C O M P T E S R E N D U S

SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE SECTION DE WROCLAW

SÉANCE DU 3 MARS 1950

W. Wolibner, *Sur les mouvements des corps friables.*

Il s'agit des corps friables, du sable par exemple. Le mouvement d'un corps friable incompressible peut différer de celui d'un corps solide seulement dans le cas où la friction est nulle ou bien la tension est nulle. Pour que le mouvement d'un corps friable compressible soit possible quand il y a friction et quand la tension est positive, il faut et il suffit que l'ellipsoïde des dilatations en chaque point soit une sphère. Dans le cas du mouvement plan, ce mouvement est la somme du mouvement d'un corps solide et du mouvement dont les vitesses sont égales respectivement à la partie réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe. Dans le cas du mouvement spacial, il est la somme du mouvement d'un corps solide à dilatation homogène et d'un mouvement dont les vitesses s'expriment par des polynômes homogènes du deuxième degré des coordonnées (avec 3 constantes arbitraires).

A. Zięba, *Un théorème de la théorie de poursuite.*

Il s'agit d'un problème de poursuite sur le plan quand il y a deux poursuivants; par exemple, considérons deux vapeurs S_1 et S_2 pourchassant un troisième S_3 en pleine mer. H. Steinhaus souligna la poursuite comme étant un jeu non aléatoire typique¹⁾.

Admettons que chaque vapeur connaisse, à tout moment, les positions en mer de chacun. Il en connaît aussi les vitesses maxima v_1, v_2, v_3 . La distance temporelle d'un point arbitraire P au vapeur S_i sera définie par le quotient PS_i/v_i ($i=1, 2, 3$). Tous les points P tels que $PS_1/v_1 = PS_2/v_2$ forment une circonférence

¹⁾ H. Steinhaus, *Definicje potrzebne do teorii gry i pościgu*, Złota Myśl Akademicka, Lwów 1923.

d'Apollonius A_{12} pour S_1 et S_2 . Nous déterminons de la même manière A_{23} et A_{31} . Ces trois circonférences ont, en général, deux points communs dits *points d'Apollonius*: appelons *point critique* K celui d'entre eux qui est le plus éloigné de S_1 et S_2 . Il s'avère que la meilleure méthode de poursuite est de diriger, à vitesses maxima, S_1 et S_2 sur K , et que la meilleure fuite pour S_3 est de mettre aussi le cap sur K avec le maximum de vitesse. (Une méthode de poursuite est d'autant meilleure qu'elle garantit aux poursuivants un temps plus court. Nous déterminons de la manière analogue la supériorité de la fuite.)

Mais il peut arriver qu'il n'y ait des points d'Apollonius. Dans ce cas, chacun des poursuivants se dirige tout droit sur S_3 — ce sera la meilleure méthode de poursuite. S_3 doit alors avoir en égard la vapeur le plus proche S_i et fuir en suivant la direction $S_i S_3$ — ce sera la meilleure fuite.

Dans le cas exceptionnel de position collinéaire des vapeurs, les points d'Apollonius, s'ils existent, sont équidistants de S_1 et S_2 . En ce cas il n'y a pas de meilleure méthode de poursuite, mais il y a un temps T tel que l'on peut associer à tout ε positif une méthode $M(\varepsilon)$ garantissant un temps $T + \varepsilon$ sans qu'il existe une méthode $M(0)$.

L'auteur fit aussi mention de la généralisation de ce problème pour l'espace.

SÉANCE DU 10 MARS 1950

C. Ryll-Nardzewski, *On the ergodic theorems (I). Generalized ergodic theorems* (voir *Studia Mathematica* 12 (1951), p. 65-73).

SÉANCE DU 24 MARS 1950

W. Wolibner, *Sur les domaines d'indétermination des fonctions analytiques aux points singuliers* (en préparation pour *Colloquium Mathematicum*).

SÉANCE DU 31 MARS 1950

H. Steinhaus, *Commentaire mathématique au problème de la coagulation du sang*.

La théorie de la coagulation du sang proposée par H. Kowarzyk divise ce problème en deux parties. Le corps actif responsable pour la coagulation est la thrombine, mais la naissance de ce produit présente elle-même des phénomènes assez com-

pliqués. Il faut donc étudier d'abord la génération de la thrombine dans une préparation supprimant tous les effets secondaires qui pourraient voiler le mécanisme considéré. C'est la première partie du problème, la seule qui est l'objet des remarques qui suivent.

La croissance de la thrombine est un procès cyclique: une molécule de thrombine rencontre une molécule de prélysin; il en résulte une molécule de lysine; celle-ci avec la prékinase crée la kinase, qui se joint à la préthrombine pour engendrer une nouvelle molécule de thrombine. Les prémolécules ne peuvent participer à ce jeu qu'une seule fois, tandis que la thrombine et la lysine conservent leur activité; la kinase ne disparaît pas à la suite de la réaction, mais la molécule y perd son activité. Pour simplifier l'exposé nous appelons *kinase* la kinase active seulement.

Soient $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ les quantités respectives de thrombine, de kinase et de lysine au moment t , en molécules-grammes. Si la préparation se comportait tout le temps de la même manière qu'au commencement, où la perte des prémolécules ne se fait encore sentir, le modèle mathématique serait le suivant:

$$(1) \quad x'(t) = a \cdot y(t), \quad y'(t) = b \cdot z(t) - x'(t), \quad z'(t) = c \cdot x(t).$$

La deuxième équation présente le terme négatif $-x'(t)$, vu que la kinase périt en créant la thrombine; elle décroît donc pour ce titre avec la même vitesse que la thrombine augmente. Les nombres a , b , c sont les réciproques des temps qui écoulent depuis la naissance d'une molécule jusqu'à son premier contact avec une prémolécule correspondante ou bien entre deux contacts consécutifs. On tire de (1), par deux dérivations,

$$z'' = ac \cdot y, \quad z''' = abc \cdot z - ac \cdot x' = abc \cdot z - a \cdot z'',$$

donc

$$(2) \quad z'''(t) + a \cdot z''(t) - abc \cdot z(t) = 0.$$

Il est facile de vérifier que l'on obtient, pour $x(t)$ et $y(t)$, la même équation différentielle (et non pas des équations analogues!):

$$(2') \quad x''' + a \cdot x'' - abc \cdot x = 0, \quad (2'') \quad y''' + a \cdot y'' - abc \cdot y = 0.$$

L'équation caractéristique

$$(3) \quad r^3 + a \cdot r^2 - abc = 0$$

a trois racines dont la somme est négative et le produit positif;

il s'ensuit que l'une d'elles est réelle et positive et les deux autres réelles négatives ou bien conjuguées et à parties réelles négatives. On peut donc écrire la solution générale du système (1):

$$(4) \quad x(t) = C \cdot e^{Rt} + \dots, \quad y(t) = D \cdot e^{Rt} + \dots, \quad z(t) = E \cdot e^{Rt} + \dots,$$

R étant la racine positive de (5) et les termes non inscrits (...) correspondant aux autres racines; ces termes tendent vers zéro pour $t \rightarrow \infty$. Or, l'observation montre une augmentation illimitée de thrombine, de sorte que C n'est pas nul; en substituant l'expression (4) pour x dans (1), on en déduit $E \neq 0$. Appelons le laps de temps nécessaire pour doubler la quantité d'une substance assujétie au régime permanent (1) *temps de duplication libre*. Ce temps ne dépend que de R , il est donc le même pour la thrombine et la lysine. Cette remarque indique le chemin conduisant à une confirmation possible de la théorie: il faut comparer les temps de duplication libre; si ces temps qui résultent des expériences sont les mêmes pour la thrombine et pour la lysine, la théorie est d'accord avec la réalité.

Le modèle (1) sert à définir le temps de duplication libre et le temps d'attente $1/a$, $1/b$, $1/c$, dont la somme donne un *cycle* (le *turnover* des Anglais). Or, le seul objet accessible à l'observation est le procès réel qui se déroule dans un récipient limité. Si l'on admet que les quantités initiales des corps sont négligeables et qu'elles deviennent X , Y , Z après un temps infini (ce qui correspond à l'épuisement de toutes les prémolécules qui existaient au début), le modèle mathématique devient plus compliqué que (1):

$$(5) \quad \begin{aligned} x'(t) &= a \cdot y(t) \cdot \frac{X - x(t)}{X}, & y'(t) &= b \cdot z(t) \cdot \frac{Y - y(t)}{Y} - x'(t), \\ z'(t) &= c \cdot x(t) \cdot \frac{Z - z(t)}{Z}. \end{aligned}$$

Le problème mathématique consiste à vérifier si le système (5) conduit aussi au temps de duplication qui sont les mêmes pour les trois corps, et à exprimer le temps libre défini plus haut par le temps réel. Ce problème n'a pas été résolu.

C. Ryll-Nardzewski, *On the ergodic theorems (II). Ergodic theorems of continued fractions* (voir *Studia Mathematica* 12 (1951), p. 74-79).

SÉANCE DU 14 AVRIL 1950

E. Marczewski, *Milieu mathématique de Wrocław 1945-1950*.
Discussion des résultats scientifiques pour le Congrès de la Science Polonaise.

SÉANCE DU 21 AVRIL 1950

W. Ślebodziński, *Variétés à connexion affine homographique* (voir W. Ślebodziński, *La géométrie textile et les variétés à connexion affine*, *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, à paraître).

SÉANCE DU 28 AVRIL 1950

R. Nowakowski, *Sur le rendement des vaches laitières*.

Pour étudier l'influence de l'hérédité sur la valeur des vaches, il faut définir cette valeur par le rendement annuel de lait, en éliminant l'influence de la saison (facteur météorologique) et de l'âge de la vache sur ce rendement. L'auteur a essayé de résoudre ce problème en employant une méthode recommandée par H. Steinhaus: si w_{ijk} désigne le rendement annuel observé pendant la k -ième année chez la vache n° i , qui se trouve dans sa j -ième période de lactation, on cherche à exprimer les w_{ijk} fournies par les observations par des sommes de la forme $x_i + y_j + z_k$, ce qui conduit à la détermination des x_i , y_j , z_k par la condition

$$\sum (w_{ijk} - x_i - y_j - z_k)^2 = \text{minimum.}$$

Les données w_{ijk} se rapportaient à 72 vaches observées systématiquement pendant 24 années.

H. Steinhaus, *The amount of change of an arc*.

The following problem has been encountered by cartographers examining the accuracy of maps: A , a river or a highway, can be traced on the map with topographic exactness; on the same map an imperfect (generalized) image B of the same object has been previously drawn; what is the amount of change symbolized by " $A \rightarrow B$ "? Classical definitions of distance (A, B) are of little help as they do not account in a simple way for the change of the shape and of the displacement as a whole.

Let F_0 be a family of equidistant parallels L_i and h their distances $L_i L_{i+1}$ ($i = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$). Let a_i (b_i) be the number of intersections of L_i with A (with B). We compute

$S_0 = \sum_i |a_i - b_i|$. Turning F_0 through an angle $2\pi k/n$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) we get F_k and the sum S_k may be derived from F_k in the same manner as S_0 from F_0 . We call N the *grand total* $\sum_{k=0}^{n-1} S_k$. The expression

$$(1) \quad Nh\pi/2n$$

gives approximately the amount of change sought for; the true amount of change may be defined as the limit of (1) for $h \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

This method engenders many interesting questions both of pure and applied geometry. If OX is a fix direction, L any straight line, ϑ the angle between L and OX , and p the distance OL , the number of intersections $L \times A$ becomes a function $a(\vartheta, p)$ of ϑ and p ; $b(\vartheta, p)$ may be analogous function for B . The amount of change may be written now as

$$(2) \quad (A, B) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi |a(\vartheta, p) - b(\vartheta, p)| d\vartheta dp.$$

Thus we have defined the distance (A, B) for any pair A, B , of arcs of finite length. This distance has the triangular property. It vanishes only for $A=B$. It becomes equal to the length of A if B vanishes and to the sum of both lengths if B recedes to infinity its length remaining constant.

To split up the amount of change into three components: the translational, the rotational and the distorsional component, we take first all arcs $\{B_i\}$ got from B by a rigid translation and designate by m the minimum of (A, B_i) for all B_i . The difference $(A, B) - m = t$ is the translational term. Now we consider all arcs $\{B_r\}$ got from B by rigid rotations and call d the minimum of (A, B_r) for all B_r . The difference $m - d = r$ is the rotational term and d is the distorsional term:

$$(3) \quad (A, B) = t + m = t + r + d.$$

Analogous concepts can be defined for arcs and surfaces in R_3 .

If we write in (2) $(a-b)^2$ instead of $a-b$ and take the square root of the integral we are led to various new concepts. This way leads too to the definition of "variance" of an arc.

E. Marczewski, *Sur les translations des ensembles*.

Soit $\varphi(t)$ une fonction non décroissante telle que $\varphi(0)=0$. Je dis qu'un ensemble E situé dans l'espace euclidien R^n est de *φ -mesure nulle* (en symbole $m_\varphi(E)=0$), lorsqu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une décomposition $E = E_1 + E_2 + \dots$ telle que

$$\varphi[\delta(E_1)] + \varphi[\delta(E_2)] + \dots < \varepsilon$$

(δ désignant le diamètre).

H. G. Eggleston²⁾ a construit un ensemble parfait E tel que

(a) on a $m_\varphi(E)=0$ pour chaque fonction φ de la forme

$$\varphi(t) = t^\alpha, \quad \text{où } \alpha > 0,$$

(b) pour tout couple de points $C \subset R^n$, il existe une translation de C contenue dans E .

On dit que $L \subset R^n$ est un *ensemble de Lusin* lorsque chaque sous-ensemble non dense de L est au plus dénombrable. Pour tout ensemble L de Lusin et toute fonction φ on a $m_\varphi(L)=0$.

Or, l'hypothèse du continu entraîne l'existence d'un sous-ensemble L de R^n , qui possède les propriétés suivantes (plus fortes que (a) et (b)):

(a') L est un ensemble de Lusin,

(b') pour tout ensemble au plus dénombrable $D \subset R^n$, il existe une translation de D contenue dans L .

Cela résulte facilement de ce que le complémentaire d'un ensemble quelconque de première catégorie jouit de la propriété (b').

SÉANCE DU 5 MAI 1950

A. Mostowski (Varsovie), *Quelques résultats récents concernant le problème de la décision*.

Le progrès récent dans l'étude du problème de la décision se rattache surtout aux travaux de A. Tarski³⁾. A l'aide des méthodes de Tarski, divers cas particuliers du problème de la décision ont été traités et résolus dans le Groupe du Fondements des Mathématiques de l'Institut Mathématique de l'Etat à Varsovie.

Ainsi p. ex. A. Grzegorzczuk a trouvé la solution négative du problème de la décision pour quelques systèmes de la Topo-

²⁾ H. G. Eggleston, *Note on certain s-dimensional sets*, *Fundamenta Mathematicae* 36 (1949), p. 40-43.

³⁾ A. Tarski, *On essential undecidability*, *Journal of Symbolic Logic* 14 (1949), p. 75-76.

logie et pour la théorie des structures de Brouwer. A. Janiczak a trouvé la solution négative du même problème pour la théorie dont les termes primitifs sont deux relations binaires R et S et dont les axiomes caractérisent R et S comme deux relations d'équivalence. (Pour une seule relation, R par exemple, le problème admet la solution positive; ce résultat a été trouvé indépendamment par Janiczak et par J. B. Thompson à Berkeley).

Les résultats de Grzegorzcyk et ceux de Janiczak paraîtront prochainement dans *Fundamenta Mathematicae*.

Quelques résultats positifs concernant le problème de la décision pour des théories dites *produits* d'autres théories ont été aussi mentionnés. Ces résultats sont en train d'être publiés dans *Journal of Symbolic Logic* 17 (1952).

L. Rieger (Prague), *On free $\aleph_\xi$ -complete Boolean algebras (with an application to Logic)* (à paraître dans *Fundamenta Mathematicae*).

SÉANCE DU 12 MAI 1950

E. Marczewski, *Sur une extension non séparable et invariante de la mesure de Lebesgue* (voir E. Marczewski, *Measures in almost independent fields of sets*, *Fundamenta Mathematicae* 38 (1951), à paraître).

S. Hartman, *Quelques propriétés ergodiques des fractions continues* (voir *Studia Mathematica* 12 (1951), p. 271-278).

C. Ryll-Nardzewski, *Sur une hypothèse de A. Rényi*.

E étant un ensemble situé sur l'intervalle $0 < x < 1$, désignons par E_t l'ensemble des restes modulo 1 des nombres $x + t$, où $x \in E$. La mesure de Lebesgue de E sera désignée par $|E|$.

D'après A. Rényi, $|E_{t_1} \dots E_{t_k}|$ est une fonction continue par rapport aux $t_1, \dots, t_k$ et on a

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 |E_{t_1} \dots E_{t_k}| dt_1 \dots dt_k = |E|^k.$$

Posons

$$m_k(E) = \inf_{t_1, \dots, t_k} |E_{t_1} \dots E_{t_k}|,$$

$$\mu_k(E) = m_k(E)/|E|^k,$$

$$M_k(\alpha) = \sup_{|E|=\alpha} \mu_k(E) \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

A. Rényi a proposé l'hypothèse que

$$(R) \quad M_k(\alpha) = 1$$

pour tout k naturel⁴⁾; il a démontré (R) pour $k=2$ et donné une évaluation de $M_k(\alpha)$ pour $k > 2$.

Je démontre que la relation (R) subsiste pour tout k naturel.

La démonstration est basée sur la notion de ε -indépendance. Les ensembles $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, Q^{(N)}$ sont dits ε -indépendants, lorsqu'on a

$$||Q^{(i_1)} \dots Q^{(i_n)}| - |Q^{(i_1)}| \dots |Q^{(i_n)}|| < \varepsilon$$

pour $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N$.

Lemme. Étant donné les nombres $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_N \leq 1$, $\varepsilon > 0$ et k naturel, il existe un système $Q^{(1)}, \dots, Q^{(N)}$ d'ensembles tels que $|Q^{(j)}| = \beta_j$ pour $j = 1, 2, \dots, N$ et que les ensembles

$$Q_{t_1}^{(1)} \dots Q_{t_k}^{(1)}, \dots, \quad Q_{t_1}^{(N)} \dots Q_{t_k}^{(N)}$$

sont ε -indépendants pour tout système $t_1, \dots, t_k$.

En posant $E = Q^{(1)} \dots Q^{(N)}$, où $Q^{(1)}, \dots, Q^{(N)}$ satisfont à la thèse du lemme pour $\beta_j = a^{1/N}$ ($j = 1, 2, \dots, N$), nous obtenons

$$m_k(E) > a^k - \varepsilon$$

pour N suffisamment grand; d'autre part $||E| - a| < \varepsilon$, d'où il résulte facilement l'égalité (R).

SÉANCE DU 19 MAI 1950

M. Katětov (Prague), *Remarks on Boolean algebras* (ce fascicule, p. 229-235).

B. Knaster, *Sur l'ensemble des points d'ordre 1 au sens de Menger* (voir B. Knaster et M. Reichbach, *Une caractérisation topologique de l'ensemble des extrémités*, à paraître dans *Fundamenta Mathematicae*).

SÉANCE DU 26 MAI 1950

J. G.-Mikusiński, *Un théorème d'unicité pour quelques systèmes d'équations différentielles considérées dans les espaces abstraits* (voir *Studia Mathematica* 12 (1951), p. 80-85).

⁴⁾ A. Rényi, *On the measure of equidistribution of point sets*, *Acta Scientiarum Mathematicarum* (Szeged) 13 (1949), p. 77-92, en particulier p. 87.

M. Katětov (Prague), *A theorem on the Lebesgue dimension* (voir Časopis pro pěstování matematiky a fyziky 75 (1950), p. 79-87).

SÉANCE DU 30 MAI 1950

E. Egerváry (Budapest), *Sur une réduction symétrique du problème de trois corps*.

L'auteur donne une réduction élémentaire et symétrique du problème de trois corps, en utilisant l'analogie entre le mouvement de trois points matériels et celui d'un corps rigide qui n'est soumis à aucune force. En introduisant les axes principaux d'inertie du système comme axes mobiles, on est conduit à choisir, comme variables dépendantes, les composants $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ de la vitesse angulaire du système des axes et trois coordonnées généralisés q_1, q_2, q_3 qui serviront à déterminer les positions des corps, relatives aux axes mobiles (q_1 et q_2 sont les rayons principaux d'inertie du système, q_3 est une coordonnée angulaire). L'énergie cinétique du système est, en termes de ces coordonnées,

$$2T = M\{q_2^2\omega_1^2 + q_1^2\omega_2^2 + (q_1^2 + q_2^2)(\omega_3^2 + \dot{q}_3^2) + 4q_1q_2\dot{q}_3\omega_3 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\}$$

(M = masse totale); l'énergie potentielle est de la forme

$$V = V(q_1, q_2, q_3).$$

En appliquant la méthode de Lagrange, on obtient immédiatement le système du 9-ième ordre

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_i} = \frac{\partial T}{\partial \omega_j} \omega_k - \frac{\partial T}{\partial \omega_k} \omega_j \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} = - \frac{\partial V}{\partial q_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Ce système ne contient que des coordonnées intrinsèques et admet deux intégrales triviales, de même que les équations d'Euler du mouvement d'un corps rigide. En appliquant ces équations au cas étudié par Sokolov ($m_1 = m_2 = m_3$; $V = \text{const} \cdot \Sigma r_{ij}^4$), l'auteur a trouvé une famille de solutions particulières, où les corps décrivent des courbes gauches.

SÉANCE DU 2 JUIN 1950

A. Alexiewicz, *Sur l'intégration dans les espaces de Banach* (voir A. Alexiewicz and W. Orlicz, *Remarks on Riemann-integration of vector valued functions*, *Studia Mathematica* 12 (1951), p. 125-132).

SÉANCE DU 6 JUIN 1950

H. Steinhaus, *Statistical appraisal*.

The ordinary method of dealing with a lot in quality control is to accept it or to reject according to the number of defectives in the sample. We propose to replace the alternative decision by a continuous one, which is to pay for the lot a variable price, depending of the value of the sample. This new method is free of parameters alpha and beta of the usual theory and is based on the principle of the least economic damage.

I have described this method of statistical appraisal in several letters written in the period February-May 1950 to the Polish Committee of Standards.

Let us have a lot of nails. Its value is the sum of values of the pieces it contains. A price-current agreed upon by both parts, the producer and the purchaser, fixes the price for a good nail and the amounts to be subtracted for different defects, as for instance for the nail being too short, too long, blunt etc. Thus x = the price of a nail, is a random variable which takes the values listed in the price-current. The whole lot of N nails has the value $N \cdot E(x)$. We draw a sample of n nails and pay for the lot $Z = N \cdot s_n$, s_n being the mean $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ of the values of the n nails examined. This game is fair because of the equality $E(Z) = N \cdot E(s_n) = N \cdot E(x)$: the price expected is equal to the true value of the lot.

The number n has to be determined. We do it by the principle of least economic damage. The damage for the collective economy arises in both cases: when the producer gets too much for his merchandise and when he gets too little. In both cases there are people working without reward and other winning the fruits of their labour. The expected loss arises because of s_n being different from $\bar{x} = E(x)$ and equals $E|Z - N\bar{x}| = N \cdot E|s_n - \bar{x}|$. Let A be the average deviation of x , $A = E|x - \bar{x}|$. Let us assume the normal distribution for x ; we get

$$E|s_n - \bar{x}| = A/\sqrt{n}.$$

But there is another loss; the cost of inspection $K + nk$, k being the cost of inspecting one item. The whole damage

$$N \cdot A/\sqrt{n} + K + nk$$

has to be minimized by a proper choice of n , which gives

$$(-1/2) \cdot NA \cdot n^{-3/2} + k = 0,$$

and

$$(1) \quad n = (NA/2k)^{2/3}.$$

This formula and $Z = N \cdot s_n$ is all needed for statistical appraisal. Neither conventional 0.05 points nor quality limits are required and the price-current, the lot size N , the inspection cost per item k , and the average deviation A are sufficient to apply the procedure; the formula (1) can be easily replaced by a nomogram as k remains constant for a given kind of merchandise and as no great accuracy is needed, because the size n of the sample has only an indirect and secondary influence on the payment Z .

How are we to determine A ? It can be done by successive approximations, taking first 10 items and computing

$$(2) \quad A_{10} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} |x_i - s_{10}| \quad (s_{10} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i).$$

Putting $A = A_{10}$ into (1) we get $n = n_{10}$. Let us suppose $n_{10} = 257$. We examine the following items, getting $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{50}$ — there is no risk of having examined too many of them as we know already that n surpasses probably 250 and, consequently, almost surely 50. Putting $A = A_{50}$ into (1) we get $n = n_{50}$; it may be 248. No greater exactitude is needed and we have only to examine $248 - 50 = 198$ new items to determinate s_{248} and $Z = N \cdot s_{248}$. The use of the average deviation instead of the standard one simplifies computations as there is no squaring of the x -values. An objection has to be answered: the hypothesis of normality of the x -distribution is by no means justified; if there are only good and bad items, for instance, and x takes only two values, z for a good nail and 0 for a bad one, the hypothesis is false. Nevertheless the procedure remains applicable if we consider dozens (or other groups) instead of particular nails. The value y of a dozen is a random variable, whose distribution approaches normality. The price-current gives the values $y_1, y_2, \dots$ of the dozens examined and A' being the average deviation of the y , formula (1) gives n' , the number of dozens to be examined; in this formula N has to be replaced by $N' = N/12$, the number of dozens in the lot.

H. Steinhaus, *Sur les séries de Taylor*.

Il s'agit des séries potentielles

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,$$

où $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$. La série (1) est donc uniformément convergente pour $|z| < 1$. A toute suite $\{c_n\} = c$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$, correspond une série de la classe (1); dans l'espace de Banach l^1 , avec $\|c\| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ comme norme, on peut donc distinguer deux sortes de points c , à savoir: les points qui fournissent des séries (1) avec une coupure $|z|=1$, et tous les autres points. Nous allons montrer que ces autres points constituent dans l^1 un ensemble de première catégorie. La coupure $|z|=1$ est donc la règle, l'existence d'un prolongement au delà de $|z|=1$ est une exception.

La démonstration part de la notion de la fonctionnelle linéaire $U(c)$ définie par

$$(2) \quad U(c) = f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

pour un z fixe, $|z| < 1$. La norme $\|U\|$ de la fonctionnelle (2) est égale à

$$(3) \quad \sup_n |n z^{n-1}|.$$

Or, en posant $z_k = (1 - 1/k) \cdot e^{ib}$, avec k naturel et b réel, on obtient une fonctionnelle $U_k(c)$, avec

$$(4) \quad \|U_k\| = \sup_n |n z_k^{n-1}| = \sup_n n (1 - 1/k)^{n-1} \geq k(1 - 1/k)^{k-1} > k/3, \quad \text{pour } k \geq 2.$$

On voit donc que $\lim_k \|U_k\| = \infty$. Il s'ensuit que la suite de fonctionnelles linéaires $U_k(c)$ ne peut converger que dans un ensemble de première catégorie, C_1 , de points c . Dans le résiduel C_{II} , la suite est divergente, donc la limite de $f'(z_k)$ n'existe pas pour $k \rightarrow \infty$. Or z_k tend vers e^{ib} , ce point est donc singulier pour $f'(z)$ et $c \in C_{II}$. En donnant à b toutes les valeurs rationnelles et en remarquant que la somme $\sum_b C_1^{(b)}$ des C_1 correspondants est un ensemble de première catégorie, on voit que tous les points e^{ib} du cercle $|z|=1$, donc tous les points de ce cercle, sont singuliers

pour $f'(z)$ et $c \in E_{II}$, où E_{II} est un résiduel. Il est évident que l'on peut remplacer f' par f dans cet énoncé, ce qui équivaut au théorème. (Voir une étude plus détaillée de C. Ryll-Nardzewski et H. Steinhaus, *Sur la série de Taylor*, *Studia Mathematica* 12 (1951), p. 159-165.)

SÉANCE DU 16 JUIN 1950

W. Wolibner, *Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction analytique soit univalente* (ce fascicule, p. 182-185).

S. Hartman, *Quelques propriétés ergodiques des fractions continues*, suite (voir *Studia Mathematica* 12 (1951), p. 271-278).

S. Hartman, *Sur la relation de Parseval généralisée*.

Les fonctions $h_t(x)$ s'appellent *uniformément intégrables* (L) dans l'intervalle $(0,1)$, quand il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$ tel que, $E \subset (0,1)$ étant un ensemble mesurable de mesure $|E| < \delta$, on a $\int_E |h_t(x)| dx < \varepsilon$ pour tout t .

Soient $f(t)$ et $g(t)$ des fonctions complexes à période 1, intégrables (L) dans $(0,1)$; soient $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi n t}$ et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2\pi n t}$ leurs séries de Fourier. Nous disons que les fonctions f et g satisfont à la relation de Parseval généralisée, quand, (C) $\sum a_n$ étant la somme de Cesàro de la série $\sum a_n$, on a

$$(1) \quad (C) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \bar{b}_n = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Théorème. Si les fonctions $h_t(x) = f(x+t) \overline{g(x)}$ ($0 < t < 1$) sont uniformément intégrables, les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ satisfont à la relation de Parseval généralisée.

Pour le démontrer, désignons par σ_ν et τ_ν les moyennes de Cesàro des séries $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi n t}$ et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_n$ respectivement et faisons usage de l'identité bien connue $\int_0^1 \sigma_\nu(x) \overline{g(x)} dx = \tau_\nu$. Il est à démontrer que

$$(2) \quad \lim_{\nu} \tau_\nu = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

En supposant que les fonctions $\sigma_\nu(x) \overline{g(x)}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) sont uniformément intégrables, on déduit de la relation

$$\lim_{\nu} \int_0^1 |\sigma_\nu(x) - f(x)| dx = 0$$

que

$$\lim_{\nu} \int_0^1 |\sigma_\nu(x) \overline{g(x)} - f(x) \overline{g(x)}| dx = 0,$$

d'où (2).

Or, les fonctions $\sigma_\nu(x) \overline{g(x)}$ sont en effet uniformément intégrables, ce qui résulte de l'hypothèse et des formules suivantes:

$$\sigma_\nu(x) = \int_0^1 f(t+x) K_\nu(t) dt, \quad \text{où } K_\nu(t) = \sum_{n=-\nu}^{\nu} \left(1 - \frac{|n|}{\nu}\right) e^{-2\pi n t},$$

$$\int_E \left| \int_0^1 f(t+x) K_\nu(t) dt \right| \overline{g(x)} dx = \int_0^1 K_\nu(t) \left| \int_E f(t+x) \overline{g(x)} dx \right| dt,$$

$$K_\nu(t) \geq 0, \quad \int_0^1 K_\nu(t) dt = 1.$$

Le théorème ci-dessus comprend divers cas connus⁵). Ainsi: l'égalité (1) est valable quand $f(t)$ est une fonction bornée ou bien quand $f(t)$ est intégrable (L') et $g(t)$ intégrable (L'), où $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Il est facile de démontrer alors que les fonctions $h_t(x)$ sont uniformément intégrables.

Il résulte aussi de notre théorème que, sous les mêmes hypothèses, le produit $f(t)g(t)$ a les coefficients de Fourier

$$c_\nu = (C) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n+\nu} b_{-n}.$$

En effet, il suffit d'appliquer la relation de Parseval généralisée aux fonctions $f(t)e^{-2\pi i \nu t}$ et $\overline{g(t)}$.

SÉANCE DU 23 JUIN 1950

Z. Moroń, *Sur l'allure asymptotique des intégrales des équations aux différences finies, linéaires et non-homogènes*.

⁵) A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów 1935, p. 88.

Considérons les équations aux différences finies de la forme

$$(a) \quad \sum_{k=0}^n a_k(x) u_k(x+k) = b(x),$$

où x parcourt tous les valeurs entières. Supposons

$$\begin{aligned} a_0(x) &\neq 0 \quad \text{pour tout } x, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} a_k(x) &= a_k \quad \text{pour } k=0, 1, 2, \dots, n, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} b(x) &= \beta, \end{aligned}$$

où $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \beta$ sont des nombres réels quelconques, $a_0 \neq 0$ et $a_n = 1$.

Théorème 1. Si toutes les racines $z_1, z_2, \dots, z_n$ de l'équation caractéristique

$$(b) \quad \sum_{k=0}^n a_k z^k = 0$$

sont distinctes, il existe au moins une intégrale $u(x)$ de l'équation (a) telle que

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \frac{\beta}{\sum_{k=0}^n a_k},$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Delta u(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \Delta^2 u(x) = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \Delta^n u(x) = 0.$$

Théorème 2. Si toutes les racines $z_1, z_2, \dots, z_n$ de l'équation caractéristique (b) sont distinctes et $|z_k| > 1$ pour $k=1, 2, \dots, n$, les relations (c) et (d) sont satisfaites pour toute intégrale de l'équation (a).

J. G.-Mikusiński, *Sur l'équation de translation* (voir J. Aczél, L. Kalmár et J. G.-Mikusiński, *Sur l'équation de translation*, *Studia Mathematica* 12 (1951), p. 112-116).

SÉANCE DU 6 OCTOBRE 1950

E. Marczewski et C. Ryll-Nardzewski, *On the conditional expectation*.

Remarks on different variants of this concept.

SÉANCE DU 13 OCTOBRE 1950

K. Matulewicz (Góra Śląska), *Sur la solution de la congruence $a^x \equiv a \pmod{x}$ en nombres composés* (ce fascicule, p. 261-263).

SÉANCE DU 27 OCTOBRE 1950

J. Łoś et C. Ryll-Nardzewski, *On the application of Tychonoff's theorem in mathematical proofs* (*Fundamenta Mathematicae*, à paraître).

E. Marczewski et M. Stark, *Le I^{er} Congrès des Mathématiciens Hongrois à Budapest*.

SÉANCE DU 3 NOVEMBRE 1950

Groupe Général des Applications de l'Institut Mathématique de l'Etat, *Une méthode taxonomique et ses applications aux sciences naturelles* (présenté par J. Perkal).

Les auteurs proposent une nouvelle méthode taxonomique qui tire parti de l'idée connue depuis 1909 et due à J. Czekanowski, à savoir de la notion de distance entre les individus. Le tableau $\{a_{ik}\}$ des distances $\overline{P_i P_k}$, où P_i ($i=1, 2, \dots, n$) désigne le i -ème objet, est point de départ. Or, au lieu de ranger les objets en une suite, ce qui était le but de la méthode ancienne, on les considère comme des points d'un plan, et on les joint par $n-1$ segments afin d'obtenir une dendrite — la méthode en question fournit la plus courte de toutes les dendrites possibles. Les auteurs ont appliqué leur méthode aux 14 villes principales de Pologne, aux 22 crânes de Ngandong et autres 12 crânes décrits par W. Stęślicka, et aux 42 trouvailles préhistoriques décrites par J. Czekanowski.

C. Ryll-Nardzewski, *Remarque sur un théorème de A. Rényi*.

Une suite $\{f_n(t)\}$ de fonctions réelles mesurables ($0 \leq t \leq 1$) s'appelle, d'après A. Rényi, *maxima* lorsqu'il existe un ensemble N de mesure nulle tel que les relations $t', t'' \notin N$ et $f_n(t') = f_n(t'')$ pour $n=1, 2, \dots$ entraînent $t' = t''$.

Posons

$$\varphi_{m_1, m_2, \dots, m_n}(t) = f_1^{m_1}(t) \cdot f_2^{m_2}(t) \cdot \dots \cdot f_n^{m_n}(t)$$

pour $m_1, m_2, \dots, m_n$ naturels.

On dit que le système $\{\varphi_{m_1, m_2, \dots, m_n}\}$ est *complet* lorsque, pour toute fonction $g(t)$ intégrable, les relations

$$\int_0^1 g(t) \varphi_{m_1, m_2, \dots, m_n}(t) dt = 0$$

pour $m_1, m_2, \dots, m_n$ naturels entraînent $g(t) = 0$ presque partout.

Je démontre le théorème suivant, qui complète un théorème de A. Rényi ⁶⁾:

Pour qu'une suite $\{f_n(t)\}$ de fonctions bornées soit maxima, il faut et il suffit que le système $\{q_{m_1, m_2, \dots, m_n}(t)\}$ soit complet.

SÉANCE DU 10 NOVEMBRE 1950

S. Hartman, Sur les coefficients de Fourier des fonctions intégrables.

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ intégrable (I).

Théorème I.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{kn}}{n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{k(2n+1)}}{2n+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_{k(2n+1)}}{2n+1} = 0.$$

Théorème II. Si la fonction $f(x) \log^+ |f(x)|$ est intégrable ⁷⁾, on a pour tout entier $s \geq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kn+s}}{n} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{kn+s}}{n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k(2n+1)+s}}{2n+1} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{k(2n+1)+s}}{2n+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_{k(2n+1)+s}}{2n+1} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{b_{k(2n+1)+s}}{2n+1} = 0. \end{aligned}$$

Le théorème II se laisse facilement déduire du théorème I, car l'hypothèse du théorème II implique ⁸⁾ que la série conjuguée $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$ est aussi une série de Fourier (d'une fonction intégrable).

Théorème III. Si la fonction $f(x) \log x$ est intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \log n}{n}$ est convergente,

⁶⁾ Présenté au 1^{er} Congrès des Mathématiciens Hongrois à Budapest (1950).

⁷⁾ Par définition $\log^+ |f| = 0$, si $\log |f| < 0$, $\log^+ |f| = \log |f|$, si $\log |f| \geq 0$.

⁸⁾ A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów 1935, p. 150.

E. Marczewski, On compact measures.

A measure (i.e. a non negative finite set function in a field M of sets) is called σ -additive if

$$\mu(E_1 + E_2 + \dots) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \dots$$

for each sequence of disjoint sets such that $E_j \in M$ and

$$E_1 + E_2 + \dots \in M.$$

A σ -additive measure in a σ -field is called σ -measure.

A class F of sets approximates the measure μ if for each $A \in M$ and each $\varepsilon > 0$ there exist $P \in F$ and $B \in M$ such that

$$B \subset P \subset A \quad \mu(A - B) < \varepsilon.$$

A class F of sets is called compact if for each sequence of sets $P_n \in F$ the relation $F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_n \neq 0$ for $n=1, 2, \dots$ implies $F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \neq 0$.

A measure is called compact if there is a compact class F which approximates μ .

In a previous communication ⁹⁾ I have formulated — in a different terminology — two following statements:

I. Every compact measure is σ -additive.

II. If a measure μ in a field M is compact, then the σ -additive extension of μ to the smallest σ -field containing M is also compact.

Let X be the Cartesian product of spaces X_t (where the index t runs over an arbitrary set T), M_t a field of subsets of X_t , and μ_t a measure in M_t (for each $t \in T$). Let us suppose $\mu_t(X_t) = 1$. Denote by M_t^* the class of all cylinders with basis belonging to M_t , and μ_t^* the measure induced in M_t^* by μ_t . Any measure μ in the smallest field containing all the fields M_t^* which coincides with μ_t^* in M_t^* is called a product of the measures μ_t .

Theorem. Each product of any compact measures is compact (and, by I, σ -additive).

This theorem may be considered as an abstract generalization of the well-known theorem formulated by Kolmogoroff ¹⁰⁾.

SÉANCE DU 17 NOVEMBRE 1950

C. Ryll-Nardzewski, On quasi-compact measures.

In this communication I make use of the terminology and notation of the preceding communication of Marczewski.

⁹⁾ E. Marczewski, On a test of the σ -additivity of measures, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky 75 (1950), p. 141.

¹⁰⁾ See e.g. P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York 1950, p. 212, Theorem A.

Each compact σ -measure μ in a σ -field M has the following property:

(Q) For each $\varepsilon > 0$ and each sequence $Q_n \in M$ there is a $Q_0 \in M$ such that $\mu(Q_0) > 1 - \varepsilon$ and that the sets $Q_0 Q_n$ form a compact class.

Each σ -measure having the property (Q) will be called *quasi-compact*.

Theorem 1. A σ -measure μ is quasi-compact if and only if, for each real-valued function f measurable with respect to μ , there exists a set $Q \in M$ such that $\mu(Q) = 1$ and that $f(Q)$ is a Borel set.

Remark 1. More generally, the values of f may be points of an arbitrary separable and complete metric space.

Remark 2. f being a real-valued measurable function, let us put

$$(*) \quad \nu(E) = \mu[f^{-1}(E)].$$

This set function is important in the probability theory and may be considered as a generalisation of the distribution function of f . It is possible to consider ν in the class B of all Borel sets¹¹⁾ or in the class B^* of all sets E such that $f^{-1}(E) \in M$ ¹²⁾. Obviously $B^* \supset B$. Theorem 1 implies that the measure μ is quasi-compact if and only if for each f the classes B^* and B are identical modulo sets of measure ν zero¹³⁾.

Theorem 2. For separable (in the sense of Halmos and von Neumann)¹⁴⁾ measures, the compactness, the quasi-compactness, and the point-isomorphism with the Lebesgue measure are equivalent.

¹¹⁾ cf. e.g. P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York 1950, p. 80 (11).

¹²⁾ A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin 1933, p. 19.

¹³⁾ Only after this communication had been presented I had a possibility of reading a new book by B. Gnedenko and A. Kolmogoroff (B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*, Москва-Ленинград 1949), in which the authors introduce the notion of *perfect measure* (p. 22). It follows from Remark 2 that the notion of perfect measure and that of quasi-compact measure are equivalent.

¹⁴⁾ P. R. Halmos and J. von Neumann, *Operator methods in classical mechanics II*, *Annals of Mathematics* 43 (1942), p. 332-350.

The communication contains also some considerations on the products of quasi-compact measures and their representation in the generalized Cantor discontinuum.

B. Knaster, *Sur un problème de Borsuk*.

Exemple d'un continu K irréductible situé dans l'espace et ayant les propriétés suivantes: $\dim_p K = 2$ pour un ensemble dense des p , il existe une transformation continue de K en un ensemble de dimension 1, à savoir la projection de K sur l'axe d'abscisses, qui n'augmente la dimension d'aucun sous-ensemble de K . La construction a été exécutée par T. Mioduszewski.

SÉANCE DU 24 NOVEMBRE 1950

S. Gołąb (Cracovie), *Sur une nouvelle méthode de la quadrature approchée*.

En tenant compte de ce que l'aire d'un secteur parabolique est égale à $2/3$ de l'aire du rectangle circonscrit sur ce secteur, l'auteur démontre quelques lemmes concernant les arcs plans arbitraires mais suffisamment réguliers et construit, à l'aide de ces lemmes, une nouvelle méthode de la quadrature approchée au moyen des trapèzes.

Cette méthode, différente de la méthode classique, jouit dans un certain sens du même degré d'exactitude que celle de Simpson.

S. Drobot, *Sur les vibrations des vilbrequins* (voir S. Drobot, *O skrętnych drganiach wałóv*, *Archiwum Mechaniki Stosowanej* 5 (1951), p. 127-146).

SÉANCE DU 1 DÉCEMBRE 1950

K. Florek, *Une remarque sur la répartition des nombres $n\xi \pmod{1}$* .

Soient ξ un nombre irrationnel et I un intervalle avec extrémité gauche et sans extrémité droite tel que $I \subset [0, 1)$. En désignant par $R(a)$ le reste modulo 1 du nombre a , nous écrivons successivement tous les nombres naturels

$$(1) \quad n_1, n_2, \dots, n_i, \dots$$

pour lesquels $R(n_i \xi) \in I$.

Nous formons la suite des différences de la suite (1):

$$(2) \quad n_2 - n_1, n_3 - n_2, \dots, n_{i+1} - n_i, \dots$$

Théorème. 1° Il n'y a que trois nombres différents qui peuvent figurer dans la suite (2), à savoir q_1 , q_2 et q_3 , où q_1 est le

plus petit des nombres q , pour lesquels $R(q\xi) < |I|$ et q_2 est le plus petit des nombres q , pour lesquels $R(q\xi) > 1 - |I|$, $q_3 = q_1 + q_2$.

2° Si $q_1 \neq q_2$ (ce qui est vrai toujours quand $|I| < 1/2$), alors dans la suite (2) figurent q_1 et q_2 , tandis que q_3 y figure ou non. Si $|I| > 1/2$, alors $q_1 = 1$ ou bien $q_2 = 1$; si, en plus, $q_1 = q_2$, alors dans la suite (2) figure aussi $q_3 = 2$.

3° Si le terme q figure au moins une fois dans la suite (2), il y figure alors avec une fréquence bien déterminée $fr(q) > 0$.

4° Si la suite (2) se compose de termes $q^{(i)}$ ($i = 1, 2$ ou $i = 1, 2, 3$), alors $\sum q^{(i)} fr(q^{(i)}) = 1/|I|$.

La proposition 4° est une conséquence évidente de 3° et du théorème sur la répartition uniforme des nombres $R(n\xi)$ dans $[0, 1]$.

La démonstration des propositions 1°, 2° et 3° s'appuie sur un raisonnement tout à fait élémentaire et ne fait pas appel aux fractions continues. C'est par cela surtout qu'elle diffère de la démonstration que N. B. Slater a donnée pour un résultat semblable¹⁵). Cet auteur a trouvé, lui aussi, que dans la suite (2) ne peuvent figurer que trois nombres différents; d'ailleurs il n'a pris en considération que les intervalles I ayant 0 pour extrémité gauche. Quant aux nombres q_1 , q_2 et q_3 , Slater les caractérise moyennant le développement du nombre ξ en fraction continue.

SÉANCE DU 5 DÉCEMBRE 1950

C. Ryll-Nardzewski, *Le rôle du principe d'induction complète dans les arithmétiques élémentaires.*

Considérons une langue de l'arithmétique, qui ne contient que 1° les variables $x, y, z, \dots$ désignant les nombres naturels et 2° les signes constants suivants:

(a) signes logiques: $\rightarrow, ', \wedge, \Pi, \Sigma, =$ désignant: implication, négation, conjonction, grand et petit quantificateurs et identité;

(b) signes arithmétiques: $+, \cdot, 1$, désignant: addition, multiplication et unité.

Les termes: *fonction propositionnelle, proposition et proposition vraie* (ou, plus précisément, vrai dans l'arithmétique des nombres naturels) seront employés dans le sens ordinaire.

¹⁵ N. B. Slater, *The distribution of the integers for which $\{\theta N\} < \varphi$* , Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 46 (1950), p. 525-534, surtout Theorem 4, p. 531.

Dans cette langue, le principe d'induction complète ne peut pas être formulé en une seule proposition: il s'exprime par la suite de toutes les propositions

$$(I_\Phi) \quad \{\Phi(1) \wedge \prod_x [\Phi(x) \rightarrow \Phi(x+1)]\} \rightarrow \prod_x \Phi(x),$$

où Φ parcourt toutes les fonctions propositionnelles contenant la variable libre x .

Théorème. Il n'existe aucun système fini de propositions vraies $A_1, A_2, \dots, A_n$ dont résulteraient toutes les propositions (I_Φ) .

SÉANCE DU 15 DÉCEMBRE 1950

S. Hartman, *Sur une relation entre les suites.*

Je dis que les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ croissant vers l'infini sont éloignées, quand il existe pour tout C un nombre N tel que $n, m > N$ entraîne $|a_n - b_m| > C$.

Il est facile de démontrer, que pour $a, b > 1$ les suites $\{a^n\}$ et $\{b^n\}$ ne sont pas éloignées dans le cas et seulement dans le cas où il existe un C tel que l'inégalité

$$\left| x \frac{\log a}{\log b} - y \right| < \frac{C}{b^y}$$

admet une infinité de solutions en nombres entiers x et y . Il en résulte que, si $\{a^n\}$ et $\{b^n\}$ ne sont pas éloignées, $\log a / \log b$ est ou bien rationnel ou bien un nombre de Liouville. Il en résulte de même que, pour presque tout couple de nombres $a > b > 1$, les suites $\{a^n\}$ et $\{b^n\}$ sont éloignées. Cependant, elles ne le sont pas pour tout couple $a > b > 1$. J'ignore, si les suites $\{2^n\}$ et $\{3^n\}$ sont éloignées¹⁶).

Il existe une famille à puissance $\aleph_1$ de suites $\{a^n\}$ éloignées deux à deux. J'ignore, s'il existe une telle famille à puissance $2^{\aleph_0}$. W. Sierpiński a construit d'une manière effective une famille à puissance $2^{\aleph_0}$ de suites éloignées deux-à-deux, mais d'une autre forme. Ce sont les suites

$$\{a_n(x)\} = \{2^n (Enx + 1)^2\} \quad (x > 1).$$

¹⁶ J. Bonder a remarqué qu'il en est ainsi vu un théorème de Gelfond (cf. p. ex. A. O. Gelfond, *Приближение алгебраических чисел алгебраическими эсе числами и теория трансцендентных чисел*, Успехи математических наук IV, 4 (1949), p. 19-49, surtout p. 40).