# C O M P T E S   R E N D U S

## *SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE*
## *SECTION DE WROCŁAW*

### SÉANCE DU 5 JANVIER 1951

W. Szmielew (Varsovie), *Sur les théorèmes communs à toutes les théories axiomatisables.*

H. Fast, *Sur les fonctions jouissant de la propriété de Darboux.*

Démonstration de l'existence d'une suite uniformément convergente de fonctions à propriété de Darboux, dont la limite ne jouit pas de cette propriété.

### SÉANCE DU 12 JANVIER 1951

J. Łoś, *An algebraic proof of completeness for the two-valued propositional calculus* (voir Colloquium Mathematicum 2 (1949-51), p. 236-240).

### SÉANCE DU 19 JANVIER 1951

J. Łukaszewicz, *Sur la liaison et la division des points d'un ensemble fini* (travail collectif, voir Colloquium Mathematicum 2 (1949-51), p. 282-285).

C. Ryll-Nardzewski, *D. Blackwell's conjecture on power series with random coefficients* (voir Studia Mathematica 13 (1953), p. 30-36).

### SÉANCE DU 26 JANVIER 1951

E. Marczewski, *Démonstrations d'existence dans la théorie des processus stochastiques.*

Remarques concernant les démonstrations d'existence à l'aide du théorème de Kolmogoroff sur les mesures dans les produits cartésiens infinis.

J. Mikusiński, *Sur les équations différentielles du calcul opératoire et leurs applications aux équations classiques aux dérivées partielles* (voir Studia Mathematica 12 (1951), p. 227-270).

### SÉANCE DU 2 FÉVRIER 1951

J. Mikusiński, *Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire* (voir Studia Mathematica 12 (1951), p. 208-224).

J. Mikusiński, *Remarks on the moment problem and a theorem of Picone* (voir Colloquium Mathematicum 2 (1949-51), p. 138-141).

H. Steinhaus, *Sur les chaussures* (à paraître dans la nouvelle édition polonaise du livre „Kalejdoskop Matematyczny").



Le nombre $n$ (p. ex. 57) étant donné, il s'agit de déterminer un assortiment de $n$ chaussures-modèles reduisant au minimum la différence entre un pied quelconque et le modèle le plus proche. Le problème revient à déterminer convenablement $n$ points sur le plan $(x,y)$, $x$ étant la longueur et $y$ largeur du pied. La solution traditionnelle correspond aux centres d'un réseau quadratique, la solution proposée aux ceux d'un réseau hexagonal: elle réduit sensiblement les distances sans introduire des inconvénients pratiques.

### SÉANCE DU 16 FÉVRIER 1951

J. Mikusiński, *Sur les équations différentielles du calcul opératoire* (suite).

S. Gładysz, *Sur les fonctions faiblement indépendantes* (en préparation pour Studia Mathematica).

### SÉANCE DU 23 FÉVRIER 1951

J. Łoś, *Sur le „Schubfachprinzip" de Dirichlet.*

Démonstration, dans des hypothèses très générales, de l'équivalence entre le principe de Dirichlet et celui d'induction (problème posé par K. Zarankiewicz, Sprawozdania Towarzystwa Naukowego Warszawskiego 41 (1950), p. 3)

H. Steinhaus, *Sur la décision alternative dans le contrôle de la qualité.*

### SÉANCE DU 2 MARS 1951

C. Ryll-Nardzewski, *Sur les fonctions équicontinues.*

### SÉANCE DU 9 MARS 1951

A. Zięba, *Sur les équations différentielles dans la théorie de la poursuite.*

Dans la théorie de la poursuite, on se trouve en présence du problème concernant l'estimation du maximum de la différence des ordonnées des polygones de Cauchy-Euler pour les équations

$$(1) \qquad y'=f(x,y(x)), \qquad y'=f(x-\Delta x, y(x-\Delta x)),$$

qui correspondent aux mêmes conditions initiales $y(x_0)=y_0$ et qui sont situés dans la même région $\Omega$. Le passage de l'équation (1) à l'équation

$$y'=f(x-\Delta x, y(x))$$

tombe sous la théorie ordinaire des équations différentielles au paramètre. Il suffit donc de s'occuper de la comparaison de l'équation (1) et de l'équation

$$y'=f(x, y(x-\Delta x)).$$

L'estimation du maximum de la différence des ordonnées, en même temps que la démonstration de la décroissance infinie de cette différence avec $\Delta x$ tendant vers zéro, se fait en deux étapes:

1° Soit $y_0(x)$ une solution de l'équation (1) assujettie aux conditions initiales données. En soumettant la fonction $f(x,y)$ à l'opération que nous appelons *monotonisation*, on parvient à la fonction

$$F(x,y)=\begin{cases}\max\limits_{\bar y}[f(x,\bar y)] & \text{pour} \quad y_0(x)\leqslant \bar y\leqslant y,\\ \min\limits_{\bar y}[f(x,\bar y)] & \text{pour} \quad y\leqslant \bar y\leqslant y_0(x).\end{cases}$$

La fonction $F(x,y)$ ainsi définie est continue, satisfait à la condition de Lipschitz etc., pourvu que la fonction $f(x,y)$ ait également ces propriétés. La raison pour laquelle la fonction $F(x,y)$ se prête à l'estimation de la différence en question est que les équations $y'=f(x,y)$ et $y'=F(x,y)$ ont la même solution satisfaisant à la condition $y(x_0)=y_0$ et que l'on a en même temps

$$y_0(x)\leqslant y_1(x)\leqslant Y_1(x) \quad \text{ou bien} \quad Y_1(x)\leqslant y_1(x)\leqslant y_0(x)$$

suivant que $y_0(x_0)<y_1(x_0)$ ou $y_1(x_0)<y_0(x_0)$; $y_1$ et $Y_1$ désignent ici les solutions de la première et deuxième de ces équations respectivement, assujetties aux conditions initiales quelconques, mais identiques. On déduit des inégalités analogues pour les polygones de Cauchy-Euler qui correspondent à la subdivision de l'axe des $x$, la même pour les deux équations.

2° Admettons, pour fixer les idées, que $\Delta x>0$. Alors le polygone d'Euler de l'équation

$$y'=F\big(x,y(x-\Delta x)\big) \tag{2}$$

se trouve situé au-dessous de celui de l'équation

$$y'=F\big(x,y(x)+\delta\big) \tag{3}$$

et qui correspond à la même subdivision de l'axe des $x$ et aux mêmes conditions initiales; ici

$$\delta=-[\min F(x,y)]\,\Delta x,$$

les variables $x$ et $y$ parcourant la région $\Omega$. La situation de ces lignes résulte de la monotonie de la fonction $F(x,y)$ par rapport à $y$ et de la relation

$$y(x-\Delta x)-y(x)\leqslant-[\min F(x,y)]\,\Delta x.$$

De même, le polygone de Cauchy-Euler de l'équation (2) est situé au-dessus de celui de l'équation

$$y'=F\big(x,y(x)+\delta_1\big), \tag{4}$$

où

$$\delta_1=-[\max F(x,y)]\,\Delta x.$$



C'est ainsi que le polygone à examiner se trouve entre ceux des équations (3) et (4). Les nombres $\delta$ et $\delta_1$ y jouent le rôle des paramètres ordinaires et ils sont évidemment aussi petits que l'on veut pour $\Delta x$ suffisamment voisin de zéro. Lorsque $\delta_1=\delta=0$, $y_0(x)$ est la solution commune des deux équations.

Un procédé analogue d'estimation se laisse étendre aux systèmes d'équations.

A. Zięba, *Sur une généralisation de la notion de solution d'équation différentielle.*

Un rôle important dans la théorie de la poursuite revient à l'équation

$$y'=f(x,y,'y) \tag{1}$$

où $y'$ et $'y$ désignent la dérivée de droite et de gauche respectivement. On trouvera évidemment toute solution dérivable de l'équation (1) en résolvant l'équation différentielle ordinaire

$$f(x,y,y')-y'=0. \tag{2}$$

Mais le problème s'impose, dans quelles conditions est-il possible de parvenir à la solution de l'équation (1) par approximation à l'aide des polygones de Cauchy-Euler (la direction de chaque chaînon dépendant donc non seulement de son point initial, mais aussi de celle du chaînon précédent). Outre la condition initiale $y(x_0)=y_0$, on aura alors la condition $'y(x_0)='y_0$.

Théorème. *Si la fonction $f(x,y,'y)$ est continue et la fonction $y'=g(x,y)$ obtenue par la résolution de l'équation (2) par rapport à $y'$ satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à $y$ dans la région donnée, la condition nécessaire et suffisante pour que les polygones de Cauchy-Euler généralisés de l'équation (1), tracés d'un point arbitrairement fixé dans cette région, approchent une et une seule courbe de classe $C_1$ (solution de l'équation (2)), est que l'inégalité*

$$\left|\frac{\partial f(x,y,'y)}{\partial\, 'y}\right|<1$$

*se présente pour toutes les valeurs admissibles de $x$, $y$ et $'y$.*

La démonstration fait intervenir une forme convenable du théorème sur le point fixe et l'opération de monotonisation, envisagée dans la communication qui précède, de la fonction $g(x,y)$. On a ainsi, en même temps, un mode d'évaluer l'exactitude de l'approximation en question.

C. Ryll-Nardzewski, *Un théorème sur les moments et ses applications.*

SÉANCE DU 16 MARS 1951

(commune avec la Société Polonaise de Physique, Section de Wrocław)

R. S. Ingarden, *La théorie statistique de la granularité des matériaux photographiques* (voir R. S. Ingarden i J. G.-Mikusiński, *Uwagi teoretyczne o ziarnistości wywołanych warstw fotograficznych*, Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, Seria B, 41 (1952), p. 5-15).

SÉANCE DU 30 MARS 1951

C. Ryll-Nardzewski, *Sur les séries de puissances dans le calcul opératoire* (voir Studia Mathematica 13 (1953), p. 41-47).

K. Florek, *Sur le processus stochastique de Poisson* (voir K. Florek, E. Marczewski and C. Ryll-Nardzewski, *Remarks on the Poisson Stochastic Process (I)*, Studia Mathematica 13 (1953), p. 123-130).

E. Marczewski, *Remarques sur le processus stochastique de Poisson* (voir K. Florek, E. Marczewski and C. Ryll-Nardzewski, *Remarks on the Poisson Stochastic Process (I)*, Studia Mathematica 13 (1953), p. 123-130).

SÉANCE DU 6 AVRIL 1951

W. Ślebodziński, *Sur le problème de l'équivalence de deux formes quadratiques différentielles extérieures.*

Soit

$$\Omega = \frac{1}{2} a_{\varkappa\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda]$$

une forme différentielle extérieure de rang et de classe $n=2r$. En la différentiant extérieurement, on obtient la forme du troisième degré

$$d\Omega = \frac{1}{3!} S_{\varkappa\lambda\mu}[dx^\varkappa dx^\lambda dx^\mu].$$

En montant les indices au moyen des composantes contrevariantes $a^{\varkappa\lambda}$ du bivecteur $a_{\varkappa\lambda}$ on déduit du trivecteur $S_{\varkappa\lambda\mu}$ le vecteur $S_\varkappa = S_{\varkappa\varrho}^{\cdot\cdot\varrho}$ et le bivecteur $S_{\varkappa\lambda} = S_{\varkappa\lambda\varrho}^{\cdot\cdot\cdot}S^\varrho$, auxquels correspondent les formes

$$\sigma = S_\varkappa dx^\varkappa, \qquad \Phi = \frac{1}{2} S_{\varkappa\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda].$$

La formule

$$[(\Omega+\varrho\Phi)^r] = (\mathfrak{A}_0\varrho^r + \mathfrak{A}_1\varrho^{r-1} + \ldots + \mathfrak{A}_r)\cdot[dx^1 dx^2 \ldots dx^r],$$

où $\varrho$ est un paramètre arbitraire, nous fournit $r$ invariants différentiels du premier ordre de la forme $\Omega$ que nous désignerons par $I_h$ ($h=1,2,\ldots,r$).

Maintenant supposons que $\Omega$ soit présenté sous la forme

$$\Omega \equiv \sum_{i=1}^{r} [\omega^i \omega^{r+i}], \tag{1}$$



$\omega^a$ désignant $n$ formes différentielles linéaires et indépendantes et que $\sigma$ et $d\sigma$ soient aussi exprimés au moyen des formes $\omega^a$. L'expression (1) reste invariante, si l'on fait sur les $\omega^a$ une substitution du groupe symplectique $Sp(n)$. Au moyen des substitutions de ce groupe on peut réduire les formes $\sigma$ et $d\sigma$. Dans le cas général on obient ainsi

$$\begin{aligned} \sigma &= \omega^1 + \omega^2 + \ldots + \omega^r, \\ d\sigma &= K_1[\omega^1\omega^{r+1}] + \ldots + K_r[\omega^r\omega^{2r}]. \end{aligned} \tag{2}$$

Les coefficients $K_h$ sont des invariants différentiels du deuxième ordre de la forme $\Omega$. En se servant des invariants $I_h$ et $K_h$ on peut réduire le groupe conservant les expressions (1) et (2) à l'identité ce qui résoud le problème. La même méthode s'applique à d'autres cas, où $S_\varkappa \neq 0$.

K. Urbanik, *Sur les ensembles plans composés de segments parallèles* (à paraître en polonais dans Wiadomości Matematyczne).

SÉANCE DU 13 AVRIL 1951

H. Steinhaus, *Sur les fonctions indépendantes (X), Equipartition des molécules dans un récipient cubique* (voir Studia Mathematica 13 (1953), p. 1-17).

SÉANCE DU 27 AVRIL 1951

J. Łoś, *Sur les transformations conservant les relations.*

J. Łoś, *Remarque sur l'équivalence entre le théorème de Tychonov et l'axiome du choix.*

SÉANCE DU 4 MAI 1951

J. Mycielski, *Sur les représentations des nombres naturels par des puissances à base et exposants naturels* (voir Colloquium Mathematicum 2 (1949-51), p. 254-260).

J. Mikusiński, *A theorem on moments* (voir Studia Mathematica 13 (1953), p. 191-193).

H. Steinhaus, *Sequential statistical appraisal* (à paraître en polonais dans Zastosowania Matematyki).

Tests to determine the values of single items of a lot are agreed upon by the partners involved. The rule fixing the price of the whole lot at $Nm$, $N$ being the size of the lot and $m$ the mean value of $n$ items chosen at random for examination, is also binding for both, buyer and seller. The following rule, defining the size $n$ of the sample, is the essential part of the agreement.

The buyer is bound to pay for the lot the price asked by the seller; if not, he chooses a number of items and examines them at his costs; let us call $n_1$ the number ($n_1$ depends only of the buyer). If the seller does not agree to put $n_1$ for $n$ in the rules above, he is allowed to examine $n_2$ new items ($n_2$ depends only of his choice and he pays for the examination of the new items). If the seller does not agree to put $n=n_1+n_2$, he can examine $n_3$ further items, and so on. The variations of $m$ resulting of the increase of the sample's size eventually become so small that the gain expected as a possible result of further examination appears obviously to be less than the expenses connected with the examination of a single item. Thus the economic pressure will eventually stop the procedure after $k$ steps, $k$ being finite, and $n=n_1+n_2+ + \ldots +n_k$ will be agreed upon by both partners.

The antagonistic principle of "fair division" is unmistakeably inherent to the method above.

SÉANCE DU 11 MAI 1951

Séance solennele au 40e anniversaire de l'activité scientifique de Hugo Steinhaus

W. Orlicz (Poznań), *Travaux de H. Steinhaus sur la théorie des séries orthogonales et sur l'analyse fonctionnelle.*

E. Marczewski, *Travaux de H. Steinhaus sur la théorie de la mesure et le calcul des probabilités.*

H. Kowarzyk et J. Perkal, *Les problèmes d'application pratique dans les travaux de H. Steinhaus.*

SÉANCE DU 18 MAI 1951

H. Steinhaus, *Sur les principes du contrôle statistique* (à paraître en polonais dans Zastosowania Matematyki).

SÉANCE DU 25 MAI 1951

(commune avec la Société Polonaise de Physique, Section de Wrocław)

R. S. Ingarden, *Nouveau mode de formuler la mécanique relativiste des quanta.*

SÉANCE DU 1 JUIN 1951

W. Ślebodziński, *L'oeuvre scientifique d'Elie Cartan.*

S. Hartman, *Über die Abstände von Punkten $n\xi$ auf der Kreisperipherie* (voir Annales de la Société Polonaise de Mathématique 25 (1953), p. 110-114).

SÉANCE DU 8 JUIN 1951

C. Ryll-Nardzewski, *Sur certaines méthodes parfaites des sommations.*

B. Knaster, *Sur un continu irréductible construit par J. Mioduszewski.*

Quelques propriétés des sous-ensembles connexes du continu irréductible $K$ de dimension 2, établies par J. Mioduszewski (voir Colloquium Mathematicum 2 (1949-51), p. 323).



SÉANCE DU 12 JUIN 1951

V. Pleskot (Prague), *Sur les méthodes nomographiques.*

SÉANCE DU 15 JUIN 1951

consacrée à la mémoire de Maksymilian Tytus Huber

A. Wysocki, *La vie de M. T. Huber.*

S. Drobot, *Travaux scientifiques de M. T. Huber* (voir ce fascicule, p. 63-72).

SÉANCE DU 22 JUIN 1951

S. Hartman, *Quelques estimations.*

Désignons par $\varrho(a)$ le reste modulo 1 du nombre $a$ et, pour tout intervalle $I\subset\langle 0,1)$, par $A(x,I,N)$ le nombre des nombres naturels $k\leqslant N$ tels que $\varrho(kx)\in I$. Posons

$$R(x,N)=\sum_{n=1}^{N}\varrho(nx)-N/2.$$

THÉORÈME I.
$$\sup_{I\subset\langle 0,1)}\int_0^1\big|A(x,I,N)-N|I|\big|\,dx=O(\log^2 N),$$
$$\int_0^1|R(x,N)|\,dx=O(\log^2 N).$$

THÉORÈME II.
$$\sup_{I\subset\langle 0,1)}\int_0^1[A(x,I,N)-N|I|]^2\,dx=O(N),$$
$$\int_0^1[R(x,N)]^2\,dx=O(N).$$

Le théorème II est à comparer avec un résultat de J. F. Koksma, communiqué en septembre 1951 [1]).

W. Wolibner, *Sur la vélocité des ondes.*

SÉANCE DU 28 SEPTEMBRE 1951

J. Łoś, *Sur l'existence d'une définition du bon ordre.*

W. Wolibner, *Une équation intégrale pour les fonctions définies sur la sphère.*

J. Łoś, *Sur les subdivisions primaires des rectangles.*

SÉANCE DU 5 OCTOBRE 1951

W. Skrzywan, *Remarques sur l'application de la distribution de Poisson.*

Analyse des exemples concrets des populations statistiques dont la description à l'aide de la distribution de Poisson s'accorde mal avec l'observation. Exemples de diverses autres distributions, basées sur des

[1]) J. F. Koksma, *On a certain integral in the theory of uniform distribution*, Indagationes Math. 13 (4) (1951), p. 285-287.

hypothèses différentes et qui se laissent appliquer au lieu de la distribution poissonienne. Indication des difficultés pratiques de vérifier si les hypothèses conduisant à cette distribution se trouvent réalisées et mise en évidence des éléments conventionnels dans les descriptions de ce genre.

SÉANCE DU 12 OCTOBRE 1951

J. Mikusiński et C. Ryll-Nardzewski, *Application du calcul opératoire à la théorie des circuits électriques* (voir J. G.-Mikusiński, *Rachunek Operatorów*, Monografie Matematyczne, à paraître).

SÉANCE DU 16 OCTOBRE 1951

E. Marczewski, *Sur les congruences et les propriétés positives d'algèbres abstraites* (voir Colloquium Mathematicum 2 (1949-51), p. 220-228).

J. Łoś, *Recherches algébriques sur les opérations analytiques et quasi-analytiques* (voir Annales de la Société Polonaise de Mathématique 25 (1952), p. 131-140).

SÉANCE DU 26 OCTOBRE 1951

E. Marczewski et C. Ryll-Nardzewski, *Sur la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables* (voir Annales de la Société Polonaise de Mathématique 25 (1952), p. 145-154).

H. Fast et A. Götz, *Sur l'intégrabilité riemannienne de la fonction de Crofton* (voir Annales de la Société Polonaise de Mathématique 25 (1952), p. 309-322).

SÉANCE DU 9 NOVEMBRE 1951

C. Ryll-Nardzewski, *Sur les travaux de I. M. Gelfand.*

S. Hartman, *Sur les travaux de D. E. Menchov.*

J. Łukaszewicz, *Sur les travaux de N. W. Smirnov.*

SÉANCE DU 16 NOVEMBRE 1951

A. Grzegorczyk (Varsovie), *Some classes of recursive functions* (Rozprawy Matematyczne 4, Warszawa 1953).

J. Łoś, *Sur les congruences dans les algèbres abstraites.*

SÉANCE DU 20 NOVEMBRE 1951

K. Zarankiewicz (Varsovie), *Sur certains ensembles singuliers de points aux coordonnées entières*[2]).

S. Hartman, J. Mycielski et C. Ryll-Nardzewski, *Systèmes spéciaux de points à coordonnées entières.*

Les auteurs ont partiellement résolu le problème suivant de K. Zarankiewicz[2]):

[2]) K. Zarankiewicz, **P 101**, Colloquium Mathematicum 2 (1949-51), p. 301.



Etant donné un carré $n \times n$ dans le réseau des points à coordonnées entières quel est le plus grand nombre de points que l'on peut y choisir de manière qu'il ne se trouve parmi eux aucun système de 4 points situés aux sommets d'un rectangle?

En désignant par $K(n)$ le nombre en question, les auteurs démontrent que

$$(1) \qquad \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}-\varepsilon\right)n^{\frac{4}{3}} < K(n) < (2+\varepsilon)n^{\frac{3}{2}}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ à partir d'un $n$ suffisamment grand.

SÉANCE DU 30 NOVEMBRE 1951

E. Marczewski, *On a measure theoretical treatment of some stochastic processes.*

A measure theoretical treatment of some processes considered by A. Rényi[3]).

C. Ryll-Nardzewski, *Sur un problème de B. Knaster.*

Un théorème sur l'homogénéité topologique de l'ensemble de Cantor[4]).

H. Steinhaus, *Sur la longueur des courbes sur la sphère* (voir H. Steinhaus, *Length, shape and area*, ce fascicule, p. 1-13).

SÉANCE DU 7 DÉCEMBRE 1951

R. Zuber, *Sur deux méthodes de résolution de certaines équations différentielles ordinaires.*

H. Steinhaus, *Sur la recherche de paternité* (à paraître en polonais dans Zastosowania Matematyki).

W. Skrzywan, *The greatest known prime number.*

Miller and Wheeler[5]) informed not long ago the largest known prime number was

$$180(2^{127}-1)^2+1.$$

I computed this 79-digit number in ca 2,5 hours with an ordinary desk arithmometer and found it to be equal:

5 210 644 015 679 228 794 060 694 325 391 135 853

335 898 483 908 056 458 352 201 854 618 372 555 735 221.

[3]) A. Rényi, *On some problems concerning Poisson processes*, Publicationes Mathematicae 2 (1951), p. 66-73.

[4]) Cf. B. Knaster et M. Reichbach, *Homogénéité des ensembles et prolongements des homéomorphies*, Fundamenta Mathematicae 40 (1953), à paraître.

[5]) J. C. P. Miller and D. J. Wheeler, a letter to the editors, Nature 168 (1951), p. 838. It should be added that in 1952 larger prime numbers were found.

SÉANCE DU 14 DÉCEMBRE 1951

J. Mikusiński et C. Ryll-Nardzewski, *Un théorème sur le produit de composition des fonctions de plusieurs variables* (voir Studia Mathematica 13 (1953), p. 62-68).

J. Mycielski, *Sur les représentations des nombres naturels par de puissances à base et exposant naturels* (suite, voir la séance du 4 mai 1951).

A. Götz and E. Marczewski, *On the frequency of numbers in certain expansions.*

Let us consider the expansion of each number of the unit interval in a continuous fraction:

$$x = \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \ldots$$

It is known[6]) that each positive integer $k$ has a well determined frequency $d_k$ (not depending on $x$) in the sequence $\{n_j\}$ and that

$$d_1 + d_2 + \ldots = 1. \tag{1}$$

Borel theorem on normal numbers says that systematic fractions have an analogical property.

The purpose of this communication is to remark that the expansions of the form

$$x = \frac{n_2}{2!} + \frac{n_3}{3!} + \ldots \qquad (0 \leqslant n_j < j)$$

have not the property (1). More precisely, *for almost all $x$, every non negative integer has the frequency zero in the sequence $\{n_j\}$.*

That is an easy consequence of a corollary of the strong law of large numbers[7]).

[6]) Theorem of P. Lévy. See e.g. C. Ryll-Nardzewski, *On the ergodic theorems (II)*, Studia Mathematica 12 (1951), p. 74-79, especially p. 78, Corollary 1.

[7]) See e.g. P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York 1950, p. 205, (6).