même ε-connexe par définition. Enfin, tout ensemble connexe est ε-connexe quel que soit $\varepsilon>0$, la réciproque n'étant vraie que pour les ensembles compacts. Tout ensemble dense dans un ensemble connexe est ε-connexe quel que soit $\varepsilon>0$. En d'autres termes: *la connexité de $\bar{E}$ entraîne la ε-connexité de E pour tout $\varepsilon>0$.*

En effet, deux points quelconques p et q de E se laissent unir dans $\bar{E}$ par une suite finie de points aux distances consécutives moindres que $\varepsilon/2$. Chacun d'eux appartenant à $\bar{E}$, il existe à la distance moindre que $\varepsilon/4$ de lui un point de E. La suite de ces derniers résulte donc aux distances consécutives inférieures à $\varepsilon/2+2\varepsilon/4=\varepsilon$ par raison de la loi du triangle.

Cependant, $\bar{E}$ peut être ε-connexe sans que E le soit. Tel est par exemple le cas de l'ensemble E composé de points aux abscisses $0\leqslant\xi<1$ et $1+\varepsilon<\xi\leqslant 2$, où $0<\varepsilon<1$, de l'axe des ξ.

Or, on a le théorème

(16) *La ε-connexité de $\bar{\bar{E}}$ équivaut à celle de $C_\varepsilon(E)$.*

Elle y suffit, en effet, car deux points p et q de $C_\varepsilon(\bar{E})$ étant donnés, il existe en vertu de (D′) un point $p_1\epsilon\bar{\bar{E}}\cdot Q_\varepsilon(p)$, un autre $q_1\epsilon\bar{\bar{E}}\cdot Q_\varepsilon(q)$ et, entre p_1 et q_1 dans $\bar{E}$, par hypothèse, une suite de points aux distances consécutives inférieures à ε; en ajoutant donc à cette suite les points p et q de part et d'autre respectivement, la ε-connexité de $C_\varepsilon(\bar{E})$ se trouve établie. Reste à appliquer (6).

Réciproquement, en admettant la ε-connexité de $C_\varepsilon(\bar{E})$, supposons par impossible qu'une ε-composante K de $\bar{E}$ se trouve à la distance $d\geqslant\varepsilon$ de l'ensemble fermé non-vide $\bar{E}-K$. Il existe donc deux points, $p\,\epsilon K$ et $q\,\epsilon\bar{E}-K$, tels que $|p,q|=d$, et dans $C_\varepsilon(E)$ — par hypothèse — une suite de points aux distances consécutives inférieures à ε. Considérons p et q comme des bouts et les points de cette suite comme des sommets d'une ligne brisée; désignons leur ensemble par B; on a d'ailleurs évidemment $B\subset C(E)$. Soit $r\,\epsilon S\subset B$, r désignant un point de B équidistant de K et $\bar{E}-K$, et S — celui des côtés de B qui contient r. La sphère ouverte $Q_\varepsilon(r)$ est donc disjointe de K et de $\bar{E}-K$, car si elle en contenait un point, la distance entre lui et r serait moindre que $\varepsilon/2\leqslant d/2$, contrairement au choix de r. On a donc $\bar{E}\cdot Q_\varepsilon(r)=0$, d'où $Q_\varepsilon\subset C'_\varepsilon(E)$ en vertu de (D′) et (6). C'est cependant impossible, car $Q_\varepsilon(r)$ contient au moins l'un des bouts de S, puisque la distance entre eux est inférieure à ε d'après la définition de B et parce que $r\,\epsilon S$. Or, ce bout est, par définition, un point de $C_\varepsilon(E)$.

[5]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 300, renvoi. Cette notion coïncide pour des E compacts avec celle définie ibidem, p. 298.

L'équivalence (16) est ainsi établie.

Il existe toutefois des ensembles ε-connexes E dont l'enveloppe $C_\varepsilon(E)$ n'est pas connexe. Tel est l'exemple $\bar{E}$ (p. 8) envisagé sur le plan. On serait donc porté à croire que, tout au moins pour les valeurs $\omega>\varepsilon$ et pour E étant des domaines, la ε-connexité de E entraîne déjà la connexité de $C_\omega(E)$. L'exemple suivant, représenté par la fig. 3, montre qu'il n'en est rien:

E se compose de points (ξ,η) satisfaisant au système des 4 conditions

$$(\xi-3\varepsilon/2)^2+(\eta+\sqrt{\tau^2-\varepsilon^2/4}\,)^2\geqslant\tau^2,$$

$$(\xi-3\varepsilon/2)^2+(\eta-\sqrt{\tau^2-\varepsilon^2/4}\,)^2\geqslant\tau^2,$$

$$0\leqslant\xi\leqslant 3\varepsilon \quad \text{et} \quad \tau>\varepsilon.$$

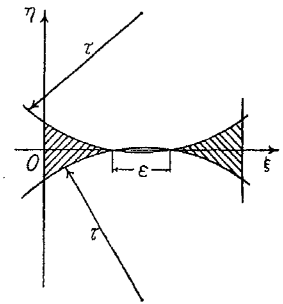


Fig. 3

On voit que E est un domaine fermé ε-connexe, la distance entre les deux composantes dont il est formé étant ε; cependant, quel que soit $\omega\leqslant\tau$, l'enveloppe $C_\omega(E)$ est identique à E, donc non-connexe.

Signalons le problème suivant de K. Borsuk:

P 144. Les ensembles ε-convexes sont-ils des polytopes ou au moins des ensembles localement contractiles?

Ce problème reste ouvert.

6. Applications. Il est commode parfois, dans les sciences naturelles, d'employer la notion d'ensemble de points. Cependant, elle y conduit souvent à des malentendus. En considérant l'ensemble des points qui constituent le corps d'un animal ou d'une plante par exemple, on ne sait pas s'il est à compter sans ou avec les points de la cavité nasale ou des espaces intercellulaires. La notion d'ensemble ε-convexe permet de s'entendre. Pour $\varepsilon=1$ cm par exemple, l'enveloppe ε-convexe du corps humain ne contiendrait que les cavités qui peuvent contenir une sphère de diamètre égal à 1 cm.

H. Steinhaus a attiré l'attention sur le paradoxe des mesures d'une longueur; il a aussi indiqué une méthode pour l'éviter [6]). Ce paradoxe réside dans l'impossibilité de mesurer avec exactitude la longueur des lignes offertes par la nature, telles que la longueur de la rive gauche de la Vistule, par exemple, ou d'une lame de couteau. En effet, plus fin est le mesurage, plus la longueur augmente: elle semble tendre à l'infini avec l'exactitude du mesurage. Or, le paradoxe en question se laisse supprimer également au moyen de l'enveloppe ε-convexe. Il n'y a pas de difficulté à la définir pour la rive d'un fleuve. La valeur de ε peut être de 1 km ou de 1 cm par exemple. On peut fixer cette valeur conformément au but du mesurage. C'est donc une question de convention, mais toutes les solutions du paradoxe de la longueur qui me sont connues contiennent des grandeurs de pure convention.

Un paradoxe analogue se présente pour l'aire d'une surface naturelle, d'un terrain ou d'un lambeau de cuir par exemple. En le mesurant de plus en plus exactement, il faut tenir compte des rugosités de plus en plus petites de sa surface, ce qui en augmente l'aire indéfiniment. Ce paradoxe, tout comme le précédent, peut être supprimé par le passage à l'enveloppe ε-convexe du lot ou du cuir.

Le paradoxe du volume est un peu différent. En mesurant avec l'exactitude croissante le volume d'un corps naturel, d'un animal par exemple, on est contraint de soustraire d'abord le volume des cavités, puis celui des espaces intercellulaires, intermoléculaires et ainsi de suite. Le volume de l'animal tombe ainsi presque à zéro. Mais ici encore l'emploi de l'enveloppe ε-convexe avec un ε raisonnablement choisi permet de s'entendre sur l'objet qu'il s'agit de mesurer et d'en déterminer le volume.

En examinant la pousse des herbes des prairies, il m'a fallu définir géométriquement la touffe d'herbes et son aire [7]). J'ai été amené au paradoxe de l'aire, analogue à celui du volume qui vient d'être décrit: je devais sans cesse rejeter de la touffe les rognures non couvertes par les projections des feuilles. Ces difficultés m'ont suggeré l'idée d'enveloppes ε-convexes. Il s'est montré bientôt que l'on pouvait assigner à chaque espèce d'herbe un ε choisi de façon que l'enveloppe ε-convexe d'une prairie ne confonde jamais deux touffes distinctes et qu'elle fasse d'une touffe toujours une région simplement connexe.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

[6]) H. Steinhaus, *Length, shape and area*, Colloquium Mathematicum 3 (1954), p. 1-13, en particulier p. 8-9.

[7]) J. Perkal, *Geometryczne wskaźniki łąk*, Zastosowania Matematyki II. 2 (1955), p. 133-149 (avec résumés en anglais et en russe).

A NOTE ON LABIL POINTS

BY

A. KOSIŃSKI (WARSAW)

A point p of a (metric, separable) space K is said to be an *homotopically labil point* (h. l. p.) in K if, given a neighbourhood U of p, there exists a continuous deformation $f(x,t)$ of $\overline{U}$ into itself which is the identity on $\mathrm{Fr}(\overline{U})$ and such that p is not in $f(\overline{U},1)$.

If K is an ANR (absolute neighbourhood retract), then this definition is equivalent to the following one: given $\varepsilon>0$ there exists a continuous mapping f of K into itself such that $\varrho(x,f(x))<\varepsilon$ and p non$\in f(K)$ (see [1], 1 and 3).

H. Noguchi established recently a theorem giving a characterization of h. l. p.'s in polytopes ([2], theorem 3.1). His proof is based on a theorem concerning the homological structure of absolute retracts and on the Borsuk-Jaworowski (sufficient) homological criterion for a point to be an h. l. p.

The aim of this note is:

1° to show that the theorem of Noguchi may be extended to a more general class of spaces than that of the polytopes;

2° to give a short proof of the theorem based only on most elementary facts from retracts theory; in particular, no homological notions will be applied.

A neighbourhood U of a point p in a space K will be called *star-shaped* if $\overline{U}$ is an AR and $\mathrm{Fr}(\overline{U})$ is a retract of $\overline{U}-(p)$. A space K will be called *regular* if any point of K has arbitrarily small star-shaped neighbourhoods.

Obviously, every polytope is a regular space (stars being star-shaped neighbourhoods), and any regular space in an ANR. It is easy to give examples of regular spaces which are not polytopes (*e. g.* space Q^* in [3], 2.3).

THEOREM. *A point p of a regular space K is h. l. p. in K if and only if boundaries of sufficiently small star-shaped neighbourhoods of p are absolute retracts.*

Sufficiency proof. (In fact, in this part of proof no regularity conditions are used.) Let $p\in K$ and let U be a neighbourhood of p of dia-