4. There exists a function $f \epsilon \boldsymbol{PR}$ which cannot be majorized by any function $g \epsilon \boldsymbol{R}$. This means that

$$\prod_g \{g \epsilon \boldsymbol{R} \cdot \supset \cdot \sum_x [x \epsilon D^*(f) \cdot f(x) > g(x)]\}.$$

5. If the set $D^*(f)$ is the complement of a recursively enumerable set, and f can be extended to a function $g \epsilon \boldsymbol{PR}$, then f can be extended to a function $h \epsilon \boldsymbol{R}$.

From this it follows that if $D^*(f)$ is a computable set and $f \epsilon \boldsymbol{PR}$, then f can be extended to a computable function.

6. The class $\boldsymbol{PR}$ is closed under the operation of substitution, but is not closed under the operation of minimum. Namely there exists a function $f \epsilon \boldsymbol{PR}$ such that setting $f_n(x) = f(n, x)$ we find that the function

$$g(n) = \textit{the smallest } x \textit{ such that } x \epsilon D^*(f_n) \textit{ and } f(n,x) = 0$$

is not partially recursive.

7. If $g, f \epsilon \boldsymbol{PR}$, X is a recursively enumerable set $X \subset D^*(f)$, and $X \subset D(g)$, then both the sets $f(X)$ and $g^{-1}(X)$ (image and counter-image of the set X) are recursively enumerable. In particular the set $D(f)$ is recursively enumerable provided that $f \epsilon \boldsymbol{PR}$.

Using partially recursive functions we can define in a very simple way some recursively enumerable sets. *E. g.* if $F_n(x)$ is the universal function for the class of primitive recursive functions and we put

$$f(n) = F_n\big((\min x)[F_n(x) > n^2]\big),$$

then the set $D(f)$ is a *simple set* (*i. e.* a recursively enumerable set with infinite complement which intersects all infinite recursively enumerable sets[2])).

[2]) The definition and the first example of a simple set was given by Post. The example of Post is more complicated and obtained in a different way. See E. L. Post, *Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems*, Bulletin of the Am. Math. Soc. 50 (1944), p. 310.

ÜBER EINE EIGENSCHAFT DER SINGULÄREN KARDINALZAHLEN

VON

G. FODOR UND I. KETSKEMÉTY (SZEGED)

Aus einem Jourdainschen Satz[1]) kann folgende Behauptung hergeleiteten werd:

Wenn $\aleph_\alpha$ eine singuläre Kardinalzahl und ω_β die kleinste mit ω_α konfinale Anfangszahl ist, dann ist

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} > \aleph_\alpha.$$

In diesem Artikel geben wir einen direkten, einfachen Beweis dieser Behauptung an.

Beweis. E sei eine Menge von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$. Betrachten wir die Menge H sämtlicher Teilmengen von E, die die Mächtigkeit $\aleph_\beta$ haben. Offenbar ist $\overline{\overline{H}} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. Nehmen wir an, dass $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$ ist. Sei

$$(1) \qquad H_1, H_2, \ldots, H_\omega, H_{\omega+1}, \ldots, H_\xi, \ldots \qquad (\xi < \omega_\alpha)$$

eine wohlgeordnete Folge vom Typus ω_α sämtlicher Elemente von H. Sei y_1 ein beliebiges Element von H_1. Wählen wir aus H_2 ein Element y_2, das nicht y_1 gleich ist. Hat H_2 kein solches Element, so sei y_2 ein beliebiges Element von H_2. Nehmen wir an, dass wir y_ξ schon für jedes $\xi < \gamma < \omega_\alpha$ definiert haben. Dann sei y_γ ein von jedem y_ξ $(\xi < \gamma)$ verschiedenes Element von H_γ; wenn H_γ kein solches Element hat, sei y_γ ein beliebiges Element von H_γ. Setzen wir dieses Verfahren für jedes $\gamma < \omega_\alpha$ fort. Offenbar die Folge y_ξ enthält dann $\aleph_\alpha$ verschiedene Elemente.

Wir definieren eine wohlgeordnete Folge vom Typus ω_α

$$(2) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\eta, \ldots \qquad (\eta < \omega_\alpha)$$

der Elemente von E folgendermassen. Sei $x_1 = y_1$. Haben wir schon jedes x_η für $\eta < \delta$ definiert, so definieren wir x_δ als das erste von allen diesen x_η verschiedene Element der Folge y_ξ.

Bezeichnen wir mit N die Menge derjenigen Elemente H_ξ der Folge (1), zu denen Elemente von (2) mit beliebig grossen Indizes gehören. Offensichtlich hat N die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$. Jedem Element H_ξ von N sei nun $y_\xi = x_\mu$ zugeordnet. Aus der Konstruktion von (2) erhellt, dass diese Zuordnung eine eineindeutige Abbildung zwischen N und einer Teilmenge T von (2) von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ ist.

[1]) Ph. E. Jourdain, Quarterly Journal of Mathematics 39 (1908), p. 375-384.

Betrachten wir eine Teilfolge T_1 von T vom Ordnungstypus ω_β, in welcher Elemente von (2) mit beliebig grossen Indizes vorkommen. Sei N_1 die Menge ihrer sämtlichen Teilmengen von der Mächtigkeit $\aleph_\beta$. Offenbar ist $\overline{\overline{N}}_1=2^{\aleph_\beta}$. Darum kann keine eineindeutige Abbildung zwischen N_1 und T_1 bestehen, was — wegen $N_1\subset N$ — ein Widerspruch ist. Mithin ist unser Satz bewiesen.

SUR LA MULTIPLICATION DES TYPES ORDINAUX

PAR

J. SŁUPECKI (WROCŁAW)

Je vais démontrer cinq théorèmes sur la multiplication des types ordinaux. Je dois à W. Sierpiński les démonstrations des théorèmes 1 et 2, le théorème 5 et le problème donné à la fin de ce travail. En formulant les théorèmes 3 et 4 j'ai tiré avantage d'une remarque de R. Sikorski.

THÉORÈME 1. *Pour un type ordinal quelconque $\alpha\neq 0$ il existe des types ordinaux $\alpha'\neq\alpha$ et $\beta\neq 0$ tels que*

$$\beta\cdot\alpha=\beta\cdot\alpha'. \tag{1}$$

Démonstration. Soit φ un nombre ordinal quelconque de puissance plus grande que celle de α, et soit $\alpha'=\varphi\cdot\alpha$, ce qui entraîne $\alpha'\neq\alpha$. Soit ensuite $\beta=\varphi^{\omega^*}$ (ω^* désignant le type ordinal inverse au type ω de l'ensemble des nombres naturels, ordonnés selon la grandeur). On a donc

$$\beta\cdot\varphi=\varphi^{\omega^*}\cdot\varphi=\varphi^{\omega^*}=\beta\neq 0;$$

$$\beta\cdot\alpha=\beta\cdot\varphi\cdot\alpha=\beta\cdot(\varphi\cdot\alpha)=\beta\cdot\alpha'.$$

THÉORÈME 2. *Pour un type ordinal quelconque $\alpha\neq 0$ il existe des types ordinaux $\alpha'\neq\alpha$ et $\beta\neq 0$ tels que*

$$\alpha\cdot\beta=\alpha'\cdot\beta. \tag{2}$$

Démonstration. Soit φ un nombre ordinal quelconque de puissance plus grande que celle de α, et soit ψ un nombre ordinal tel que $\varphi<\omega^{\omega^\psi}$. Soit ensuite $\alpha'=\alpha\cdot\varphi$ et $\beta=\omega^{\omega^\psi}$. On a donc

$$\alpha'\neq\alpha;$$

$$\varphi\cdot\beta=\varphi\cdot\omega^{\omega^\psi}=\omega^{\omega^\psi}=\beta\neq 0;$$

$$\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot(\varphi\cdot\beta)=\alpha\cdot\varphi\cdot\beta=\alpha'\cdot\beta.$$

Le théorème 1 se laisse préciser de la manière suivante:

THÉORÈME 3. *Pour un type ordinal quelconque $\alpha\neq 0$ il existe un type ordinal $\alpha'\neq\alpha$ tel que*

$$\eta\cdot\alpha=\eta\cdot\alpha' \tag{3}$$

(η désignant le type ordinal d'ensemble des nombres rationnels ordonnés selon la grandeur).