

## SUR LE PARQUETAGE DU PLAN PAR DES POLYGONES

PAR

J. G. MIKUSIŃSKI (WROCLAW)

1. La figure 1 représente une portion du plan (de forme octogonale) recouverte par des triangles. Appelons les sommets de ces triangles *noeuds* du recouvrement. Dans la plupart des noeuds intérieurs de cette portion

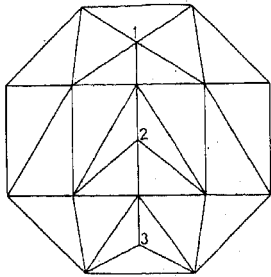


Fig. 1

du plan se rencontrent *six* triangles. Il y a exception aux noeuds 1, 2 et 3 où le nombre de triangles concourants est inférieur. Appelons ces derniers *noeuds défectifs*. Un noeud est défectif lorsque le nombre de triangles y concourant est inférieur à 6.

Imaginons maintenant le plan recouvert tout entier par des triangles (non empiétants) de manière que

1° les sommets des triangles coïncident (ce qui veut dire, que les sommets d'un triangle qui touchent un autre triangle sont en même temps sommets de ce dernier triangle);

2° dans chaque noeud, 6 triangles au plus peuvent se rencontrer.

Nous démontrerons qu'un tel parquetage du plan ne peut avoir que 6 noeuds défectifs.

Cette proposition peut être raffinée comme nous allons le faire dans la suite.

Nous dirons qu'un noeud a *d* défauts lorsque le nombre de triangles qui s'y rencontrent est  $6-d$ . Par exemple le noeud 1 sur la figure 1 a un seul défaut, le noeud 2 en a deux et le noeud 3 en a trois.

**THÉORÈME.** *Si le plan est divisé tout entier en triangles de manière que les conditions 1° et 2° soient remplies, le nombre total de tous les défauts ne peut pas surpasser 6.*

2. Avant d'aborder la démonstration, considérons un polygone arbitraire *P* divisé en triangles d'une manière quelconque, pourvu que la condition 1° soit remplie. Désignons par:

*S* le nombre de sommets de *P*;

*D* le nombre de défauts dans les noeuds intérieurs de *P* (les noeuds avec un nombre négatif de défauts sont admissibles);

*E* le nombre de segments se trouvant à l'intérieur de *P* dont l'une au moins des extrémités se trouve sur le périmètre de *P* (si les deux extrémités d'un tel segment sont situées sur le périmètre de *P*, ce segment sera compté deux fois).

Dans le cas de la figure 1 on a évidemment  $S=8$ ,  $D=6$  et  $E=16$ .

Si *P* ne se compose que d'un seul triangle, on a  $S=3$ ,  $D=0$  et  $E=0$ .

Si *P* se compose de plusieurs triangles, on peut le construire en choisissant arbitrairement l'un des triangles partiels et en ajoutant ensuite tour à tour d'autres triangles jusqu'à ce que le polygone *P* soit complété. De plus, on peut procéder de manière que chaque nouveau triangle ajouté *ABC* ait toujours un ou deux côtés communs avec le polygone partiel déjà construit; ceci étant bien intuitif, nous renonçons d'en donner une démonstration formelle.

On peut démontrer, par induction, la formule générale

$$(1) \quad 2S + D = E + 6.$$

Cette formule est évidemment valable si *P* ne se compose que d'un seul triangle. Sinon, la construction précédente conduit, à chaque pas, à l'une des deux possibilités que représentent les figures 2 et 3. Dans le premier

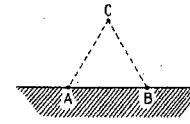


Fig. 2

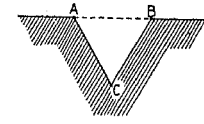


Fig. 3

cas nous obtenons un nouveau sommet *C*, ce qui fait augmenter *S* de 1. Le nombre *D* reste le même, car les noeuds intérieurs ne changent pas. Le nombre *E* augmente de 2, car le segment *AB* doit maintenant être compté deux fois. Il s'ensuit que la formule (1) reste valable si elle l'était avant d'ajouter le triangle *ABC*. Dans le second cas, présenté par la figure 3, les deux côtés *AC* et *BC* du triangle *ABC* appartiennent au polygone partiel déjà construit. A présent, le nombre *S* diminue de 1, car le point *C* cesse d'être sommet du polygone. Si *d* est le nombre de segments qui aboutissent au point *C*, ce point a  $6-d$  défauts. L'adjonction du triangle *ABC* fait donc augmenter le nombre *E* de  $6-d$ . D'autre part, il est facile d'établir que le nombre *D* augmente de  $4-d$ . Ainsi la formule (1) reste valable, si elle l'était avant l'adjonction du triangle *ABC*.

Ce raisonnement prouve, par induction, la validité de (1) pour tout polygone.

3. Supposons maintenant que le plan soit divisé tout entier en triangles de manière que les conditions 1° et 2° soient satisfaites. Soit *P* un

polygone quelconque composé de triangles participant à cette division. Soit  $N$  l'ensemble des noeuds se trouvant à l'extérieur de  $P$  mais ayant une communication directe avec  $P$ . Désignons enfin par  $P_1$  le plus petit des polygones, construit pareillement à  $P$ , enveloppant l'ensemble  $N$  et n'ayant de sommets communs avec  $P$ . Les sommets de  $P_1$  appartiennent donc à  $N$ . Il peut d'ailleurs exister des points de  $N$  à l'intérieur du polygone  $P_1$  (par exemple les points  $A, B$  et  $C$  de la figure 4).

Introduisons, pour  $P_1$ , les dénominations analogues à celles de  $P$ . On a alors, pour  $P_1$ ,

$$(2) \quad 2S_1 + D_1 = E_1 + 6.$$

En particulier,  $E_1$  désigne le nombre de segments issus des sommets de  $P_1$  et qui se trouvent à l'intérieur de  $P$ . L'une des extrémités de chacun de ces segments se trouve sur le périmètre de  $P_1$  et l'autre à l'intérieur de  $P_1$ , ce qui résulte de ce que  $P_1$  est le plus petit polygone qui enveloppe  $N$ . Suivant que cette extrémité intérieure coïncide ou non avec l'un des sommets du polygone  $P$ , nous dirons que le segment considéré est de première ou de deuxième classe. (Par exemple, les segments  $FA$  et  $FB$  de la figure 4 sont de deuxième classe). Chaque segment de première classe joint les périmètres de  $P_1$  et  $P$ . Il est facile de voir que tout segment de deuxième classe constitue l'unique communication directe de son extrémité intérieure avec

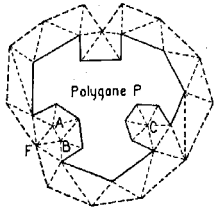


Fig. 4

le périmètre de  $P_1$  (dans le cas contraire  $P_1$  ne serait pas le plus petit polygone enveloppant  $N$ ). D'autre part, cette extrémité a évidemment au moins une communication (directe ou indirecte) avec le périmètre de  $P$ , moyennant les segments qui n'ont pas de points communs avec le périmètre de  $P_1$ .

Ce raisonnement démontre que le nombre  $E_1$  est inférieur ou tout au plus égal au nombre  $M$  de segments issus des sommets  $P$  et situés en dehors de  $P$ . Or,  $M$  est inférieur ou égal à  $4S - E$ , car, d'après 2°, le nombre de tous les segments issus de l'un quelconque des sommets de  $P$  est inférieur ou égal à 6. On a donc

$$(3) \quad E_1 \leq 4S - E.$$

De (1), (2) et (3), on tire aussitôt

$$(4) \quad S_1 \leq S + 6 - \frac{D + D_1}{2}.$$

4. L'inégalité (4) permet de démontrer facilement le théorème du paragraphe 1. En effet, supposons, par contre, que le nombre de défauts

dans le plan soit supérieur à 6. Alors on peut tracer un polygone  $P$  tel que  $D \geq 7$ . On a à fortiori  $D_1 \geq 7$  et, en vertu de (4),

$$S_1 \leq S - 1.$$

Le nombre de sommets de  $P_1$  est donc inférieur à celui de  $P$ . En construisant ensuite le polygone  $P_2$  qui joue, pour  $P_1$ , le même rôle que  $P_1$  pour  $P$ , le nombre de sommets de  $P_2$  sera  $S_2 \leq S_1 - 1$ . En répétant le procédé un nombre suffisant de fois, on parviendra à un polygone avec un nombre négatif de sommets, ce qui est absurde.

5. Les figures 5 et 6 représentent des fragments du  $\overline{\text{parquetage}}$  du plan, où il y a 6 points défectifs. Ces points sont concentrés autour du

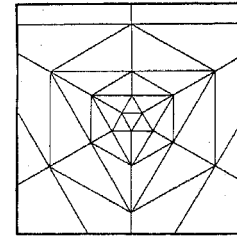


Fig. 5

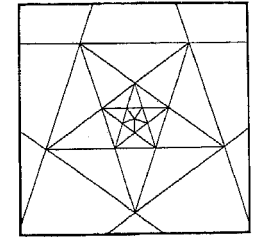


Fig. 6

milieu de ces figures. On voit sans peine que ces fragments se laissent prolonger régulièrement sur le plan tout entier.

La figure 7 représente un parquetage d'un triangle, où il y a 11 noeuds défectifs (intérieurs). Cet exemple montre que le parquetage d'une portion finie du plan peut avoir plus que 6 défauts. On peut montrer que, pour tout nombre naturel  $n$  arbitrairement grand, il est possible de construire un parquetage (d'une portion finie du plan) qui contient  $n$  défauts. Cela n'est pas en contradiction avec le théorème démontré, car un tel parquetage ne peut pas être prolongé sur le plan tout entier.

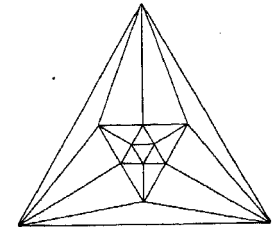


Fig. 7

6. Nous avons jusqu'ici parlé de triangles rectilignes, mais il est évident que le théorème et sa démonstration sont valables de même dans le cas des triangles curvilignes. Cette remarque permet d'attribuer un nouvel aspect au théorème.

Imaginons le plan recouvert par des polygones (non empiétants) de manière que

0. Chaque sommet de tout polygone est le point de rencontre de 3 polygones.

I. Les sommets des polygones coïncident (dans le même sens que dans 1°);

II. Tout polygone a 6 côtés au plus.

Fixons dans tout polygone un point intérieur arbitraire et joignons les points des polygones contigus par des lignes qui ne se croisent pas.

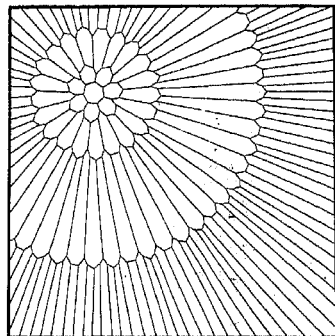


Fig. 8

Nous parviendrons ainsi à un-réseau de triangles (pouvant être curvilignes) qui satisfait aux conditions 1° et 2°. Les noeuds défectifs de ce réseau correspondent aux polygones dont le nombre de côtés est inférieur à 6. Convenons, pour le moment, de dire qu'un polygone a  $d$  défauts lorsqu'il a  $6-d$  côtés. D'après le théorème démontré, tout parquelage du plan par des polygones, satisfaisant aux conditions 0, I et II peut avoir au plus 6 défauts.

En particulier, le plan ne peut pas être recouvert par des pentagones (conformément aux conditions 0

et I). Il est cependant intéressant qu'il peut être recouvert par des heptagones, mêmes convexes, comme on le voit sur la figure 8.

## ON THE THEORY OF GRAPHS<sup>1)</sup>

BY

P. TURÁN (BUDAPEST)

Let us consider a finite set of distinct elements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  and a  $\rho$ -relation which holds between some of them. If the  $\rho$ -relation holds, for instance between  $A_1$  and  $A_2$ , we denote it by  $A_1 \rho A_2$ . We suppose only that this relation is symmetrical, i. e. with  $A_1 \rho A_2$  also  $A_2 \rho A_1$  holds, and antireflexive in the sense that  $A_i \rho A_i$  never holds. We obtain a more illustrative representation of the situation representing the elements  $A_i$  by different points  $P_i$  in the three-space and connecting  $P_\mu$  and  $P_\nu$  by a line if and only if  $A_\mu \rho A_\nu$  holds. The lines can obviously be chosen so that the only points they can have in common are the points  $P_j$ . Antireflexivity means in this representation that no  $P_j$  is connected with itself; further, that any two  $P_j$ -points are connected by one line at most. The figure so obtained we call a *graph*  $P$  (in a little more restricted sense than usual), the points  $P_j$  the *vertices*, the connecting lines the *edges* of the graph. A vertex not connected with any other vertex can occur in the graph. By a *subgraph* of  $P$  is meant a graph all of whose vertices and edges occur among those of the graph  $P$ . A graph  $P$  is called *complete* if all vertices are connected with each other. Having a graph  $P$ , we call a graph *complementary* to  $P$  and denote it by  $\bar{P}$  if it consists of all the vertices of  $P$  and of all edges *not* belonging to  $P$ . The *order* of a graph is the number of its vertices, and the *degree* of a vertex  $P_j$  is the number of edges starting from  $P_j$ .

To show the applicability of the results offered by the theory of graphs we mention first a theorem of E. Marczewski<sup>2)</sup>. According to that theorem to an arbitrary graph (finite or infinite) corresponds always a family of sets, one and only one set to each vertex, so that two vertices are connected by an edge in the graph if and only if the corresponding sets have no elements in common. Hence every theorem on graphs gives at the same time a theorem on families of sets. Another instance is concerned with Dirichlet's *Schubfachprinzip*. If we have a set of  $(n+1)$  elements each of which has exactly one of  $n$  given properties, this prin-

<sup>1)</sup> Lecture delivered at the Mathematical Institute of the Polish Academy of Sciences in Warsaw on October 18, 1952, and in Wrocław on October 27, 1952.

<sup>2)</sup> E. Szpilrajn-Marczewski, *Sur deux propriétés des classes d'ensembles*, Fundamenta Mathematicae 33 (1945), p. 303-307, especially p. 305.