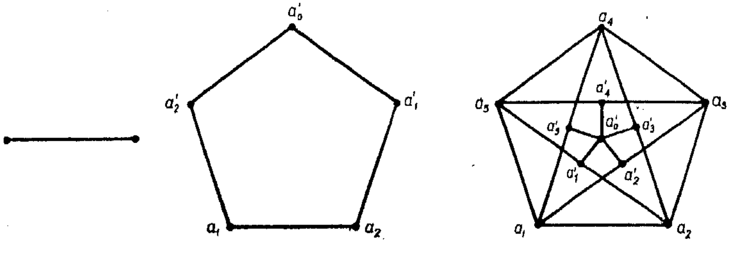
Le graph ainsi obtenu, aux points $a_1,\ldots,a_m,a'_0,\ldots,a'_m$, sera désigné par A^* (voir la figure).



$n=1$ $n=2$ $n=3$

A^* ne contient pas de triangle:

A ne contenant pas de triangle la suite $a_{k_{i1}},\ldots,a_{k_{ir}}$ ne contient aucune paire de points joints entre eux. De là aucun des points $a'_1,\ldots,a'_m$ n'est pas angle d'un triangle.

A^* ne peut pas être colorié par $n+1$ couleurs:

Affirmons le contraire. Le graph A ne pouvant pas être colorié par n couleurs, quelle que soit la manière avec laquelle il est colorié par $n+1$ couleurs, il contient une suite de points $a_{s_1},\ldots,a_{s_{n+1}}$ coloriés par toutes les $n+1$ couleurs et dont chacun est joint à des points coloriés par toutes les couleurs usitées, différentes de la sienne.

Il est évident que le point a'_{s_i} doit être colorié de la même couleur que le point a_{s_i} puisqu'il est colorié par l'une des $n+1$ couleurs usitées.

Or le point a'_0 est joint à tous les points $a'_{s_1},\ldots,a'_{s_{n+1}}$, ce qui mène à une contradiction puisque ceux-ci sont coloriés par toutes les $n+1$ couleurs.

Le théorème est ainsi démontré. La construction faite dans la démonstration donne un graph composé de $3\cdot 2^{n-1}-1$ points. Or, le problème suivant s'impose:

P 130. Existe-t-il un graph composé d'un nombre de points plus petit que $3\cdot 2^{n-1}-1$, qui ne contient aucun triangle et qui ne peut pas être colorié par n couleurs?

Appelons *circuit* une suite $a_1,a_2,\ldots,a_k$ de points d'un graph lorsque les points a_1 et a_2, a_2 et $a_3,\ldots,a_k$ et a_1 sont joints.

Le problème suivant est une généralisation du problème résolu dans ce travail:

P 131. Existe-t-il pour chaque couple de nombres naturels n et $m\geqslant 3$ un graph fini qui ne peut être colorié par n couleurs et qui ne contient, pour $k=3,4,\ldots,m$, aucun circuit à k points.

UNE SIMPLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE CANTOR-BERNSTEIN

PAR

M. REICHBACH (WROCŁAW)

Le théorème en question peut être formulé comme suit:

f étant une fonction définie dans un ensemble M, biunivoque, telle que $f(M)\subset M$, il existe, pour tout ensemble $E\subset M-f(M)$, une fonction f^* biunivoque telle que $f^*(M)=E+f(M)$.

Il sera démontré que *la fonction*

$$f^*(x)=\begin{cases} x & \text{pour } x\in S,\\ f(x) & \text{pour } x\in M-S\end{cases} \tag{1}$$

où

$$S=E+f(E)+f[f(E)]+\ldots \tag{2}$$

satisfait aux conditions de la thèse.

Démonstration. D'après l'hypothèse sur E et sur $f(M)$, on a $f(E)\subset M$, $f[f(E)]\subset M$ et ainsi de suite. On a donc, d'après (2), $S\subset M$, c'est-à-dire

$$M=S+(M-S). \tag{3}$$

Il s'ensuit également de (2) que $f(S)=f(E)+f[f(E)]+\ldots$, d'où $E+f(S)=S$, ce qui entraîne d'une part

$$S+f(M-S)=E+f(S)+f(M-S)=E+f[S+(M-S)]=E+f(M), \tag{4}$$

où le dernier signe d'égalité résulte de (3), et d'autre part

$$f(M)-S=f(M)-[E+f(S)]=f(M)-E-f(S)=f(M)-f(S)=f(M-S), \tag{5}$$

où l'avant-dernier signe d'égalité résulte de l'hypothèse sur E et le dernier — de la biunivocité de f.

D'après (1), la fonction f^* est biunivoque dans les ensembles disjoints S et $M-S$, puisque f l'est dans $M-S$ par hypothèse. Les ensembles $f^*(S)$ et $f^*(M-S)$ sont aussi disjoints, car, d'après (1), le premier coïncide avec S et le second avec $f(M-S)$, donc avec $f(M)-S$ en vertu de (5). Il en résulte d'après (3) que la fonction f^* est biunivoque dans l'ensemble M tout entier. Enfin, l'application successive de (3), (1) et (4) donne

$$f^*(M)=f^*(S)+f^*(M-S)=S+f(M-S)=E+f(M),$$

c. q. f. d.