C O M P T E S R E N D U S

SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

SÉANCES DE LA SECTION DE CRACOVIE

18. IX. 1951[1]). H. Steinhaus (Wrocław), *Nouvelle interprétation du calcul des probabilités* (voir *Sur les fonctions indépendantes (X)*, Studia Mathematica 13 (1953), p. 1-17).

13. IX. 1951. W. Wrona, *La vie et l'oeuvre de N. I. Lobatchewskiï.*

C. Loster, *Le livre de I. I. Privaloff „Propriétés aux limites des fonctions analytiques"*.

T. Ważewski, *La didactique et la méthode d'enseignement mathématique dans l'Union Soviétique.*

18. III. 1952. W. Ottenbreit, *Sur la monotonie de l'écart d'ensemble par rapport à une classe de fonctions génératrices.*

Appelons *fonction génératrice* toute fonction $\omega(p,q)$ à valeurs réelles, continue, non-négative et symétrique du couple de points p,q d'un espace métrique quelconque M, assujettie à la condition $\omega(p,p)=0$.

Etant donné un ensemble compact non-vide $E\subset M$, posons pour tout système $p^{(n)}$ formé de $n+1$ points $p_0,p_1,\dots,p_n$ de E

$$(1)\qquad V(p^{(n)})=\prod_{0\leqslant j<k\leqslant n}\omega(p_j,p_k),\qquad V_n=\max_{p^{(n)}\subset E}V(p^{(n)}),\qquad v_n=[V_n]^{2/n(n+1)},$$

où $[\ ]$ désigne l'entier. F. Leja a démontré que la suite $\{v_n\}$ est convergente. Le nombre

$$v(E,\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}v_n & \text{pour}\quad E\neq 0,\\ 0 & \text{pour}\quad E=0\end{cases}$$

sera dit l'*écart* de l'ensemble E par rapport à la fonction génératrice ω.

[1]) Pour les séances antérieures des Sections de Cracovie, de Gdańsk, de Lublin, de Łódź, de Poznań et de Varsovie, voir Annales de la Société Polonaise de Mathématique **24** (1953), p. 183-193, et pour celles de la Section de Wrocław — Colloquium Mathematicum 3 (1955), p. 76-86.

Admettons que le maximum (1) est atteint pour le système $q^{(n)}$ de points de E et formons les produits

$$\Delta_n^{(j)}(q^{(n)})=\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\omega(q_j,q_k)\qquad\text{pour}\quad j=0,1,\dots,n.$$

Les points $q_0,q_1,\dots,q_n$ étant rangés de façon que l'on ait

$$\Delta_n^{(0)}(q^{(n)})\leqslant\Delta_n^{(j)}(q^{(n)})\qquad\text{pour}\quad j=0,1,\dots,n,$$

posons

$$d_n(E,\omega)=[\Delta_n^{(0)}]^{1/n}.$$

On a le théorème:

I. *Quel que soit l'ensemble compact non-vide $E\subset M$ et quelle que soit la fonction génératrice ω, on a l'égalité*

$$\limsup_{(n)}d_n(E,\omega)=v(E,\omega).$$

Soient à présent M le plan de la variable complexe et $a_0,a_1,\dots,a_s$ un système de $s+1$ points de M, différents et dont $a_0=\infty$. Posons

$$p(z)=\begin{cases}\prod\limits_{k=1}^{s}(z-a_k)^{\sigma_k} & \text{pour}\quad s>0,\\ 1 & \text{pour}\quad s=0,\end{cases}$$

où σ_k sont des constantes réelles positives, d'ailleurs arbitraires, et formons la fonction génératrice

$$(2)\qquad \omega(z,w)=\frac{|z-w|}{|p(z)\cdot p(w)|}.$$

Considérons sur le plan M trois ensembles compacts non-vides: un ensemble E ne contenant aucun pôle de la fonction (2), un ensemble F situé dans l'une des régions-composantes de $M-E$ qui en contiennent les pôles et un ensemble G situé dans l'une de celles qui n'en contiennent aucun. On a alors le théorème

II. $v(E+G,\omega)=v(E,\omega)<v(E+F,\omega)$.

25. IV. 1952 (séance commune avec la Section de Cracovie de la Société Polonaise de Philosophie). G. Klaus (Jena), ***Materialistische und soziologische Grundlagen der Entwickelung der Mathematik.***

30. V. 1952. J. Mikusiński (Wrocław), *On bounded moments.*

Let $F(x)$ be a complex valued function, integrable in a given interval $[0,b]$ and such that $|F(x)|\leqslant M$. Suppose, that $\beta_1,\dots,\beta_k$ are positive numbers, different from each other. Put

$$\mu_n=\int_0^b x^{\beta_n}F(x)\,dx.$$

Then the following inequality holds:

$$\left|\int_0^b F(x)\,dx\right| \leqslant 2\Theta m M + \left|\sum_{n=1}^{k} a_n \mu_n (\Theta c)^{-\beta_n}\right| \quad \text{for} \quad \frac{b}{c} \leqslant \Theta \leqslant b,$$

where

$$m = \min_{s\geqslant 1} \frac{1}{s} \prod_{\nu=1}^{k} \left(1+\frac{1}{\beta_\nu}\right)^s \left(1+\frac{s}{\beta_\nu}\right)^{-1}, \qquad c = \prod_{\nu=1}^{k} \left(1+\frac{1}{\beta_\nu}\right)$$

and

$$\mu_n = -\prod_{\nu=1}^{k}{}' \frac{\beta_r}{\beta_\nu - \beta_n}.$$

One can deduce from this inequality the well known theorem on vanishing moments, due to Müntz, and the recent theorem on bounded moments, due to Mikusiński and Ryll-Nardzewski [2]).

23. IX. 1952. A. Rényi (Budapest), *Sur quelques nouveaux résultats de la statistique mathématique.*

7. X. 1952. S. Łojasiewicz, *Sur le problème d'itération.*

Le problème d'itération (de J. Hadamard) consiste à trouver, pour une fonction donnée $g(x)$, une fonction $f(a,x)$ telle que

(1) $\quad f(a, f(b,x)) = f(a+b, x),$ $\qquad$ (2) $\quad f(1,x) = g(x).$

Lorsque la variable a parcourt un groupe G et la variable x parcourt un ensemble E quelconque, la solution générale de l'équation (1) sans condition initiale (2) se laisse obtenir à l'aide de la théorie des espaces homogènes [3]). Soient, en effet, H_ν une famille arbitraire de sous-groupes de G, l'indice ν parcourant un ensemble quelconque de valeurs, et $E = \sum_\nu K_\nu$ une décomposition de E en ensembles K_ν de la même puissance que celle de l'espace homogène G/H_ν. La transformation biunivoque $u_\nu(K_\nu) = G/H_\nu$ établissant cette égalité de puissance, la solution générale de (1) est la suivante:

$$f(a,x) = u_\nu^{-1}(a\,;u_\nu(x)) \quad \text{pour} \quad x \in K_\nu.$$

Si le groupe G est celui d'addition des nombres, il faut, pour satisfaire à (2), résoudre l'équation d'Abel

$$u_\nu(g(x)) = 1 + u_\nu(x)$$

pour chaque u_ν séparément.

[2]) J. Mikusiński and C. Ryll-Nardzewski, *A theorem on bounded moments*, Studia Mathematica 13 (1953), p. 51-55.

[3]) N. Bourbaki, *Algèbre, Structures algébriques*, Paris 1942.

Si G est un groupe topologique et E est un espace topologique, et si l'on cherche des solutions $f(a,x)$ qui soient continues dans l'espace $G \times E$, les sous-groupes H_ν doivent être fermés et les transformations u_ν doivent être des homéomorphies.

En particulier, lorsque le groupe G est celui d'addition des nombres réels et la fonction $g(x)$ croît de $g(0)=0$ à $g(1)=1$ dans l'ensemble E, qui est l'intervalle $0<x<1$, toute solution continue de (1) est de la forme

(3) $$f(a,x) = h^{-1}(C^a h(x)),$$

où C est une constante positive et $h(x)$ est une fonction continue strictement monotone qui transforme l'intervalle $0<x<1$ en intervalle $0<x<\infty$ et satisfait à l'équation de Schröder

$$h(g(x)) = Ch(x).$$

Si, en outre, $g(x)$ est dérivable à l'entourage de 0 et $g'(x) = k + O(x)$ où $0<k<1$, la solution est unique et s'exprime par la formule (3) dans laquelle

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{g^n(x)}{g^n(x_0)},$$

où g^n désigne la n-ième itération de g, le point x_0 est fixé arbitrairement sur le segment $0<x<1$ et $f(a,x)$ ne dépend pas de x_0.

Si g est une fonction analytique, il en est de même de f.

22. X. 1952. V. Knichal (Prague), *Sur les ondes modulées par la fréquence.*

23. X. 1952. V. Knichal, *Sur les lois de Kirchhoff.*

29. X. 1952. P. Turán (Budapest), *On a new analytical method and its application* (voir ce fascicule, p. 91-112).

25. XI. 1952. J. Górski, *La monographie de G. M. Golusin.*

M. Krzyżański, *Nouvelles monographies soviétiques sur les équations de la physique.*

T. Ważewski, *Recherches qualitatives dans le domaine des équations différentielles.*

2. XII. 1952. M. Życzkowski, *Sur l'évaluation de la différence entre une fonction et la somme de premiers termes de son développement en série de Taylor.*

En approchant une fonction (d'une variable) par les premiers termes de son développement en série de Taylor, il importe d'évaluer l'erreur absolue $|R_p(x)|$ de l'approximation (c'est-à-dire la valeur absolue du reste de la série) et, dans certains cas, aussi l'erreur relative $|P_p(x)|=|R_p(x)|/|f(x)|$ exprimée en pourcents. D'habitude, l'évaluation de ces erreurs en un point donné $x=x_0$ ne comporte pas de difficulté, tandis que leur évaluation dans l'intervalle $0\leqslant x\leqslant x_0$ tout entier, souvent indispensable (lorsqu'on fait l'usage de la formule de Lagrange pour le reste de la série de Maclaurin par exemple), est plus difficile et peu précise. On peut démontrer toutefois que sous certaines hypothèses concernant les coefficients de la série et le point x_0 l'on a toujours

$$|R_p(x)|\leqslant|R_p(x_0)| \quad \text{et} \quad |P_p(x)|\leqslant|P_p(x_0)|$$

dans l'intervalle $0\leqslant x\leqslant x_0$ tout entier.

L'évaluation des erreurs en question dans un intervalle se laisse donc réduire sous ces hypothèses à celle au point x_0.

24. II. 1953. G. Majcher, *Sur un problème mixte concernant les équations différentielles du type hyperbolique.*

Il s'agit de trouver une solution de l'équation

$$H[u]\equiv u''_{xy}+a(x,y)u'_x+b(x,y)u'_y+c(x,y)u=f(x,y) \tag{1}$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

$$A(y)u'_x(x,y)+B(y)u'_y(x,y)+C(y)u(x,y)=g(x) \tag{2}$$

pour $x=\Theta(y), y\geqslant 0, \Theta'(y)>0$ et $\Theta(0)=0$,

$$u(x,0)=\psi(x) \quad \text{pour} \quad x\geqslant 0. \tag{3}$$

La démonstration de l'existence d'une solution de l'équation (1) repose sur la théorie des équations intégrales de Volterra. En admettant des hypothèses supplémentaires, on établit l'unicité de cette solution.

24. III. 1953. J. Litwiniszyn, *Sur un problème à deux dimensions concernant les écoulements turbulents.*

M. Krzyżański, *Remarques sur le problème de J. Litwiniszyn* (voir du même auteur *Sur le problème de Fourier dans une bande illimitée,* Archiwum Mechaniki Stosowanej, à paraître en polonais).

SÉANCES DE LA SECTION DE LUBLIN

9. XI. 1951. M. Biernacki, *Les résultats de I. M. Vinogradoff dans la théorie des nombres.*

Esquisse de la célèbre démonstration, due à Vinogradoff, de l'hypothèse de Goldbach: tout entier positif suffisamment grand est somme de trois nombres premiers.

23. XI. 1951. F. Jakóbczyk, *Fractions périodiques et congruence chinoise.*

7. XII. 1951. J. Krzyż, *On a theorem of E. Lasker.*

If $U_n\downarrow 0$ and b_n are complex numbers such that the series $\sum_n b_nU_n$ converges, then $(b_1+b_2+\ldots+b_n)U_n\to 0$. The theorem is known for special cases $b_n=\pm 1$ and $b_n\geqslant 0$. For the former case it is due to E. Lasker, and in the second case to Ch. J. de la Vallée-Poussin.

7. III. 1952. J. Krzyż, *On monotonity-preserving transformations* (Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 6 (1952), p. 91-111).

21. III. 1952. K. Tatarkiewicz, *La méthode de W. Ritz de résoudre approximativement les équations différentielles.*

28. III. 1952. K. Tatarkiewicz, *Une nouvelle formule pour l'estimation de l'erreur de la n-ième approximation de W. Ritz* (voir Annales Polonici Mathematici 1, à paraître).

25. V. 1952. K. Tatarkiewicz, *Sur un théorème asymptotique.*

Démonstration des propriétés asymptotiques des solutions du système d'équations différentielles non-linéaires

$$x'_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k+f_i(x_1,\ldots,x_n,t),$$

où a_{ik} sont des constantes et les fonctions f_i satisfont à certaines conditions; ces propriétés sont analogues à celles connues des solutions du système d'équations différentielles linéaires

$$x'_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k+f_i(t),$$

où $\lim\limits_{n\to\infty} a_{ik}(t)=a_{ik}$.

30. V. 1952. M. Biernacki, *Sur une inégalité entre intégrales due à Tchebycheff* (voir séance du 24. V. 1952 de la Section de Poznań).

14. XI. 1952. K. Tatarkiewicz, *P. L. Tchebycheff et l'influence de ses oeuvres.*

28. XI. 1952. M. Biernacki, *M. A. Lavrentieff et ses principaux résultats dans la théorie des fonctions analytiques.*

18. IV. 1953. K. Tatarkiewicz, *Un théorème de la théorie des matrices et ses applications à celle des équations différentielles.*

Une méthode simplifiée de la démonstration des formules explicites pour les solutions des systèmes de n équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants, basée sur un théorème de la théorie des matrices. Simplification des formules explicites en question.

25. IV. 1953. S. Gołąb (Cracovie), *Sur un théorème intégral de la géométrie différentielle.*

Les intégrales

$$\iint_S K\,d\sigma \quad \text{et} \quad \iint_S H\,d\sigma, \tag{1}$$

où S est une surface régulière fermée, K — la courbure de Gauss, H — la courbure moyenne et $d\sigma$ — un élément d'aire de S, sont traités dans des manuels classiques de la géométrie différentielle. Les recherches de l'auteur ont porté sur les intégrales

$$\iint_S K\boldsymbol{n}\,d\sigma \quad \text{et} \quad \iint_S H\boldsymbol{n}\,d\sigma, \tag{2}$$

où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur-unité normal à la surface S. Des conditions nécessaires et suffisantes ont été établies pour que, S étant une surface de révolution, les deux intégrales (2) s'annulent. Luntz[4]) et Krzystek ayant démontré la formule

$$\iint_S H\boldsymbol{n}\,d\sigma = \Theta$$

pour les surfaces S fermées, le problème est posé si la formule analogue avec K au lieu de H est également vraie pour ces surfaces.

4. V. 1953. K. Tatarkiewicz, *Sur les solutions bornées de certaines équations différentielles du second ordre.*

Démonstration des conditions suffisantes pour que l'équation différentielle

$$x^{\cdot\cdot} - 2a(t)x^{\cdot} - b(t)x = f(t)$$

ait une famille à 0, 1 et 2 paramètres des solutions bornées. Exemples qui montrent que ces conditions ne sont pas nécessaires et ne se laissent pas modifier essentiellement sans cesser d'être suffisantes.

11. V. 1953. M. Biernacki, *Sur une équation différentielle du 4-ème ordre.*

Démonstration des théorèmes suivants:

1° Si la fonction $A(x)$ est positive, non-décroissante et continûment dérivable pour $x > x_0$, l'équation $y^{(4)} + A(x)y = 0$ a toujours une intégrale tendant vers 0 avec $x \to \infty$.

[4]) C. Luntz, *Recherches sur la résistence des fluides dans un mouvement non permanent*, Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, Paris 1934; J. Dubnow, *Über Tensoren mit nichtskalaren Komponenten*, Abhandlungen aus dem Seminär für Vektor- und Tensor-Analysis I, Moscou 1933, p. 196-220.

2° Si la fonction $A(x)$ est en outre telle que $\lim_{x\to\infty} A(x) = \infty$, on a $\lim_{x\to\infty} y(x)[A(x)]^{1/8-\varepsilon} = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, pourvu que x ne parcourt pas certains intervalles exceptionnels dont la longueur totale est finie.

3° Si l'on a en outre $A''(x) \leqslant 0$ pour tout $x > x_0$, le produit $y(x)[A(x)]^{5/8}$ est borné lorsque $x \to \infty$ et les intervalles exceptionnels n'existent pas.

SÉANCES DE LA SECTION DE POZNAŃ

23. II. 1952. M. Krzyżański (Cracovie), *Sur une solution de l'équation de la chaleur.*

Conditions suffisantes pour que l'intégrale

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) e^{-(x-s)^2/4t} ds$$

tende à $\varphi(x_0)$ avec (x,t) tendant à $(x_0, 0)$.

M. Krzyżański, *Sur un processus stochastique.*

Rapports entre le processus stochastique homogène en abscisse[5]) et la solution élémentaire[6]) de l'équation de la chaleur.

1. III. 1952. S. Hartman (Wrocław), *Une généralisation du théorème de Kronecker.*

20. III. 1952. W. Jankowski, *Sur les zéros des polynômes aux paramètres arbitraires.*

Démonstration du théorème suivant: p, q et r, où $p<q<r$, étant les degrés des polynômes $P(z)$, $Q(z)$ et $R(z)$ respectivement dont aucune racine ne dépasse en module les nombres P, Q et R respectivement, le polynôme $P(z)+aQ(z)+bR(z)$ a p zéros ne dépassant pas en module le nombre $S(p,q,r,P,Q,R)$, qui ne dépend pas des paramètres a et b.

29. III. 1952. J. Albrycht, *On Saks theorem for abstract polynomials* (voir Studia Mathematica 14 (1953), p. 79-81).

J. Kopeć, *On vector-valued almost periodic functions* (voir Annales de la Société Polonaise de Mathématique 25 (1952), p. 100-105).

26. IV. 1952. S. Gołąb (Cracovie), *Quelques théorèmes de la théorie des courbes planes convexes.*

[5]) cf. A. Хинчин, *Асимптотические законы теории вероятностей*, Москва 1936, p. 17.

[6]) M. Krzyżański, *Sur la solution élémentaire de l'équation de la chaleur*, Atti Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti Scienze fisiche, matematiche e naturali, Serie 8, 8 (1950), p. 193-199.

Recherche relative au problème, posé par l'auteur, d'établir les conditions pour que le rapport de l'aire d'un segment de courbe plane convexe à celle du rectangle circonscrit à ce segment soit voisin de $2/3$. Démonstration, entre autres, des théorèmes suivants:

1. Ce rapport tend vers une limite lorsque la courbe satisfait à certaines hypothèses de régularité,

2. Cette limite dépend de l'ordre de contact entre la courbe et la tangente,

3. Cette limite est égale à $2/3$ lorsque la courbure de la courbe est finie et différente de 0.

5. V. 1952. H. Steinhaus (Wroclaw), *The establishment of paternity* (voir Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Wrocław, Série A, N° 32).

24. V. 1952. M. Biernacki (Lublin), *Sur une inégalité entre intégrales due à Tchebycheff* (voir Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 5 (1951), p. 23-29).

Généralisation des résultats antérieurs de l'auteur [7]).

Soient $f(x)$, $g(x)$ et $p(x)$ des fonctions intégrables dans un intervalle (a, b) et assujetties aux conditions:

1° la fonction $p(x)$ y est positive,

2° les fonctions

$$f_1(x)=\frac{\int_a^x p(x)f(x)\,dx}{\int_a^x p(x)\,dx} \qquad \text{et} \qquad g_1(x)=\frac{\int_a^x p(x)g(x)\,dx}{\int_a^x p(x)\,dx}$$

n'y atteignent leurs valeurs extrêmes qu'en un nombre fini de points, ces points étant les mêmes pour les deux fonctions

Alors on a l'inégalité

$$\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx \int_a^b p(x)\,dx \geqslant \int_a^b p(x)f(x)\,dx \int_a^b p(x)g(x)\,dx$$

ou l'inégalité inverse, suivant que les fonctions $f_1(x)$ et $g_1(x)$ croissent et décroissent dans l'intervalle (a, b) simultanément ou que l'une y croît lorsque l'autre décroît.

13. X. 1952. V. Kníchal (Prague), *Les problèmes mathématiques dans l'électrotechnique.*

[7]) Voir M. Biernacki, *Sur le deuxième théorème de la moyenne et sur l'inégalité de Tchebycheff*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska Sectio A, 4 (1950), p. 123-130.

23. X. 1952. M. Stark (Varsovie), *Le plan des éditions mathématiques.*

29. XI. 1952. W. Orlicz, *Les résultats de la mathématique soviétique dans la théorie constructive des fonctions.*

J. Albrycht, *Les résultats récents des mathématiciens soviétiques dans la théorie des équations fonctionnelles non-linéaires.*

13. III. 1953. R. Taberski, *Revue de la littérature mathématique tchécoslovaque la plus récente.*

R. Taberski, *Théorèmes de Cauchy sur les suites et règles de De l'Hôpital.*

Une démonstration unifiée des règles de De l'Hôpital

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{pour} \quad \frac{0}{0} \quad \text{et} \quad \frac{\infty}{\infty},$$

basée sur les théorèmes de Cauchy. On a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}$$

(pourvu que le membre droit existe) dans les deux cas suivants:

1° $\lim_{n\to\infty} u_n = 0 = \lim_{n\to\infty} v_n$ et la suite $\{v_n\}$ est strictement monotone;

2° la suite $\{u_n\}$ est arbitraire, la suite $\{v_n\}$ croît indéfiniment et $\lim_{n\to\infty} v_n=\infty$.

Cette démonstration permet de généraliser un peu la règle de De l'Hôpital pour ∞/∞, à savoir par suppression de l'hypothèse que $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$. Ainsi généralisée, cette règle a trouvé l'application dans la démonstration du théorème concernant la relation entre l'asymptote et la tangente.

J. Kopeć, *Sur les développements de Peano et de Taylor.*

Mise en relief des avantages qu'il y a à appliquer le développement de Peano (comme comportant des hypothèses plus faibles) pour examiner les valeurs extrêmes et pour déduire l'équation du plan osculateur, vue notamment la simplicité du mode de démonstration de cette équation à l'aide de la règle de De l'Hôpital.

Une démonstration simplifiée de la formule de Taylor donnant le reste de la série dans la forme intégrale.

20. III. 1953. M. Biernacki (Lublin), *Sur la dérivée logarithmique des fonctions rapidement croissantes* (voir Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 6 (1954), p. 55-64).

Soit $A(x)$ une fonction positive, continûment différentiable, non--décroissante pour $x \geqslant x_0$ et tendant à ∞ avec $x \to \infty$. Alors, une fonction $y(x)$ quelconque étant donnée qui satisfait pour $x \geqslant x_0$ aux inégalités $y>0$, $y'>0$, $\ldots$, $y^{(n-1)}>0$ et $0<y^{(n)}/y \leqslant A(x)$, on a pour $x>x_0$ les inégalités

$$\frac{y'}{y} < n!\,[A(x)]^{1/n}, \ \ldots, \ \frac{y^{(k)}}{y} < \frac{n!}{k!}\,[A(x)]^{k/n}, \ \ldots, \ \frac{y^{(n-1)}}{y} < n\,[A(x)]^{(n-1)/n}.$$

On ne sait pas si les facteurs $n!$, $\ldots$, $n!/k!, \ldots, n$ peuvent être remplacés par des constantes indépendantes de n. Ils le peuvent en tout cas, à savoir par le nombre 1, lorsque $n=2$, et il en est encore de même lorsque $n=3$ dans le cas où le rapport A'/A ne décroît pas, en même temps que la fonction $y(x)$ est 4 fois différentiable et satisfait à l'équation $y'''=yA(x)$. Enfin, en admettant de plus que A'/A tend à ∞ avec $x \to \infty$, on a pour les x suffisamment grands les inégalités

$$y'/y < y''/y' < y'''/y'' < y^{(4)}/y'''.$$

SÉANCES DE LA SECTION DE TORUŃ

7. X. 1952. J. Łoś, *Sur les processus stochastiques du type poissonien* (voir Studia Mathematica 14 (1954), à paraître).

5. XII. 1952. L. Jeśmanowicz, *Sur le développement des mathématiques en URSS.*

30. XII. 1952. J. Łoś, *On two applications of G. Birkhoff's theorem concerning the imbedding of an algebra into a product of algebras.*

Utilizing a theorem of Birkhoff [8]) two following theorems are proved:

1. A ring P is a subdirect union [9]) of fields if and only if there are no nilpotent elements in P.

2. Every subgroup of a group G is an endomorphic image of G if and only if there exists a normal divisor N in G such that G/N is a subdirect union of all subgroups of G.

The theorem 2, due to E. Sąsiada, is connected with a problem of Kertesz and Szele [10]).

L. Dubikajtis, *Sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-groupe $U \subset G \times H$ soit un produit de sous-groupes $G_1 \subset G$ et $H_1 \subset H$.*

[8]) G. Birkhoff, *Subdirect unions in universal algebra,* Bulletin of the American Mathematical Society 50 (1944), p. 764-768.

[9]) See ibidem.

[10]) A. Kertesz and T. Szele, *On abelian groups every multiple of which is a direct summand,* Acta Scientiarum Mathematicarum 14 (1952), p. 157-166.

2. III. 1953. A. Śniatycki, *Un système d'axiomes de la planimétrie basé sur l'algèbre de Boole dénombrablement additive.*

Les demi-plans, dont on admet qu'ils satisfont aux axiomes de l'algèbre de Boole dénombrablement additive, sont pris pour éléments premiers du système. Les quatre axiomes suivants sont admis:

A1. Si A est un demi-plan, A' en est également un.

A2. Trois régions non-vides X, Y et Z étant données, il existe soit un demi-plan A tel qu'aucune des régions AX, $A'X$, AY, $A'Y$, AZ et $A'Z$ n'est vide, soit trois demi-plans A, B et C tels que

$$XA'+(Y+Z)A+YB'+(X+Z)B+ZC'+(X+Y)C=0.$$

A3. Si quatre demi-plans A, B, C et D satisfont à la condition $(ABC+A'B'C')D=0$, on a $ABC=0$ ou $A'B'C'=0$.

A4. Si quatre demi-plans A, B, C et D sont différents et tels que $(AB'+A'B)(CD'+C'D)=0$, on a $AB'C+A'BC=0$ ou $AB'C'+A'BC=0$.

Les axiomes A1-A4 entraînent ceux d'incidence du système de Hilbert pour la géométrie du plan.

SÉANCES DE LA SECTION DE WROCŁAW

4. I. 1952. A. Zięba, *Sur les extrémums mixtes.*

11. I. 1952. J. Łoś (Toruń), *Théorie des espaces logiques et celle des classes d'algèbres définissables.*

18. I. 1952. C. Ryll-Nardzewski, *On superposition of functions.*

H. Steinhaus raised the following problem on continuous functions: *Let be*

$$(*) \qquad f(x,y,z)=\varphi_1(x,\psi_1(y,z))=\varphi_2(y,\psi_2(z,x)).$$

Then: are there two functions φ_3 and ψ_3 such that

$$f(x,y,z)=(\varphi^3 z,\psi_3(x,y))\ ?$$

The answer is positive for functions having continuous derivatives: *If $(*)$ holds in a neighbourhood U of a point at which f'_x, f'_y and f'_z do not vanish, then f is of the form*

$$f(x,y,z)=A\,(a(x)+b(y)+c(z))$$

in a neighbourhood $V \subset U$.

An analogous theorem holds for functions of n variables.

C. Ryll-Nardzewski, *Sur le problème des moments bornés* (voir J. G.-Mikusiński and C. Ryll-Nardzewski, *A theorem on bounded moments,* Studia Mathematica 13 (1953), p. 51-55).

W. Wolibner, *Sur une propriété de la surface sphérique.*

Exemples des distributions continues, mais pas homogènes, des masses sur la sphère pour lesquelles il existe des calottes (distinctes de l'hemisphère) qui en couvrent une partie égale dans chaque position. Ces distributions sont en rapport avec certains problèmes de H. Steinhaus.

25. I. 1952. M. Warmus, *Sur le calcul opératoire des fonctions de plusieurs variables.*

La méthode d'espaces abstraits, analogue à celle employée par Mikusiński [11]) dans le calcul opératoire des fonctions d'une variable, permet d'y introduire les opérateurs des fonctions de plusieurs variables. Il suffit de le montrer pour le cas de deux variables.

Soit A la classe des fonctions continues $a=\{a(t_1,t_2)\}$ à valeurs complexes, définies pour les variables réelles non-négatives t_1 et t_2. Si l'on définit dans A l'addition et la multiplication par les formules

$$\{a(t_1,t_2)\}+\{b(t_1,t_2)\}=\{a(t_1,t_2)+b(t_1,t_2)\},$$

$$\{a(t_1,t_2)\}\cdot\{b(t_1,t_2)\}=\Big\{\int_0^{t_1}d\tau_1\int_0^{t_2}a(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)\,b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_2\Big\},$$

A devient un anneau commutatif n'ayant pas de diviseurs de zéro [12]), c'est-à-dire tel que $ab=0$ entraîne $a=0$ ou $b=0$. L'anneau A peut être prolongé en un corps C dont les éléments sont des fractions

$$\frac{a}{b}=\frac{\{a(t_1,t_2)\}}{\{b(t_1,t_2)\}},$$

où $a\in A$, $b\in A$ et $b\neq 0$. Elles porteront le nom d'*opérateurs*.

L'addition et la multiplication dans le corps C sont définies par les formules

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\quad\text{et}\quad\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

On introduit les opérateurs intégraux l_1 et l_2:

$$l_1=\frac{\{t_1\}}{\{1\}},\qquad l_2=\frac{\{t_2\}}{\{1\}},$$

et on prouve que

$$l_1\{a(t_1,t_2)\}=\Big\{\int_0^{t_1}a(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\Big\},\qquad l_2\{a(t_1,t_2)\}=\Big\{\int_0^{t_2}a(t_1,\tau_2)\,d\tau_2\Big\}.$$

[11]) J. Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica 11 (1949), p. 41-70.

[12]) J. Mikusiński et C. Ryll-Nardzewski, *Un théorème sur le produit de composition des fonctions de plusieurs variables*, Studia Mathematica 13 (1953), p. 62-68.

On introduit enfin — comme dans le travail précité de Mikusiński — les opérateurs numériques $\alpha=\{\alpha\}/\{1\}$, où α est un nombre complexe et les opérateurs différentiels

$$s_1=\frac{1}{l_1},\qquad s_2=\frac{1}{l_2}.$$

Ceci fait, on montre que si la fonction $a(t_1,t_2)$ possède la dérivée partielle $a_{t_1^{m-1}t_2^{n-1}}(t_1,t_2)$ absolument continue, on a la formule

$$\{a_{t_1^m t_2^n}(t_1,t_2)\}=s_1^m s_2^n\{a(t_1,t_2)\}-\sum_{i=1}^{m}s_1^i\{a_{t_1^{m-i}t_2^{n}}(0,t_2)\}$$
$$-\sum_{j=1}^{n}s_2^j\{a_{t_1^m t_2^{n-j}}(t_1,0)\}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}s_1^i s_2^j\{a_{t_1^{m-i}t_2^{n-j}}(0,0)\}.$$

Cette formule permet d'obtenir la solution opératoire d'une équation aux dérivées partielles

$$\sum_{u=0}^{m}\sum_{v=0}^{n}a_{uv}x_{t_1^u t_2^v}(t_1,t_2)=f(t_1,t_2),$$

où a_{uv} sont des coefficients constants et $f(t_1,t_2)$ est une fonction donnée, sommable dans le domaine $0\leqslant t_1\leqslant T_1$, $0\leqslant t_2\leqslant T_2$.

On obtient la solution finale de cette équation lorsque la solution opératoire se laisse écrire comme une fonction de deux variables t_1 et t_2. L'application de cette méthode est illustrée par quelques exemples. On peut l'appliquer aussi pour résoudre les systèmes d'équations aux dérivées partielles avec coefficients constants.

Un rôle important revient dans ce calcul aux opérateurs de translation. Si, par exemple, $\{a(t_1,t_2)\}=\{f(t_2)\}$, c'est-à-dire que $a_{t_1}(t_1,t_2)\equiv 0$, on a

$$\frac{s_1}{(s_1+\lambda s_2)^{n+1}}\{f(t_2)\}=\begin{cases}0 & \text{pour}\quad 0\leqslant t_2\leqslant\lambda t_1,\\ \dfrac{t_1^n}{n!}f(t_2-\lambda t_1) & \text{pour}\quad 0\leqslant\lambda t_1<t_2,\end{cases}$$

où λ est un nombre réel et $s_1/(s_1+\lambda s_2)^{n+1}$ est un opérateur de translation.

Plus généralement, toutes les méthodes du calcul opératoire de Mikusiński se laissent introduire par isomorphie dans celui des fonctions de plusieurs variables ainsi formé. C'est que les fonctions d'une variable $f(t_1)$ et $g(t_2)$ y sont les opérateurs $[f(t_1)]_1$ et $[g(t_2)]_2$ définis par les formules

$$[f(t_1)]_1=s_2\{f(t_1)\},\qquad [g(t_2)]_2=s_1\{g(t_2)\},$$

dans lesquelles $\{f(t_1)\}$ et $\{g(t_2)\}$ sont à considérer comme des fonctions de deux variables t_1, t_2

$$\{f(t_1)\}=\{F(t_1,t_2)\}, \qquad \{g(t_2)\}=\{G(t_1,t_2)\}.$$

On montre que

$$[a(t_i)]_i+[b(t_i)]_i=[a(t_i)+b(t_i)]_i,$$

$$[a(t_i)]_i\cdot[b(t_i)]_i=\Big(\int_0^{t_i} a(t_i-\tau_i)\,b(\tau_i)\,d\tau_i\Big)_i,$$

où $i=1$ et 2.

1. II. 1952. S. Zubrzycki, *Sur les chaînes d'étoiles* (voir Zastosowania Matematyki 1 (1954), p. 197-205, en polonais avec un résumé anglais).

H. Fast et A. Götz, *The Crofton formula for linearly measurable plane sets*.

H. Steinhaus, *Quelques remarques sur la formule de Taylor*.

8. II. 1952. J. Perkal, *Sur les indices anthropologiques* (à paraître dans Przegląd Antropologiczny 18 (1953), en polonais).

S. Hartman, *Zur Gitterpunktverteilung bei Verschiebungen von Mengen* (voir Studia Mathematica 13 (1953), p. 87-93).

15. II. 1952. A. Rybarski, *Une méthode électrique pour déterminer la quantité de silicium dans l'acier* (voir Zastosowania Matematyki 1 (1954), p. 173-187 et 354, en polonais avec un résumé en anglais).

J. Mycielski, *Quelques identités de la théorie analytique des nombres* à paraître dans Colloquium Mathematicum).

19. II. 1952. J. Mikusiński et C. Ryll-Nardzewski, *A theorem on bounded moments* (voir Studia Mathematica 13 (1953), p. 51-55).

22. II. 1952. K. Florek, *Solutions de quelques équations fonctionnelles*.

29. II. 1952. A. Wanke, *Une méthode d'étudier la fréquence des complexes de caractères* (voir Przegląd Antropologiczny 19 (1953), p. 138-181, en polonais).

E. Marczewski et C. Ryll-Nardzewski, *Remarks on the compactness and non direct products of measures* (voir Fundamenta Mathematicae 40 (1953), p. 165-170).

7. III. 1952. B. Knaster, *Un théorème sur la compactification* (voir Annales de la Société Polonaise de Mathématique 25 (1952), p. 252-267).

J. Mikusiński, *Sur le parquetage du plan par des polygones* (voir Colloquium Mathematicum 3 (1954), p. 14-18).

14. III. 1952. E. Marczewski, *Remarks on the Poisson Stochastic Process, II* (voir Studia Mathematica 13 (1953), p. 131-137).

K. Urbanik, *Quelques théorèmes sur les mesures* (voir Fundamenta Mathematicae 41 (1954), p. 150-162).

21. III. 1952. W. Skrzywan, *Un procédé de groupement basé sur la table de Czekanowski* (à paraître dans Przegląd Antropologiczny, en polonais).

Le problème de dégager les groupes d'un ensemble fini d'objets est important tout particulièrement pour l'anthropologie (distinction des types). On n'en connaît pas de solution tout à fait satisfaisante.

Un procédé de groupement a été élaboré récemment par le Groupe Général des Applications à l'Institut Mathématique de l'Etat[13]). Celui proposé par l'auteur en diffère. Il a pour point de départ la table des distances mutuelles entre les objets considérés, dite *table de Czekanowski*. La distance entre deux objets est définie le plus souvent comme somme des différences absolues de leurs caractères.

28. III. 1952. J. Obalski (Varsovie), *Sur le degré de certitude dans la vérification des instruments de mesure* (voir Zastosowania Matematyki 1 (1954), p. 105-124, en polonais).

1. IV. 1952. E. Marczewski, *Projections dans les espaces abstraits et produits de mesures* (voir E. Marczewski and C. Ryll-Nardzewski, *Projections in abstract sets*, Fundamenta Mathematicae 40 (1953), p. 160-164, et E. Marczewski and C. Ryll-Nardzewski, *Remarks on the compactness and non direct products of measures*, ibidem, p. 165-170).

4. IV. 1952. M. Fisz (Warsaw), *The limiting distribution of some functions of two random variables with statistical application* (ce fascicule, p. 138-146).

J. Oderfeld (Varsovie), *Comparaison des défectuosités dans deux épreuves*.

J. Łoś (Toruń), *Sur un problème de W. Sierpiński*.
Solution due à E. Sąsiada.

S. Drobot et M. Warmus, *Une application de l'analyse dimensionnelle aux estimations statistiques*.

22. IV. 1952. S. Hartman, *Remarques sur les transformées et les coefficients de Fourier*.

[13]) Voir le travail collectif *Sur la liaison et la division des points d'un ensemble fini*, Colloquium Mathematicum 2 (1951), p. 282-285.

On a les théorèmes suivants qui rentrent dans l'ordre d'idées des recherches de Gelfand [14]):

I. Soit $f(t)=f_1(t)$ une fonction complexe de variable réelle, absolument continue dans tout intervalle fini et à variation bornée sur toute la droite; soient

$$f_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{n-1}(x-t)\,df(t) \quad \text{pour} \quad n=2,3,\ldots \quad \text{et} \quad W_n=\int_{-\infty}^{\infty} |df_n(t)|.$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{W_n} = \max_{\lambda} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} df(t) \Big| .$$

II. Soit $g(t)=g_1(t)$ une fonction intégrable (L) dans l'intervalle $0\leqslant x\leqslant 1$; soient

$$g_n=\int_0^1 g_{n-1}(x-t)\,g(t)\,dt \quad \text{pour} \quad n=2,3,\ldots \quad \text{et} \quad K_n=\int_0^1 |g_n(t)|\,dt.$$

Enfin, soit

$$g(x)\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}.$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{K_n} = \max_{n} |a_n| .$$

III. Soient $\{a_n\}$ $(n=\ldots,-1,0,1,\ldots)$ la suite des coefficients de Fourier d'une fonction f intégrable (L) et $\lambda\neq 0$ un nombre complexe tel que $a_n+\lambda\neq 0$ pour tout n. Alors il existe une fonction g intégrable (L) dont les coefficients de Fourier sont $a_n/(\lambda+a_n)$.

Le théorème I est trivial dans le cas où $f(t)$ est monotone; le théorème II l'est lorsque $g(t)\geqslant 0$ et il en est de même du théorème III lorsque la fonction f est au carré intégrable.

E. Marczewski, *A remark on absolutely measurable sets.*

Any finite σ-measure μ in the field of Borel subsets of a metric space X is called a *Borel measure* in X. A set $E\subset X$ is called *measurable* with respect to μ if there are Borel sets A and B such that

$$A\subset E\subset B, \qquad \mu(B-A)=0.$$

A set $E\subset X$ is called *absolutely measurable* [15]) if it is measurable with respect to each Borel measure in X. It is called *absolutely of measure zero* if for every Borel measure μ in X which vanishes for all one-point sets there is a Borel set $N\supset E$ such that $\mu(N)=0$. Two sets L and M are called *equivalent* if their symmetric difference $L\dot{-}M$ is absolutely of measure zero.

C. Ryll-Nardzewski asked whether for every absolutely measurable set M there is an equivalent Borel set B. The negative answer on this question is a consequence of the following theorem (proved by the aid of the continuum hypothesis):

THEOREM. *In every complete separable non denumerable metric space X there is a class of mutually non equivalent absolutely measurable sets, which is of greater power than that of the continuum.*

The proof is analogous with that of a theorem of Sierpiński concerning the Baire property [16]).

W. Wolibner, *Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un mouvement du milieu continu assujetti aux forces stables et qui soit stable relativement au système mobile.*

25. IV. 1952. A. Zięba, *Sur les solutions discontinues du problème régulier du calcul des variations.*

2. V. 1952. S. Hartman et C. Ryll-Nardzewski, *Théorèmes abstraits de Kronecker et les fonctions presque périodiques* (voir Studia Mathematica 13 (1953), p. 298-310).

J. Łoś (Toruń), *Communication sur les résultats de L. Dubikajtis concernant les relations d'ordre.*

6. V. 1952. S. Drobot, *On the foundations of Dimensional Analysis* (Studia Mathematica 14 (1954), p. 84-89; voir aussi Zastosowania Matematyki 1 (1954), p. 233-272, en polonais).

9. V. 1952. W. Wolibner, *Sur une propriété des suites disjointes de nombres naturels.*

K. Urbanik, *Sur un système infini d'équations* (à paraître dans Wiadomości Matematyczne 1 (1954), en polonais).

16. V. 1952. J. Łoś et E. Sąsiada (Toruń), *Sur les plans pseudotangents à l'ensemble compact spatial.*

23. V. 1952. E. Čech (Prague), *Sur l'intégrale superficielle.*

30. V. 1952. J. Łopuszański, *On the Distribution and Statistical Moments of Fermi- and Bose-Particles* (voir Acta Physica Polonica 11 (1951-52), p. 298-313).

[14]) J. Gelfand, *Über absolut konvergente trigonometrische Reihen und Integrale*, Matiematitcheskiĭ Sbornik 9 (1941), p. 51-66.

[15]) See E. Szpilrajn-Marczewski, *O zbiorach i funkcjach bezwzględnie mierzalnych*, Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie 30 (1937), p. 39-68.

[16]) W. Sierpiński, *Sur les ensembles jouissant de la propriété de Baire*, Fundamenta Mathematicae 23 (1934), p. 121-124.

A. Śniatycki (Toruń), *Communication sur le parquetage des surfaces à l'aide des polygones.*

6. VI. 1952. H. Steinhaus, *Sur les nombres battus* (cf. la séance du 30. I. 1953).

6 et 10. VI. 1952. R. S. Ingarden, *Sur la quantification de la masse inerte* (voir P. C. Ингарден, *Уравнения движения и уравнения поля в пятимерной единой теории относительности,* Доклады Академии Наук СССР 88 (1953), p. 773-776).

20. VI. 1952. C. Ryll-Nardzewski, *On the non-homogeneous Poisson processes.*

A complete discussion of stochastic differential processes, which may be treated as composed Poisson processes without any homogeneity conditions. In particular all time-dependent processes are discussed, for which the sample functions are arbitrary step functions.

The theorems related here imply those contained in some recent papers [17]).

1. Let X be a fixed Borel subset of a finite dimensional Euclidian space and $\boldsymbol{B}_0$ a denumerable field of Borel subsets of X such that $(\boldsymbol{B}_0)_\beta=\boldsymbol{B}$ is the field of all Borel subsets of X. By a *register* we understand every finite set function $\omega(E)$ defined and σ-additive in B_0 (in the classical Poisson process $\omega(E)$ may be understood *e. g.* as the number of telephone calls in a subset E of the time axis). We consider a probability-measure P defined on a σ-field of subsets of a fixed set Ω of registers. We suppose that

1° for every $E\epsilon\boldsymbol{B}_0$, the number $\omega(E)$ treated as a function of ω is P-measurable,

2° $\omega(E_1),\omega(E_2),\ldots,\omega(E_k)$ are stochastically independent functions, whenever E_j are disjoint sets belonging to $\boldsymbol{B}_0$. Then we call Ω a *process.* Obviously, every register ω may be extended to a σ-additive set function in $\boldsymbol{B}$ (denoted also by ω).

LEMMA. *The conditions* 1° *and* 2° *are fulfilled for each set belonging to* $\boldsymbol{B}$.

17) A. Rényi, *On some problems concerning Poisson processes,* Publicationes Mathematicae Debrecen 2 (1951), p. 66-73; L. Jánossy, A. Rényi and J. Aczél, *On composed Poisson distributions I,* Acta Mathematica Acad. Sc. Hungary 1 (1950), p. 209-224 (especially §§ 1 and 2, p. 211-217); A. Rényi, *On composed Poisson Distributions II,* ibidem 2 (1951), p. 83-96 (especially §§ 1 and 2, p. 84-90); K. Florek, E. Marczewski and C. Ryll-Nardzewski, *Remarks on the Poisson stochastic process (I),* Studia Mathematica 13 (1953), p. 122-129), E. Marczewski, *Remarks on the Poisson stochastic process (II),* Studia Mathematica, 13 (1953), p. 130-136.

For given Ω and P we call a point $x_0\epsilon X$ *singular* if $P\{\omega((x_0))\neq 0\}>0$. It is easy to prove that the set of all singular points is at most denumerable.

In the sections 3-5 we shall assume that

(S) There are no singular points.

This condition simplifies the explicite formulae for distributions; nevertheless the existence of singular points does not imply essential difficulties. For instance, we do not assume (S) in the section 2.

2. In this section we assume that

(A_1) Every $\omega\epsilon\Omega$ is purely atomic, and, for every atom x_0, we have $\omega((x_0))=1$.

For every $E\epsilon\boldsymbol{B}$, let us denote by $m(E)$ the expected value of $\omega(E)$:

$$m(E)=\int_\Omega \omega(E)\,dP(\omega).$$

THEOREM 1. *The set function $m(E)$ is a finite σ-measure in $\boldsymbol{B}$. If $E\epsilon\boldsymbol{B}$ contains no atom of the measure m, then $\omega(E)$ has the Poisson distribution:*

$$P\{\omega\,|\,\omega(E)=n\}=\frac{[m(E)]^n}{n!}e^{-m(E)}\qquad(n=0,1,2,\ldots).$$

If $x_0\epsilon X$ is an atom of m (or, in other words, if x_0 is singular), then $\omega((x_0))$ assumes the value 1 or 0 with the probability $m((x_0))$ or $1-m((x_0))$ respectively.

This theorem, together with Lemma, permits to determine effectively the distribution of $\omega(E)$ for every $E\epsilon\boldsymbol{B}$.

Of course, if X is a time interval, then every atom of m is such a moment t_0 for which the probability of a call is positive. If the process is homogeneous in the time, then there is no atom and $m(E)$ is proportional to the Lebesgue measure.

3. In this section we assume that

(A_2) Every $\omega\epsilon\Omega$ is purely atomic and, for every atom x_0 of ω the number $\omega((x_0))$ belongs to a fixed sequence $\{v_n\}$ of mutually different real numbers.

For every $\omega\epsilon\Omega$ and $E\epsilon\boldsymbol{B}$ we denote by $\omega_n(E)$ the number of atoms x_0 of ω, which belong to E and such that $\omega((x_0))=v_n$. Obviously, for every ω and n, the set function $\omega_n(E)$ is a purely atomic σ-measure such that, for every atom x_0 of ω_n, we have $\omega_n((x_0))=1$. It is easy to see that

$$\omega(E)=\sum_n v_n\omega_n(E).$$

This series is absolutely convergent.

THEOREM 2. *For every n and every $E \in \boldsymbol{B}$, $\omega_n(E)$ is a P-measurable function of ω. For disjoint sets E or different subscripts n, the functions $\omega_n(E)$ of the variable ω are stochastically independent, strictly speaking*

$$\omega_{n_1}(E_1),\ \omega_{n_2}(E_2),\ \ldots,\ \omega_{n_k}(E_k)$$

are stochastically independent, whenever for $0 \leqslant i < j \leqslant k$ we have $E_iE_j = 0$ or $n_i \neq n_j$.

This theorem, together with Lemma and Theorem 1, determines the distribution of ω; namely, we obtain the following formula for the logarithm of the characteristic function of $\omega(E)$:

$$\log \int_{\Omega} e^{ia\omega(E)} dP(\omega) = \sum_n (e^{iav_n} - 1) m_n(E),$$

where m_n are finite σ-measures in B vanishing for one point sets (what is a consequence of the assumption (S)).

THEOREM 3. *We have*

$$(*) \qquad \sum_n \frac{|v_n|}{1+|v_n|} m_n(X) < \infty,$$

and conversely, every sequence $\{m_n\}$ of σ-measures satisfying $(*)$ is induced by a process Ω which fulfils (A_2).

4. In this section we assume that

(A_3) Every $\omega \in \Omega$ is purely atomic.

For every $A \subset X$ let us denote by A^* the Cartesian product of A and the real line Y. For every $\omega \in \Omega$ and $E \subset X^*$ we denote by $\omega^*(E)$ the number of points $(x, \omega(x)) \in E$, where x is an atom of ω. In this way we associate with each $\omega \in \Omega$ another σ-measure ω^*. Obviously

$$\omega(A) = \int_{A^*} y \, d\omega^*.$$

The measures ω^* may assume the value $+\infty$, but, by treating bounded intervals of Y and a suitable summation, we may reduce the problem to the case of finite ω^*. Then, ω^* is a purely atomic σ-measure and we have $\omega^*((p_0)) = 1$ for every atom p_0. Thus we may apply Theorem 1. Let us put

$$m(E) = \int_{\Omega} \omega^*(E) \, dP(\omega),$$

where E is any Borel subset of X.

THEOREM 4. *The set function $m(E)$ is a σ-finite non-atomic measure defined in Borel subsets of X^*.*

The measure m determines the probability P, namely

$$\log \int_{\Omega} e^{ia\omega(E)} dP(\omega) = \int_{E^*} (e^{iay} - 1) \, dm.$$

THEOREM 5. *We have*

$$(**) \qquad \int_{X^*} \frac{|y|}{1+|y|} \, dm < \infty,$$

and conversely, every measure m satisfying $(**)$ is induced by a process which fulfils (A_3).

5. The preceding case is actually the most general. Namely, we have for all processes (in the sense of section 1) the following

THEOREM 6. *For every process Ω there is an $\omega_0 \in \Omega$ such that $\omega - \omega_0$ is purely atomic for almost all $\omega \in \Omega$.*

6. Let Ω be the classical homogeneous Poisson process. For every Lebesgue measurable function $f(t)$ of a real variable, let us put

$$F(\omega) = \sum f(t_i),$$

where t_i are all discontinuity points of $\omega \in \Omega$. Then *the series is absolutely convergent for almost all ω if and only if*

$$({}^{**}_{\ *}) \qquad \int_0^\infty \frac{|f(t)|\,dt}{1+|f(t)|} < \infty,$$

and, for every pair f, g of functions satisfying $({}^{**}_{\ *})$, F and G are independent if and only if $f(t)\cdot g(t) = 0$ almost everywhere (and analogically for sequences $f_1, f_2, \ldots$ of functions).

This theorem is used in the proofs of Theorems 3 and 5 and in some applications.

The process of telephone conversations may be treated as a process satisfying (A_3). Namely, we may treat X as a fixed time interval and we denote by $\omega(I)$ the sum of durations of all conversations started in I.

This treatment permits to obtain easily the formulae of A. Rényi for the probability distributions of numbers of conversations going on at a fixed time.

E. Marczewski, *Remark on Cartesian products of topological spaces.*

For every class $\boldsymbol{K}$ of topological spaces, we denote by $\boldsymbol{K}_\sigma$ the class of all spaces X such that

$$(*) \qquad X = Y_1 + Y_2 + \ldots, \quad \text{where} \quad Y_j \in \boldsymbol{K},$$

and by $\boldsymbol{K}_\tau$ the class of all spaces of the form (*) such that $Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots$ Next let us consider sequences of spaces X_j such that

$$(**) \qquad \begin{array}{lll} X_j \in \boldsymbol{K}_\sigma \text{ [or } \boldsymbol{K}_\tau\text{]} & \text{for} & 1 \leqslant j \leqslant J, \\ X_j \in \boldsymbol{K} & \text{for} & j > J. \end{array}$$

The following proposition is obvious:

I. *For every class* $\boldsymbol{K}$ *invariant under denumerable Cartesian multiplication, if* (**), *then* $X_1 \times X_2 \times \ldots \in \boldsymbol{K}_\sigma$ [*or* $\boldsymbol{K}_\tau$].

An easy application of the diagonal method gives:

II. *For every class* $\boldsymbol{K}$ *invariant under continuous transformations, if* $X_1 \times X_2 \times \ldots \in \boldsymbol{K}_\sigma$ [*or* $\boldsymbol{K}_\tau$], *then there is a positive integer* J *such that* (**).

The statements I and II imply directly:

III. *For every class* $\boldsymbol{K}$ *invariant under denumerable Cartesian multiplication and continuous transformations, we have* $X_1 \times X_2 \times \ldots \in \boldsymbol{K}_\sigma$ [*or* $\boldsymbol{K}_\tau$] *if and only if there is a positive integer* J *such that* (**).

Examples of classes satisfying the hypotheses of III are: the class of all compact spaces, the class of all continua, locally connected continua, arcwise connected continua, etc.

27. VI. 1952. A. Trembecki (Cracovie), *Les méthodes de la recherche des gisements au point de vue de l'analyse classique et statistique.*

26. IX. 1952. E. Marczewski, *200 séances de la Section de Wrocław de la Société Polonaise de Mathématique.*

S. Drobot et M. Warmus, *Dimensional Analysis in sampling inspection of merchandise* (voir Rozprawy Matematyczne V, Warszawa 1954).

27. IX. 1952. A. Rényi (Budapest), *The order statistics considered as elements of Markoff chains.*

H. Steinhaus, *Probabilité, vraisemblance, possibilité* (voir Zastosowania Matematyki 1 (1953), p. 149-172, en polonais).

10. X. 1952. H. Steinhaus, *Sur le principe de dualité dans le contrôle statistique de la qualité* (à paraître en polonais dans Zastosowania Matematyki).

J. Mikusiński, *Sur un type de conditions mixtes pour les équations aux dérivées partielles* (voir Studia Mathematica 13 (1953), p. 277-286).

17 et 18. X. 1952. V. Knichal (Prague), *Sur quelques problèmes mathématiques de l'électrotechnique* (voir aussi séance du 13. X. 1952 de la Section de Poznań, p. 182).

— *Sur les travaux du Groupe Technique de l'Institut Mathématique Tchécoslovaque.*

— *Sur le théorème de Stokes.*

24. X. 1952. P. Turán (Budapest), *On a new analytical method and its application* (voir ce fascicule, p. 91-112).

J. Mikusiński. *Sur l'égalité* $\xi(n) = a\pi^n$ *pour* n *impairs et* a *rationnels.*

J. Mycielski, *Sur la rectification des réseaux curvilignes.*

27. X. 1952. P. Turán (Budapest), *On the theory of graphs* (voir Colloquium Mathematicum, ce volume, p. 19-30).

J. Mikusiński, *Sur les suites finies de moments et la généralisation du théorème de Sturm.*

J. Mycielski, *Sur le coloriage des graphes* (voir ce fascicule, p. 161-162).

28. X. 1952. S. Drobot, *Sur les travaux mathématiques de Jan Śniadecki* (à paraître dans Wiadomości Matematyczne 1, en polonais).

31. X. 1952. J. Łopuszański, *Relativisierung der stochastischen Prozesse* (à paraître dans Acta Physica Polonica).

11. XI. 1952. W. Wolibner, *Une rectification.*

J. Mikusiński, *Un théorème sur les suites de moments.*

On sait que, sous certaines hypothèses, la suite infinie d'inégalités

$$\Big|\int_1^b x^{\beta_n} f(x)\,dx\Big| \overset{*}{<} M$$

entraîne l'identité $f(x) = 0$. Or, si une telle suite d'inégalités est finie, elle implique certaine restriction pour $f(x)$ dont on peut déduire la même identité par le passage à la limite.

14. XI. 1952. M. Stark (Varsovie), *Le plan des éditions mathématiques.*

20. XI. 1952 (séance commune avec la Section de Wrocław de la Société Polonaise de Physique). R. S. Ingarden, C. Jankiewicz et H. Wojewoda, *Une cosmologie dynamique à cinq dimensions* (cf. les séances du 6 et 10 juin 1952 et la publication qui y est citée).

21. XI. 1952. S. Łojasiewicz (Cracovie), *Sur un effet frontière dans les équations différentielles ordinaires.*

H. Steinhaus, *Coupures de régions spatiales par des trièdres* (voir K. Kuratowski et H. Steinhaus, *Une application géométrique du* *théorème de Brouwer sur les points invariants*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences 1, Classe III (1953), p. 83-86).

25. XI. 1952. F. Szczotka, *Sur la classification des variétés du froment.*

28. XI. 1952. S. Hartman, *Travaux de Khintchine sur les fondements mathématiques de la mécanique statistique.*

K. Urbanik, *Travaux de Khintchine et autres sur l'application de la théorie des processus stochastiques à l'électrotechnique.*

S. Zubrzycki, *Travaux de Khintchine sur les classes d'événements équivalents.*

J. Reichbach, *On the completeness of the lower functional calculus* (à paraître dans Studia Logica).

J Mikusiński, *Sur les définitions de* $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ *et* $\bar{z}$ *par* $|z|$.

9. XII. 1952. J. Łoś (Toruń), *On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems* (voir Colloquium Mathematicum, ce volume, p. 58-62).

15. XII. 1952. J. Novák (Prague), *Sur les modes de convergence des événements aléatoires.*

— *Sur quelques problèmes de Lusin concernant les ensembles de nombres naturels.*

19. XII. 1952. S. Zubrzycki, *Sur la fonction distributrice du quotient chez Kendall.*

J. Perkal, *Sur les méthodes de comparer les échantillons.*

Deux suites comprenant le même nombre des valeurs d'un caractère à distribution normale (sur le plan x,y)

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \text{et} \quad y_1, y_2, \ldots, y_n$$

(où $n>15$) peuvent être comparées par la méthode de Student [18]) ou par celle de mise en couples.

La méthode de Student consiste à comparer la différence des moyennes $\bar{x}-\bar{y}$ avec la dispersion

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n} (y_i-\bar{y})^2}\,.$$

Le quotient $t=(\bar{x}-\bar{y})/s_1$ a pour $n>15$ une distribution à peu-près normale $N(0,1)$.

[18]) Voir par exemple В. И. Романовский, *Применения математической статистики в опытном деле*, Москва 1947, p. 88 et R. A. Fisher, *Statistical Methods for Research Workers*, London 1948, p. 122.

La méthode des couples [19]) consiste à comparer la moyenne des différences $\overline{x-y}$ avec sa dispersion

$$s_2 = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [(x_i-y_i)-(\overline{x-y})]^2}\,.$$

Le quotient $u=(\overline{x-y})/s_2$ a aussi une distribution normale $N(0,1)$.

Les numérateurs des deux quotients sont égaux, car $\overline{x-y}=\bar{x}-\bar{y}$, mais les dénominateurs, en général, diffèrent, car $s_2^2=s_1^2-(C_{x,y}/n-1)$, où $C_{x,y}$ désigne la covariance des variables x et y. En conséquence, la vraisemblance de l'hypothèse nulle, c'est-à-dire que les nombres x_i et y_i peuvent être des échantillons tirés au hasard d'un ensemble de nombres, dépend de la méthode employée.

La méthode proposée par l'auteur est d'employer l'index

$$w = \begin{cases} \min(u,t) & \text{lorsque} \quad \min(u,t) < 0,2\,, \\ \max(u,t) & \text{lorsque} \quad \min(u,t) \geqslant 0,2 \end{cases}$$

et de le traiter comme si sa distribution était normale $N(0,1)$. Cette méthode se prononce, plus souvent que chacune des deux précédentes, pour ou contre l'hypothèse nulle avec une vraisemblance donnée.

Pratiquement, on rencontre le plus souvent le cas dans lequel les nombres x_i et y_i sont en corrélation positive. On a alors $C_{x,y}>0$ et $s_1<s_2$, donc $t<u$. Si $t\geqslant 0,2$, on a $w=u$, de sorte que la méthode proposée coïncide dans ce cas avec celle des couples.

On appliquait jusqu'à présent, surtout en Pologne, la méthode des couples lorsque la corrélation entre x_i et y_i avait des causes biologiques, comme c'est le cas des couples de jumeaux issus d'un même oeuf, des couples de graines voisines dans un fruit employé pour les expériences etc. Cependant, on peut appliquer cette méthode — et on le devrait — beaucoup plus souvent, à savoir toutes les fois que la corrélation entre x_i et y_i résulte positive et $t\geqslant 0,2$.

J. Perkal, *Sur les systèmes d'inégalités linéaires.*

Deux dendrites [20]) relatives aux deux systèmes différents de caractères d'un même objet résultent semblables (au sens biologique) lorsque les valeurs de ces caractères sont liées par un système d'inégalités linéaires. La solution générale d'un tel système d'inégalités [21]) exige

[19]) Op. cit. Романовский, p. 126, et Fisher, p. 92.

[20]) Voir le travail collectif cité au renvoi [18]), p. 283.

[21]) С. И. Черников, *Системы линейных неравенств*, Успехи Математических Наук 8 (1954), p. 7.

d'habitude celle d'un nombre considérable de systèmes d'équations linéaires, ce qui est pratiquement fort fastidieux. La méthode suivante permet parfois de trouver d'une autre manière la solution d'un système d'inégalités linéaires homogènes

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}x_i > 0 \quad \text{où} \quad k=1,2,\ldots,K.$$

Appelons le *pôle* de k-ième inégalité le point aux coordonnées

$$r_k a_{1,k},\ r_k a_{2,k},\ \ldots,\ r_k a_{n,k} \quad \text{où} \quad r_k = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}^2\Big)^{-1/2}$$

et le *verseur* du point $P=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ le point

$$P'(rx_1,\ rx_2,\ldots,\ rx_n) \quad \text{où} \quad r=\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{-1/2}.$$

THÉORÈME. *Pour qu'un point P satisfasse au système d'inégalités linéaires homogènes, il faut et il suffit que son verseur P' soit à la distance $\sqrt{2}$ au plus du pôle de chacune d'elles.*

Le système en question peut se réduire, bien entendu, à une seule égalité.

Ce théorème permet de chercher la solution du système de telles inégalités sur la table de Czekanowski de leurs pôles et des verseurs de points.

H. Steinhaus, *Une remarque sur la division des régions planes par la croix.*

Théorème d'après lequel toute région plane peut être coupée par la croix en 4 parties d'aire égale, tandis qu'aucune autre figure composée de 4 demi-droites ne jouit de cette propriété.

2. I. 1953. B. Knaster et M. Reichbach, *Un lemme sur les F_σ* (voir Fundamenta Mathematicae 40 (1953), p. 172-179).

K. Urbanik, *Solution du problème posé par P. Turán* [22].

Deux ensembles finis de points $A=(a_1,\ldots,a_m)$ et $B=(b_1,\ldots,b_m)$ situés sur le plan sont supposés unis par des arcs (images homéomorphes du segment rectiligne) de manière que tout a_i où $i=1,\ldots,m$ est uni à tout b_j où $j=1,\ldots,m$ par un arc a_ib_j et que tout point qui n'est pas

[22]) Présentée le 12 novembre 1952 à la séance du séminaire topologique à Wrocław de l'Institut Mathématique de l'Etat. Le problème a été résolu indépendamment et presque simultanément à Varsovie par K. Zarankiewicz (voir son travail *On a problem of P. Turán concerning graphs*, Fundamenta Mathematicae 41 (1954), p. 137-145).

dans $A+B$ se trouve au plus sur deux arcs. Alors le minimum du nombre total des points d'intersection de ces arcs est égal à

$$\left[\frac{m}{2}\right]\left(m-\left[\frac{m}{2}\right]-1\right)\cdot\left[\frac{n}{2}\right]\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]-1\right),$$

où [ ] désigne l'entier.

9. I. 1953. J. Łukaszewicz et H. Steinhaus, *On determining the "centre of copper" of a telephone network* (voir Zastosowania Matematyki 1, p. 299-307, en polonais avec un résumé en anglais).

H. Steinhaus, *Un problème sur les points singuliers de triangles.*

Soit, par définition, P un *point singulier* du triangle ABC lorsqu'il est fonction continue de ses sommets, invariante par rapport au mouvement rigide, réflexion et homographie. Si l'on postule en outre l'invariance par rapport aux transformations affines, P est nécessairement le barycentre des points A,B,C.

Désignons par 1, 2 et 3 les sommets A,B et C respectivement et par x_1,x_2,x_3 les quotients des longueurs des côtés opposés à ces sommets par le périmètre. Une fonction quelconque $g(x)$ étant donnée, considérons ses valeurs $g(x_i)$ comme des masses placées aux sommets $i=1,2,3$ et définissons P comme le centre de ces masses. Pour $g(x)=\text{const.}$, P est le barycentre, pour $g(x)=x$, P est le centre du cercle inscrit etc.; mais la même voie conduit aussi à des points singuliers non-triviaux.

Le problème s'impose:

P 143. Existe-t-il un point singulier $P=f(A,B,C)$, différent du barycentre et cependant tel que les conditions

$$A'=f(P,B,C,) \qquad B'=f(A,P,C) \qquad \text{et} \qquad C'=f(A,B,P)$$

entraînent toujours $P=f(A',B',C')$?

16. I. 1953. E. Marczewski, *Remarks on the convergence of measurable sets and measurable functions* (voir ce fascicule, p. 118-124).

J. Mycielski, *Sur les ensembles avec des singularités d'isométrie* (à paraître dans Fundamenta Mathematicae).

23. I. 1953 (séance commune avec la Section de Wrocław de la Société Polonaise de Physique). W. Ślebodziński, *Sur la géométrisation des équations de Maxwell.*

On sait que les équations de Maxwell peuvent être condensées dans la forme suivante:

$$d\Phi=0, \qquad d\Psi=\Omega,$$

où Φ et Ψ sont des formes quadratiques différentielles extérieures et Ω est une forme du troisième degré à quatre variables. Φ peut être exprimée de la manière suivante:

$$\Phi=[\omega^1\omega^3]+[\omega^2\omega^4], \tag{1}$$

ω^h étant quatre formes différentielles linéaires et, en général, indépendantes; Ψ se laisse aussi exprimer au moyen des formes ω^h. Par des substitutions du groupe symplectique appliquées aux formes ω^h, on peut réduire Ψ à la forme

$$\Psi=K_1[\omega^1\omega^3]+K_2[\omega^2\omega^4],$$

où les coefficients K_1 et K_2 sont des invariants différentiels du système des équations de Maxwell.

En se servant de ces invariants et des autres, qu'il est facile de former, on peut déterminer les formes ω^h de manière qu'elles soient invariablement liées au système, ce qui permet de construire une géométrie à connexion affine sans torsion.

30. I. 1953. H. Steinhaus, *Sur le battage des nombres* (voir H. Steinhaus, *Table of shuffled four-digit numbers*, Rozprawy Matematyczne VI, Warszawa 1954).

Table des nombres de 0000 jusqu'à 9999, n'en comprenant chacun qu'une fois et composée par un procédé de les mélanger sans faire intervenir le hasard.

— *Quelques applications géométriques du théorème de Brouwer sur les points invariants.*

Outre le théorème, généralisé par K. Kuratowski, sur les coupures faites par le triple de rayons sur le plan [23]), les théorèmes suivants ont été démontrés:

1. Par tout point P d'un corps convexe S passe une coupure plane C ayant dans P son centre de gravité.

2. Il existe une coupure plane C dont le centre de gravité coïncide avec celui de sa frontière.

3. Les segments rectilignes unissant à travers S les couples de ses points antipodes remplissent S tout entier.

L'*antipode* d'un point P, supposé situé à la surface F de S est entendu ici comme le point $f(P)$ de F, la fonction f étant biunivoque, continue et telle que $f(P)\neq P$ mais $f(f(P))=P$ pour tout P de F.

[23]) Voir K. Kuratowski et H. Steinhaus, *Une application géométrique d'un théorème de Brouwer sur les points invariants*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 1 (1953), p. 83-86.

20. II. 1953. J. Oderfeld et S. Zubrzycki, *Sur le contrôle des compteurs d'eau* (voir Zastosowania Matematyki 1 (1953), p. 125-137, en polonais avec un résumé en anglais).

H. Steinhaus, *Sur la sommation par la méthode de Poisson.*

W. Wolibner, *Une expression par déterminants d'une condition nécessaire et suffisante pour que deux nombres soient premiers entre eux.*

24. II. 1953. W. Ślebodziński, *L'oeuvre scientifique de K. Żorawski* (à paraître dans Colloquium Mathematicum).

B. Knaster, *Un problème sur la piste des faces d'un tétraèdre roulant sur le plan.*

27. II. 1953. S. Zubrzycki, *Inégalités entre les moments des variables aléatoires équivalentes* (à paraître dans Studia Mathematica).

E. Piegat, *Sur les classes semblables d'ensembles.*

J. Mikusiński, *Sur la piste du tétraèdre roulant sur le plan.*

Le tétraèdre peut rouler sur le plan de manière à le couvrir tout entier par les empreintes de ses faces et sans doubler aucune empreinte. Il n'y a qu'un chemin possible entre deux empreintes et qui soit celui d'un tétraèdre roulant.

J. Mycielski, *Un problème sur la répartition des couples de nombres premiers entre eux.*

Appelons *carré* l'ensemble des points (x_i, y_j) aux coordonnées entières positives, tels que

$$x_i=x_{i-1}+1 \quad \text{et} \quad y_j=y_{j-1}+1 \tag{*}$$

où $i=2,3,\ldots,n$ et $j=2,3,\ldots,n$. Existe-t-il pour tout $n>2$ un carré dont aucun point n'a les coordonnées premières entre elles?

6. III. 1953. M. Warmus, *Solution du problème de J. Mycielski.*

THÉORÈME. *Il existe pour tout entier positif n une infinité de carrés dont chaque point a pour coordonnées les nombres non-premiers entre eux.*

Posons, en effet,

$$x_i=a_i\prod_{j=1}^{n}p_{i,j} \quad \text{et} \quad y_j=b_j\prod_{i=1}^{n}p_{i,j} \tag{1}$$

où $p_{i,j}$ sont des nombres premiers arbitraires, $i=1,2,\ldots,n$ et $j=1,2,\ldots,n$. Chacun des couples x_i, y_j ainsi définis a un diviseur commun $p_{i,j}$; il ne reste donc qu'à établir l'existence d'entiers positifs a_i et b_j satisfaisant aux conditions (*) de Mycielski.

Or, les nombres

$$q_k=\prod_{j=1}^{n}p_{k,j} \quad \text{et} \quad q_{k+1}=\prod_{j=1}^{n}p_{k+1,j}$$

étant évidemment premiers entre eux pour $k=1,2,\dots,n-1$, il existe des entiers positifs c_{k+1} et d_k tels que

$$c_{k+1}q_{k+1}-d_k q_k=1. \tag{2}$$

La première des conditions (*) sera donc satisfaite lorsqu'on aura trouvé des c_k et d_k assujettis à (2) et tels que

$$c_k=d_k \quad \text{pour} \quad k=2,3,\dots,n-1, \tag{3}$$

car il suffira alors de poser dans (1) $a_i=c_i=d_i$.

Procédons par induction. Admettons que

$$c_2'q_2-d_1'q_1=1 \quad \text{et} \quad c_3'q_3-d_2'q_2=1. \tag{4}$$

Les nombres q_1 et q_3 étant premiers entre eux, il existe des entiers positifs r_1 et r_2 tels que $r_1q_1-r_2q_3=d_2'-c_2'$, c'est-à-dire tels que l'on ait $c_2'+r_1q_1=d_2'+r_2q_3$. En posant donc $c_2=c_2'+r_1q_1$, $d_1=d_1'+r_1q_2$, $c_3=c_3'+r_2q_2$ et $d_2=d_2'+r_2q_3$, la condition (3) se trouve satisfaite pour $k=2$ en vertu de (4).

Admettons à présent la condition (3) pour $k=2,3,\dots,m<n-1$; il s'agit de choisir les nombres c_k et d_k de façon qu'elle soit satisfaite pour $k=2,3,\dots,m+1$. Posons

$$c_k'=d_k' \quad \text{pour} \quad k=2,3,\dots,m,$$

$$c_{k+1}'q_{k+1}-d_k'q_k=1 \quad \text{pour} \quad k=1,2,\dots,m+1$$

et choisissons deux entiers positifs s_1 et s_2 de façon à avoir

$$c_{m+1}=c_{m+1}'+s_1\prod_{i=1}^{m}q_i=d_{m+1}'+s_2q_{m+2}=d_{m+1},$$

c'est-à-dire

$$s_1\prod_{i=1}^{m}q_i-s_2q_{m+2}=d_{m+1}'-c_{m+1}',$$

ce qui est toujours possible, les nombres $\prod_{i=1}^{m}q_i$ et q_{m+2} étant premiers entre eux. Pour que la condition (3) se trouve satisfaite pour $k=2,3,\dots,m$, il suffit donc de poser

$$c_{k+1}=c_{k+1}'+\frac{s_1}{q_{k+1}}\prod_{i=1}^{m+1}q_i, \qquad d_k=d_k'+\frac{s_1}{q_k}\prod_{i=1}^{m+1}q_i \qquad \text{pour} \quad k=1,2,\dots,m,$$

$$c_{m+2}=c_{m+2}'+s_2q_{m+1} \qquad \text{et} \qquad d_{m+1}=d_{m+1}'+s_2q_{m+2}.$$

La démonstration de l'existence des b_j satisfaisant à la seconde des conditions (*) est tout à fait analogue.

Pour $n=4$, on peut donner l'exemple suivant:

$$x_1=10018583223=10468739\cdot 3\cdot 11\cdot 29,$$
$$x_2=10018583224=12430004\cdot 2\cdot 13\cdot 31,$$
$$x_3=10018583225=732085\cdot 5\cdot 7\cdot 17\cdot 23,$$
$$x_4=10018583226=87882309\cdot 2\cdot 3\cdot 19,$$

$$y_1=5210458824=37756948\cdot 2\cdot 3\cdot 23,$$
$$y_2=5210458825=383545\cdot 5\cdot 11\cdot 13\cdot 19,$$
$$y_3=5210458826=5284441\cdot 2\cdot 17\cdot 29,$$
$$y_4=5210458827=8003777\cdot 3\cdot 7\cdot 31.$$

M. Reichbach, *Généralisation d'une propriété de l'ensemble de Cantor démontrée par C. Ryll-Nardzewski* (voir B. Knaster et M. Reichbach, *Notion d'homogénéité et prolongements des homéomorphies*, Fundamenta Mathematicae 40 (1953), p. 180-193, en particulier p. 188, corollaire 2).

H. Steinhaus, *Sur les rotations du tétraèdre autour des arêtes.*

Un problème de B. Knaster[24]) sur le tétraèdre régulier roulant sur le plan (le roulement étant ici entendu comme renversement autour des arêtes) a attiré l'attention sur le fait que le parquetage du plan que l'on peut obtenir de cette manière est univoque dans ce sens qu'à tout point du plan vient correspondre à la surface du tétraèdre un seul point dont il peut être couvert (cf. ce Compte rendu, séance du 24. II. 1953). Ce roulement définit donc une transformation uni-plurivoque du plan en surface du tétraèdre. Cette transformation est localement une congruence par isométrie. L'image du plan couvre la surface du tétraèdre une infinité de fois et y engendre une surface de Riemann dont la transformation en ce plan est déjà biunivoque. Ce modèle ne diffère pas topologiquement, à savoir par l'union de ses feuillets, de la surface riemannienne qui correspond à la fonction elliptique

$$w=w(z) \quad \text{où} \quad z=\int_0^w\frac{dp}{\sqrt{4p^3-g_1p-g_2}}.$$

Ici, z est la variable complexe parcourant le plan, tandis que w est une variable parcourant la sphère et obtenue par la projection stéréographique du plan parcouru par w d'une manière ordinaire. La surface multiple, engendrée sur la sphère par cette transformation du plan z en elle, a la même structure que l'enroulement considéré du plan sur

[24]) Cf. *Zadania konkursowe*, Matematyka 3 (25), 1953, p. 54, nº 322 (en polonais).

le tétraèdre. Le rôle des arêtes du tétraèdre est joué maintenant par 6 arcs de la sphère. Ils peuvent être définis par la projection centrale des arêtes du tétraèdre inscrit, pourvu que g_1 et g_2 soient choisis convenablement.

13. III. 1953. J. Mikusiński, *Sur la méthode d'approximation de Newton* (voir Annales Polonici Mathematici 1 (1954), p. 184-194):

A. Zięba, *Une application du théorème sur le point invariant.*

20. III. 1953. B. Knaster et K. Urbanik, *Sur les espaces complets de dimension* 0 (voir Fundamenta Mathematicae 40 (1953), p. 194-200).

H. Steinhaus, *Dispersiomètre* (voir Zastosowania Matematyki 1 (1953), p. 321-329, en polonais avec un résumé en anglais).

Description et démonstration du modèle d'un instrument fort simple, imaginé par l'auteur pour calculer rapidement les valeurs de l'expression $c_n\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$ qui est d'importance en statistique pratique.

24. III. 1953. J. H. C. Whitehead (Oxford), *The m-fields on S_n.*

10. IV. 1953. J. Łoś (Toruń), *Sur les suites croissantes de groupes ordonnés.*

E. Marczewski, *Sur la propriété d'Urysohn de la convergence dans les σ-algèbres de Boole.*

E. Marczewski et H. Steinhaus, *Remarques sur la notion de distance entre régions botaniques* (en préparation pour Colloquium Mathematicum).

J. Mycielski, *Sur les nombres qui ne sont pas des puissances.*

17. IV. 1953. A. Götz, S. Hartman et H. Steinhaus, *Sur la mesure invariante dans un espace ayant un groupe transitif de transformations* (en préparation pour Wiadomości Matematyczne).

E. Marczewski, *Sur l'approximation par ensembles développables* (en préparation pour Fundamenta Mathematicae).

24. IV. 1953. M. Warmus, *Un nomogramme à grande exactitude et une méthode d'approximation modifiée.*

I. Soit

$$F(x,y,z)\equiv\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & 1\\ f_2(y) & g_2(y) & 1\\ f_3(z) & g_3(z) & 1\end{vmatrix}=0 \tag{1}$$

une fonction définie dans le domaine

$$a_1\leqslant x\leqslant a_2,\qquad b_1\leqslant y\leqslant b_2,\qquad c_1\leqslant z\leqslant c_2.$$

On sait qu'elle est calculable par un nomogramme plan à 3 échelles dont les équations paramétriques en coordonnées $O\xi\eta$ sont

$$\xi=f_1(x),\qquad \xi=f_2(y),\qquad \xi=f_3(z),$$
$$\eta=g_1(x)\qquad \eta=g_2(y),\qquad \eta=g_3(z).$$

Les valeurs des variables x,y étant données, on trouve sur le nomogramme la valeur approchée de z, d'habitude avec 1, 2 ou 3 décimales exactes. Pour augmenter l'exactitude, on peut partager le domaine

$$a_1\leqslant x\leqslant a_2,\qquad b_1\leqslant y\leqslant b_2 \tag{2}$$

en $m\cdot n$ domaines plus petits

$$a_i'\leqslant x\leqslant a_{i+1}'\quad \text{où}\quad i=1,2,\ldots,m-1,\quad a_1'=a_1\quad\text{et}\quad a_m'=a_2,$$
$$b_j'\leqslant y\leqslant b_{j+1}'\quad \text{où}\quad j=1,2,\ldots,n-1,\quad b_1'=b_1\quad\text{et}\quad b_n'=b_2$$

et faire un nomogramme pour chacun d'eux.

C'est ainsi que pour avoir la valeur approchée de z avec 5 décimales exactes, il faudrait faire 10000 nomogrammes.

Cependant, si la fonction (1) est de la forme

$$F(x,y,z)\equiv f(x)+g(y)+h(x)=0 \tag{3}$$

et seulement dans ce cas, x et y parcourant leurs domaines (2), on parvient à un nomogramme très exact en admettant pour les échelles de x, y et z les équations

$$\begin{aligned} &\xi=-p-\alpha u, && \eta=\mu_x[f(x)-A]-\alpha n_x,\\ &\xi=q-\beta v, && \eta=\mu_y[g(y)-B]-\beta n_y,\\ &\xi=-\gamma w, && \eta=\mu_z[-h(z)-A-B]-\gamma n_z \end{aligned} \tag{4}$$

où

1° $A=\min\limits_{a_1\leqslant x\leqslant a_2} f(x)$ et $B=\min\limits_{b_1\leqslant y\leqslant b_2} g(y)$,

2° p, q, u, v, w, μ_x, μ_y, μ_z, n_x, n_y et n_z sont des nombres positifs quelconques satisfaisant aux conditions

$$\frac{1}{\mu_z}=\frac{1}{\mu_x}+\frac{1}{\mu_y},\qquad \frac{p}{q}=\frac{\mu_x}{\mu_y},\qquad u:v:w=n_x:n_y:\frac{n_z}{2}=\mu_x:\mu_y:\mu_z,$$

3° α,β et γ sont des entiers pour lesquels $0\leqslant\eta\leqslant n_x$ dans la première, $0\leqslant\eta\leqslant n_y$ dans la deuxième et $0\leqslant\eta\leqslant n_z$ dans la troisième des équations (3). On a deux valeurs possibles pour γ.

Ce nomogramme, proposé par l'auteur pour les fonctions (3), a l'avantage de n'exiger pour z que $r+s-1$ échelles au lieu de rs lorsqu'il y a r échelles pour x et s pour y.

II. Une équation de la forme $f(x)=0$ étant donnée, où $f(x)$ est une fonction dérivable dans l'intervalle $a\leqslant x\leqslant b$, on peut en trouver notoirement les solutions approchées par la méthode de Newton par exemple. La modification proposée par l'auteur est la suivante: étant donnée une valeur approchée x_0 de la racine cherchée, on n'emploie la méthode newtonienne qu'une seule fois, à savoir pour trouver l'autre valeur approchée $x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$, et puis on applique *regula falsi*

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_nf(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})} \qquad \text{où } n=1,2,\ldots$$

Quand la dérivée de $f(x)$ est difficile à calculer, la modification proposée facilite le calcul.

27.IV.1953. S. Trzetrzewiński (Gdańsk), *La déviation totale dans le mesurage électrique.*

28.IV.1953. G. Hajós (Budapest), *L'aspect géométrique du problème de factorisation des groupes.*

30.IV.1953. G. Hajós (Budapest), *Sur le théorème de Gauss-Bonnet.*

8.V.1953. J. Kurzweil (Prague), *On a problem of H. Steinhaus concerning diophantic approximations.*

If x is a real number, we denote by $[x]$ the point in the plane with the coordinates $\frac{1}{2\pi}\cos x$, $\frac{1}{2\pi}\sin x$. Let C be the set of all points $[x]$.

If g and h are real numbers, and $g\leqslant h$, then by the interval $I[g,h]$ we understand the set of points $[x]$, where x fulfils the inequality $g\leqslant x\leqslant h$. In the set C the Lebesgue measure is defined in an obvious way.

We say that a number x *has the property* (A) if for every sequence of positive numbers $\{b_n\}$, $n=1,2,\ldots$ fulfilling the conditions

$$(1)\qquad b_1\geqslant b_2\geqslant\ldots, \qquad\qquad (2)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\infty,$$

almost every point $[y]$ belongs to infinitely many intervals

$$I[nx-b_n, nx+b_n], \qquad n=1,2,\ldots$$

Apparently no rational number has the property (A). H. Steinhaus put the question whether every irrational number has the property (A).

This question may be solved by means of diophantine approximations. Let $\varphi(q)$ be a function with positive values defined for natural q. We say that a number x *admits the approximation* $\varphi(q)$ if there is an infinite sequence of pairs of integers (p_n, q_n), where $q_{n+1}>q_n>0$, such that the inequality

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\varphi(q_n)$$

is satisfied. It is well known that every irrational number x admits the approximation $1/q^2$. Now we state:

THEOREM. *An irrational number x has not the property (A) if and only if there is such a function $\varphi(q)$ that $q^2\varphi(q)\to 0$ with $q\to\infty$ (q natural) and that x admits the approximation $\varphi(q)$.*

As an easy consequence of this theorem we obtain that the set of numbers x having the property (A) is not empty and has the Lebesgue measure 0. The theorem may be extended to the many-dimensional case.

Let us now fix a sequence $\{b_n\}$ that fulfils both the conditions (1) and (2). We say that a number x *has the property* (B) if almost every point y belongs to infinitely many intervals $I[nx-b_n, nx+b_n]$.

It can be proved that almost every number x has the property (B).

12.V.1953. F. Zítek (Prague), *On some estimators of standard deviation.*

15.V.1953. A. Zięba, *Problèmes de variation dans la théorie des jeux continus.*

K. Urbanik, *Sur la structure du corps des opérateurs* (voir Studia Mathematica 14 (1954), à paraître).

J. Mycielski, *Sur l'existence des puissances séparées par les non-puissances.*

19.V.1953. K. Urbanik, *Propriétés limites des processus de Markoff homogènes* (voir Studia Mathematica 15, à paraître).

22.V.1953. J. Rzewuski, *Differential Conservation Laws in Non-local Field Theories* (voir Il nuovo Cimento 10 (1953), p. 784-802).

26.V.1953. S. Gładysz, *Sur un problème de H. Steinhaus* (à paraître dans Studia Mathematica).

29.V.1953. Z. Charzyński (Łódź), *Sur les fonctions univalentes.*

L. Włodarski (Łódź), *Sur la formule d'Efros.*

A. Zięba, *Sur la poursuite en mer avec îles.*

2. VI. 1953. S. Gładysz, *Quelques conséquences du théorème ergodique aléatoire* (à paraître dans Studia Mathematica).

J. Perkal, *Sur la partie commune des surfaces sphériques.*

THÉORÈME. *La partie commune de n surfaces sphériques à $n-1$ dimensions situées dans l'espace euclidien à n dimensions est soit vide, soit un point, soit une surface sphérique à $n-m$ dimensions, m étant le nombre de celles du plus petit ensemble convexe contenant les centres des n sphères en question.*

La démonstration procède par l'induction.

COROLLAIRE. *Si les centres de ces sphères sont linéairement indépendants, la partie commune se réduit tout au plus à deux points.*

9. VI. 1953. J. Słupecki, *Sur une méthode de noter les démonstrations en symboles logiques.*

12. VI. 1953. W. Sierpiński (Varsovie), *Sur les nombres de Mersenne.*

— *Sur les fonctions ayant la propriété de Darboux.*

B. Knaster, J. Mioduszewski et K. Urbanik, *Points-limites et points de continuité* (voir ce fascicule, p. 164-169).

16. VI. 1953. L. Borkowski, *Un système de logique.*

19. VI. 1953. K. Kuratowski (Varsovie), *Fonctions rationnelles qui sont homotopes à des fonctions biunivoques sur certains sous-ensembles du plan* (voir Fundamenta Mathematicae 41 (1954), p. 107-121).

S. Gładysz et A. Rybarski, *Sur le modelage des domaines spatiaux.*