POINTS-LIMITES ET POINTS DE CONTINUITÉ

PAR

B. KNASTER, J. MIODUSZEWSKI et K. URBANIK (WROCŁAW)

On appelle *point-limite* d'une fonction f définie dans un ensemble E tout point $x \epsilon E$ en lequel il existe la limite commune l à toutes les suites de valeurs $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots$ que cette fonction prend dans des suites quelconques $x_1, x_2, \ldots$ de points de E qui convergent vers le point x. Si, en outre, $f(x)=l$, le point x est dit *point de continuité* de la fonction f.

D'après un théorème important, la condition suivante est à la fois suffisante et nécessaire pour qu'une fonction réelle d'une variable réelle soit de I^{re} classe de Baire, c'est-à-dire limite d'une suite de fonctions continues:

I. *Quel que soit l'ensemble fermé F, la fonction partielle $f|F$ a dans F un point de continuité.*

Ce théorème reste vrai — comme on sait — lorsque les valeurs x de la variable constituent un espace $\mathcal{X}$ métrique complet quelconque et celles $y=f(x)$ de la fonction sont des points d'un espace $\mathcal{Y}$ métrique séparable[1]). On sait aussi qu'il suffit d'admettre l'existence d'un point de continuité de la fonction partielle $f|F$ dans tout ensemble *parfait* $F \subset \mathcal{X}$, car la condition ainsi modifiée équivaut à I (tout ensemble parfait étant fermé et tout ensemble fermé imparfait contenant des points isolés, donc qui sont des points de continuité de toute fonction)[2]). Enfin, la propriété nécessaire des fonctions f de I^{re} classe, à savoir que l'ensemble $f^{-1}(Y)$ soit un F_σ pour tout ensemble ouvert $Y \subset \mathcal{Y}$, reste encore suffisante dans des cas bien généraux[3]); nous allons donc entendre dans la suite les *fonctions de I^{re} classe* comme définies par cette propriété.

E. Marczewski a posé récemment le problème, si le théorème en question subsiste encore en remplaçant dans la condition I *point de continuité* par *point-limite*. Nous allons montrer que la réponse est affirmative:

---

[1]) Voir par exemple C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne XX, 3me édition, Warszawa 1952, p. 326. La condition I reste d'ailleurs suffisante, sans être nécessaire, lorsque $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont des espaces métriques quelconques (voir ibidem, p. 301, théorème 2).

[2]) Ibidem, p. 302, remarque 2.

[3]) Ibidem, p. 298.

$\mathcal{X}$ étant un espace métrique complet, la condition I modifiée de cette manière entraîne la primitive (l'implication inverse étant évidemment triviale pour $\mathcal{X}$ métrique arbitraire). Nous montrerons cependant davantage, à savoir qu'il en est encore de même en remplaçant *point-limite* par *point-limite unilatéral*. C'est la réponse affirmative (généralisée) à la question ajoutée par S. Hartman pour le cas des fonctions réelles d'une variable réelle.

La notion banale d'intervalle d'un ensemble fermé F de nombres réels et, par suite, celle de point-limite unilatéral $x \epsilon F$ de la fonction partielle $f|F$, se laissent étendre de plusieurs façons aux ensembles F situés dans des espaces $\mathcal{X}$ métriques arbitraires. Nous adoptons ici les définitions suivantes des points-limites et points-limites unilatéraux d'une fonction définie dans un ensemble E, formulées par E. Marczewski d'une façon si générale que ces points peuvent appartenir à $\bar{E}-E$ ($^{-}$ désignant la fermeture)[4]):

DÉFINITIONS. Un point $x \epsilon \mathcal{X}$ est *point-limite* de la fonction f définie dans E, où $E \subset \mathcal{X}$, lorsqu'il existe pour tout $\varepsilon>0$ un ensemble ouvert $U \subset \mathcal{X}$ tel que $x \epsilon \bar{E}\cdot U$ et $\delta\{f[E\cdot U-(x)]\}<\varepsilon$, δ désignant le diamètre. Un point x est *point-limite unilatéral* de cette fonction lorsqu'il existe un ensemble ouvert $V \subset \mathcal{X}$ tel que x est un point-limite de la fonction partielle $f|E\cdot V$.

En vertu de la première de ces définitions, tout point-limite d'une fonction f définie dans M, où $E \subset M \subset \bar{E}$, l'est à plus forte raison de $f|E$, car $x \epsilon \bar{M}\cdot U$ entraîne $x \epsilon \bar{E}\cdot U$ et $E \subset M$ entraîne $\delta\{f[E\cdot U-(x)]\} \leqslant \delta\{f[M\cdot U-(x)]\}$. Il en résulte aussitôt d'après la seconde (en posant $M=\bar{E}\cdot V$) que tout point-limite unilatéral d'une fonction f définie dans $\bar{E}$ l'est de $f|E$, car $E\cdot V \subset \bar{E}\cdot V \subset \overline{E\cdot V}$. Les réciproques ne sont pas vraies. On a cependant le

LEMME. *Si $H \neq 0$ est un ensemble ouvert dans E, tout point-limite unilatéral x de la fonction $f|\bar{H}$ l'est en même temps de la fonction $f|E$.*

En effet, nous venons de voir que tout point-limite unilatéral x de $f|\bar{H}$ l'est de $f|H$ (l'ensemble H ayant été désigné par E). Il existe donc par définition un ensemble ouvert $W \subset X$ tel que x est un point-limite de $f|H\cdot W$. L'ensemble H étant par hypothèse ouvert dans E, c'est-à-dire de la forme $H=E\cdot G$ où $G \subset X$ est un ensemble ouvert, l'ensemble $V=G\cdot W$ est ouvert et x est un point-limite de $f|E\cdot V$, puisque

---

[4]) Autres notions ayant cette propriété ont été introduites récemment par W. W. Bledsoe dans sa note *Neighborly functions*, Proceedings of the American Mathematical Society 3 (1952), p. 114 et 115. Elles sont voisines, mais non équivalentes, à celles adoptées par nous et leur but est différent.

$H\cdot W = E\cdot G\cdot W = E\cdot V$. Le point x est donc un point-limite unilatéral de $f|E$, c. q. f. d.

Il y a trois remarques à faire:

1° Il résulte des définitions qui précèdent que, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant des espaces métriques quelconques, tout point de continuité de f en est un point-limite et (en posant $V=\mathcal{X}$) tout point-limite de f en est un point-limite unilatéral — comme dans l'espace $\mathcal{X}$ des nombres réels. Mais la réciproque n'est pas vraie.

2° Aussi le lemme ne s'applique aux points-limites ni à ceux de continuité qu'à condition de remplacer $\overline{H}$ par H dans son énoncé.

3° En particulier, pour $\mathcal{X}$ étant l'espace des nombres réels, la définition du point-limite unilatéral adoptée par nous ne coïncide exactement avec celle au sens ordinaire (de gauche ou de droite) qu'en postulant que V soit un ensemble non seulement ouvert, mais encore connexe (donc un intervalle). Elle est par conséquent moins restrictive que la définition usuelle, ce qui rend la solution annoncée du problème encore plus générale.

Pour en donner un exemple, tout point $(0,y)$, où $-1\leqslant y\leqslant 1$, est un point-limite unilatéral (de droite) de la fonction $f(x)=\sin(\pi/x)$ où $0<x\leqslant 1$ dans le sens admis par nous, sans l'être dans le sens ordinaire.

THÉORÈME 1. *Si l'ensemble des points-limites unilatéraux d'une fonction f définie dans un espace $\mathcal{X}$ métrique complet est dense dans $\mathcal{X}$, celui de ses points de continuité l'est également* [5]).

Soit, en effet, $G_0\subset\mathcal{X}$ un ensemble ouvert arbitraire. Il existe donc par hypothèse un point-limite unilatéral $x_0\,\epsilon\, G_0$ de la fonction $f=f|\mathcal{X}$. Il en résulte par définition l'existence d'un ensemble ouvert $V_0\subset\mathcal{X}$ tel que x_0 est un point-limite de la fonction $f|V_0$. En posant $\varepsilon=1$, il existe par conséquent un ensemble ouvert U_0 tel que $x_0\,\epsilon\,\overline{V}_0\cdot U_0$ et que $\delta\{f[\overline{V}_0\cdot U_0-(x_0)]\}<1$. L'ensemble $G_0\cdot V_0\cdot U_0$ est ouvert et il n'est pas vide, car sa fermeture ne l'est pas, puisqu'elle contient le point x_0 appartenant à G_0 et à $\overline{V}_0\cdot U_0$.

Soit $G_1\subset\mathcal{X}$ un ensemble ouvert non-vide et tel que $\overline{G}_1\subset G_0\cdot V_0\cdot U_0$, d'où $\overline{G}_1\subset\overline{V}_0\cdot U_0$ (il suffit évidemment de poser $G_1=(x_0)$ dans le cas particulier où x_0 est point isolé). En vertu de l'inégalité qui précède, on a donc

[5]) C'est-à-dire que la fonction f est *ponctuellement discontinue* au sens de Baire. La simple démonstration qui suit consiste au fond 1° à déduire de l'hypothèse une condition convenable, 2° qui implique la discontinuité ponctuelle de la fonction.

Nous avons retrouvé un cas particulier de l'implication 2°, à savoir seulement pour les fonctions réelles d'une variable réelle, dans le livre de W. Sierpiński, *Funkcje przedstawialne analitycznie* (en polonais), Lwów 1925, p. 8, où elle est d'ailleurs établie par un raisonnement analogue (par l'application du théorème de Cantor).

à plus forte raison $\delta\{f[G_1-(x_0)]\}<1$ et on peut évidemment admettre que $\delta(G_1)<1$.

Progressons par l'induction. Soit, pour $i>1$, $G_i\subset\mathcal{X}$ un ensemble ouvert assujetti aux conditions

$$(1)\quad 0\neq\overline{G}_i\subseteq G_{i-1},\qquad (2)\quad \delta(G_i)<i^{-1}\qquad\text{et}\qquad (3)\quad \delta\{f[G_i-(x_{i-1})]\}<i^{-1},$$

satisfaites pour $i=1$. Il existe par hypothèse un point-limite unilatéral $x_i\,\epsilon\, G_i$ de la fonction f, d'où, par définition, l'existence d'un ensemble ouvert $V_i\subset\mathcal{X}$ tel que x_i est un point-limite de la fonction $f|V_i$. En posant $\varepsilon=(i+1)^{-1}$, il existe donc un ensemble ouvert U_i tel que $x_i\,\epsilon\,\overline{V}_i\cdot U_i$ et que $\delta\{f[\overline{V}_i\cdot U_i-(x_i)]\}<(i+1)^{-1}$. L'ensemble $G_i\cdot V_i\cdot U_i$ étant ouvert et non-vide, puisque sa fermeture contient le point x_i, la dernière égalité est satisfaite à plus forte raison en y substituant à $\overline{V}_i\cdot U_i$ un ensemble ouvert non-vide quelconque G_{i+1} tel que $\overline{G}_{i+1}\subset G_i\cdot V_i\cdot U_i$ et que $\delta(G_{i+1})<(i+1)^{-1}$. Les conditions (1)-(3), admises pour i, se trouvent donc satisfaites pour $i+1$.

La suite infinie $\{G_i\}$, assujettie à ces conditions, est ainsi définie. L'espace $\mathcal{X}$ étant complet, elles entraînent en vertu du théorème de Cantor l'existence d'un point unique

$$(4)\qquad x=\prod_{i=0}^{\infty}G_i=\prod_{i=0}^{\infty}\overline{G}_i$$

(on a d'ailleurs $x=\lim\limits_{i\to\infty}x_i$). Pour montrer que x est un point de continuité de la fonction f, il suffit de faire correspondre à tout $\varepsilon>0$ l'ensemble ouvert G_i avec $i>\varepsilon^{-1}$ quelconque, car on a alors en vertu de (3) l'inégalité $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ pour tout couple x',x'' de points de cet ensemble. En même temps, $x\,\epsilon\, G_0$ en vertu de (4), ce qui achève la démonstration du théorème.

Il nous reste à en déduire le

THÉORÈME 2. *Pour les espaces $\mathcal{X}$ métriques complets, la condition* I *équivaut à la suivante:*

II. *Quel que soit l'ensemble parfait F, la fonction partielle $f|F$ a dans F un point-limite unilatéral.*

L'implication I→II est une conséquence directe des définitions, même pour des espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ métriques arbitraires (remarque 1°).

Pour établir l'implication II→I, considérons un ensemble quelconque $H\neq 0$, ouvert dans F. En admettant la condition II, il existe donc dans $\overline{H}$ un point-limite unilatéral de la fonction partielle $f|\overline{H}$, donc aussi de $f|F$ en vertu du lemme (en y posant $E=F$). L'ensemble F étant fermé par hypothèse, on a $\overline{H}\subset F$. La fonction $f|F$ a donc un point-limite unilatéral dans la fermeture de tout ensemble ouvert dans F. L'ensemble de ces points est par conséquent dense dans F. L'espace $\mathcal{X}$ étant métrique complet, F l'est également. En considérant donc la fonction partielle $f|F$ comme une fonction totale f^*, l'ensemble des points de continuité de f^* est dense dans F en vertu du théorème 1.

Ainsi la fonction $f^*=f|F$ a des points de continuité dans l'ensemble parfait F, ce qui équivaut (voir p. 164) à la condition I qu'il s'agissait de déduire de II.

COROLLAIRE. *Pour qu'une fonction f définie dans un espace métrique complet $\mathcal{X}$ et dont les valeurs sont des points d'un espace métrique séparable $\mathcal{Y}$ soit de I^re^ classe de Baire, il faut et il suffit que, quel que soit l'ensemble parfait $F\subset\mathcal{X}$, la fonction partielle $f|F$ ait un point-limite unilatéral $x\in F$.*

En particulier, il en est donc de même lorsque $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=$ espace des nombres réels, et même lorsqu'on entend la notion de point-limite unilatéral dans un sens plus faible qu'en analyse classique (remarque 3°).

Envisageons, pour terminer, lesquelles des implications établies exigent l'hypothèse que l'espace $\mathcal{X}$ soit complet — ce que nous désignerons par $\longrightarrow$, et lesquelles sont valables pour des $\mathcal{X}$ métriques arbitraires — ce que nous désignerons par $\to$.

Soit III la condition: *f est une fonction de I^re^ classe de Baire.*

Nous avons vu que $\mathrm{I}\to\mathrm{II}$ (remarque 1°) et que $\mathrm{I}\to\mathrm{III}$ (renvoi [1])).

L'exemple suivant montre que $\mathrm{III}\longrightarrow\mathrm{I}$: soient $\mathcal{X}$ l'ensemble des nombres rationnels, donc un espace incomplet, et $f(x)=1/q$ pour $x=p/q$, où p et q sont des entiers (fonction de Riemann). La condition III est satisfaite, $f^{-1}(\mathcal{Y})$ étant dénombrable, donc un F_σ, quel que soit $\mathcal{Y}$ (et même f est limite d'une suite de fonctions continues dans $\mathcal{X}$). Cependant la condition I est en défaut, puisque f n'a aucun point de continuité dans $F=\mathcal{X}$, qui est parfait comme dense en soi et fermé (dans $\mathcal{X}$).

Le même exemple prouve que $\mathrm{II}\longrightarrow\mathrm{I}$, car la condition II est satisfaite. Plus encore: tout point d'un ensemble fermé quelconque $F\subset\mathcal{X}$ est un point-limite de $f|F$; il est facile de le voir, l'ensemble des points x pour lesquels $|f(x)|$ dépasse une valeur donnée $\varepsilon>0$, c'est-à-dire où $|q|<\varepsilon$, étant un ensemble isolé (comme fini).

Enfin, l'exemple qui suit montre que $\mathrm{III}\longrightarrow\mathrm{II}$. Partageons le même $\mathcal{X}$ en deux ensembles denses et disjoints, A et $\mathcal{X}-A$ (soit A, par exemple, l'ensemble de $x\in\mathcal{X}$ pour lesquels q est une puissance entière de 2) et posons

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{pour } x\in A,\\ 1 & \text{pour } x\in\mathcal{X}-A\end{cases}$$

(fonction caractéristique de l'ensemble $\mathcal{X}-A$). Cette fonction satisfait à III pour la même raison que dans l'avant-dernier cas (et elle est également limite d'une suite de fonctions continues dans $\mathcal{X}$), mais elle ne satisfait pas à II, puisqu'elle n'a aucun point-limite, même unilatéral, dans $F=\mathcal{X}$.

En résumé, on a donc le schéma suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \rightleftarrows & \mathrm{II} \\ \nwarrow\searrow & & \swarrow\nearrow \\ & \mathrm{III} & \end{array}$$

L'aiguille en pointillé désigne dans lui le problème ouvert que voici:

P 132. La condition II reste-t-elle suffisante pour que la fonction f soit de I^re^ classe de Baire lorsque l'espace métrique $\mathcal{X}$ des valeurs de la variable n'est pas complet (l'espace métrique $\mathcal{Y}$ qui contient les valeurs de f étant supposé séparable)?

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ
BOLESLAW BIERUT À WROCŁAW