Betrachten wir eine Teilfolge T_1 von T vom Ordnungstypus ω_β, in welcher Elemente von (2) mit beliebig grossen Indizes vorkommen. Sei N_1 die Menge ihrer sämtlichen Teilmengen von der Mächtigkeit $\aleph_\beta$. Offenbar ist $\overline{\overline{N}}_1=2^{\aleph_\beta}$. Darum kann keine eineindeutige Abbildung zwischen N_1 und T_1 bestehen, was — wegen $N_1 \subset N$ — ein Widerspruch ist. Mithin ist unser Satz bewiesen.

SUR LA MULTIPLICATION DES TYPES ORDINAUX

PAR

J. SŁUPECKI (WROCŁAW)

Je vais démontrer cinq théorèmes sur la multiplication des types ordinaux. Je dois à W. Sierpiński les démonstrations des théorèmes 1 et 2, le théorème 5 et le problème donné à la fin de ce travail. En formulant les théorèmes 3 et 4 j'ai tiré avantage d'une remarque de R. Sikorski.

THÉORÈME 1. *Pour un type ordinal quelconque $\alpha\neq 0$ il existe des types ordinaux $\alpha'\neq\alpha$ et $\beta\neq 0$ tels que*

(1) $$\beta\cdot\alpha=\beta\cdot\alpha'.$$

Démonstration. Soit φ un nombre ordinal quelconque de puissance plus grande que celle de α, et soit $\alpha'=\varphi\cdot\alpha$, ce qui entraîne $\alpha'\neq\alpha$. Soit ensuite $\beta=\varphi^{\omega^*}$ (ω^* désignant le type ordinal inverse au type ω de l'ensemble des nombres naturels, ordonnés selon la grandeur). On a donc

$$\beta\cdot\varphi=\varphi^{\omega^*}\cdot\varphi=\varphi^{\omega^*}=\beta\neq 0;$$

$$\beta\cdot\alpha=\beta\cdot\varphi\cdot\alpha=\beta\cdot(\varphi\cdot\alpha)=\beta\cdot\alpha'.$$

THÉORÈME 2. *Pour un type ordinal quelconque $\alpha\neq 0$ il existe des types ordinaux $\alpha'\neq\alpha$ et $\beta\neq 0$ tels que*

(2) $$\alpha\cdot\beta=\alpha'\cdot\beta.$$

Démonstration. Soit φ un nombre ordinal quelconque de puissance plus grande que celle de α, et soit ψ un nombre ordinal tel que $\varphi<\omega^{\omega^\psi}$. Soit ensuite $\alpha'=\alpha\cdot\varphi$ et $\beta=\omega^{\omega^\psi}$. On a donc

$$\alpha'\neq\alpha;$$

$$\varphi\cdot\beta=\varphi\cdot\omega^{\omega^\psi}=\omega^{\omega^\psi}=\beta\neq 0;$$

$$\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot(\varphi\cdot\beta)=\alpha\cdot\varphi\cdot\beta=\alpha'\cdot\beta.$$

Le théorème 1 se laisse préciser de la manière suivante:

THÉORÈME 3. *Pour un type ordinal quelconque $\alpha\neq 0$ il existe un type ordinal $\alpha'\neq\alpha$ tel que*

(3) $$\eta\cdot\alpha=\eta\cdot\alpha'$$

(η désignant le type ordinal d'ensemble des nombres rationnels ordonnés selon la grandeur).

Démonstration. Soit A un ensemble ordonné du type α.

Supposons d'abord que l'ensemble A soit dense. Soit $a \epsilon A$. Désignons par $\bar{E}$ le type ordinal d'un ensemble ordonné E. Il existe des ensembles A_1 et A_2 tels que

$$\bar{A}=\bar{A}_1+\overline{(a)}+\bar{A}_2=\bar{A}_1+1+\bar{A}_2.$$

Soit b non ϵA. Il existe un ensemble ordonné A' tel que

$$\bar{A}'=\alpha'=\bar{A}_1+\overline{(a)}+\overline{(b)}+\bar{A}_2=\bar{A}_1+2+\bar{A}_2.$$

Puisque l'ensemble A' n'est pas dense, $\alpha'\neq\alpha$.

On a

$$\eta\cdot\alpha=\eta\cdot(\bar{A}_1+1+\bar{A}_2)=\eta\cdot\bar{A}_1+\eta+\eta\cdot\bar{A}_2;$$
$$\eta\cdot\alpha'=\eta\cdot(\bar{A}_1+2+\bar{A}_2)=\eta\cdot\bar{A}_1+\eta\cdot 2+\eta\cdot\bar{A}_2=\eta\cdot\bar{A}_1+\eta+\eta\cdot\bar{A}_2,$$

ce qui entraîne (3).

Supposons maintenant que A ne soit pas dense.

Soit $\alpha'=\eta\cdot\alpha$. C'est évidemment le type ordinal d'un ensemble dense, d'où $\alpha'\neq\alpha$. On a

$$\eta\cdot\alpha'=\eta\cdot(\eta\cdot\alpha)=\eta\cdot\eta\cdot\alpha=\eta\cdot\alpha.$$

La formule (3) est donc vérifiée dans les deux cas possibles.

LEMME. *Pour un type ordinal α transfini quelconque il existe des types ordinaux μ et ν tels que*

$$\alpha=\mu+\nu\neq\nu+\mu. \tag{4}$$

Démonstration. Soit A un ensemble ordonné de type α. Considérons les quatre cas suivants:

(a) L'ensemble A possède un premier et un dernier élément et toute coupure de A détermine un saut.

(b) L'ensemble A possède un premier et un dernier élément et une coupure de A ne détermine pas de saut.

(c) L'ensemble A n'a pas de premier élément.

(d) L'ensemble A n'a pas de dernier élément.

L'ensemble A étant transfini, le cas (a) est impossible.

Dans le cas (b) considérons une coupure $[A_1, A_2]$ de A sans saut et posons

$$\mu=\bar{A}_1, \qquad \nu=\bar{A}_2. \tag{5}$$

L'ensemble ordonné A_2+A_1 n'a pas d'élément premier ou d'élément dernier, ce qui entraîne (4).

Pour démontrer la formule (4) dans le cas (c) choisissons un élément quelconque a de l'ensemble A et considérons la coupure $[A_1, A_2]$ de A telle que l'élément a est le premier dans A_2. En posant (5), on a (4).

Au cas (d) la démonstration est analogue à celle au cas (c). Le lemme est donc démontré. Je m'en servirai pour préciser le théorème 2:

THÉORÈME 4. *Pour un type ordinal quelconque $\alpha\neq 0$ il existe un type ordinal $\alpha'\neq\alpha$ tel que*

$$\alpha\cdot(\omega^*+\omega)=\alpha'\cdot(\omega^*+\omega). \tag{6}$$

Démonstration. Dans le cas où le type α est fini, le type ordinal $\alpha'=\alpha+1$ remplit la formule (6).

Supposons donc que α soit un type ordinal transfini. D'après le lemme il existe alors des types ordinaux μ et ν qui remplissent la formule (4). Soit $\alpha'=\nu+\mu$, d'où $\alpha'\neq\alpha$. On a

$$\alpha\cdot(\omega^*+\omega)=(\mu+\nu)\cdot(\omega^*+\omega)=\ldots+(\mu+\nu)+(\mu+\nu)+\ldots$$
$$=\ldots+(\nu+\mu)+(\nu+\mu)+\ldots=(\nu+\mu)\cdot(\omega^*+\omega)=\alpha'\cdot(\omega^*+\omega),$$

c.q.f.d.

Les théorèmes 3 et 4 entraînent le

THÉORÈME 5. *Pour un type ordinal quelconque $\alpha\neq 0$ il existe des types ordinaux α' et α'' tels que*

$$\alpha'\neq\alpha; \qquad \alpha''\neq\alpha;$$
$$(\omega^*+\omega)\cdot\eta\cdot\alpha=(\omega^*+\omega)\cdot\eta\cdot\alpha'; \qquad \alpha\cdot(\omega^*+\omega)\cdot\eta=\alpha''\cdot(\omega^*+\omega)\cdot\eta.$$

En connexion avec ces théorèmes se trouve le problème suivant de W. Sierpiński:

P114. Existe-il deux types ordinaux différents α et β, et quatre types ordinaux γ, δ, μ et ν tels que

$$\alpha=\beta\gamma=\delta\beta, \qquad \beta=\alpha\mu=\nu\alpha\,?$$