P R O B L È M E S

C. KURATOWSKI (VARSOVIE)

P 86, 87, 88, 89. Formulés dans la communication *Sur quelques problèmes topologiques concernant le prolongement des fonctions continues.*

Ce fascicule, p. 191.

K. BORSUK (VARSOVIE)

P 90, 91. Formulés dans la communication *An example of a finite dimensional continuum having an infinite number of Cartesian factors.*

Ce fascicule, p. 193.

C. KURATOWSKI ET A. MOSTOWSKI (VARSOVIE)

P 92. Formulé dans la communication *Sur un problème de la théorie des groupes et son rapport à la Topologie.*

Ce fascicule, p. 212 et 215.

P 92, R 1. La communication de A. Mostowski, *Groups connected with Boolean algebras* contient la solution partielle de ce problème.

Ce fascicule, p. 216-219.

E. MARCZEWSKI (WROCŁAW)

P 93. Formulé dans la communication *Sur les congruences et les propriétés positives d'algèbres abstraites.*

Ce fascicule, p. 226.

J. ŁOŚ (WROCŁAW)

P 94. Formulé dans la communication *Un problème concernant le prolongement des fonctions aux σ-mesures.*

Ce fascicule, p. 273.

A. MOSTOWSKI (WARSAW)

P 95. By *function* we mean in this problem a function with one or more integral non-negative arguments which assumes exclusively non-negative integral values.

A function $F(x_1,\dots,x_n,y)$ is called *normal* or *super-normal* if the equation $F(x_1,\dots,x_n,y)=0$ has at least one solution or exactly one solution in y for arbitrary $x_1,\dots,x_n$. The least solution y is denoted by $\mu_F(x_1,\dots,x_n)$.

A class K of functions is called *closed* if it contains the compound function $F(G_1,\dots,G_n)$ whenever it contains functions $F(x_1,\dots,x_n)$, $G_1(y_1,\dots,y_p),\dots,G_n(z_1,\dots,z_q)$.

Let K be an arbitrary class of functions and form a smallest closed class $K^*\supset K$ (or $K^{**}\supset K$) which contains the function μ_F for every normal (or super-normal) function $F\epsilon K^*$ (or $F\epsilon K^{**}$).

Evidently $K^{**}\subset K^*$. Does the converse inclusion $K^*\subset K^{**}$ hold

(i) for arbitrary K?

(ii) if K contains the functions

(*) $\quad x+y,\quad x\cdot y,\quad \max(0,x-y),\quad 0^{x-y}$ (where $0^0=1$), $x-[\sqrt{x}]^2$,

(⁑) $\quad 0_n(x_1,\dots,x_n)=0,\quad I_n^k(x_1,\dots,x_n)=x_k \qquad (k\leqslant n,\ n=1,2,\dots)$?

(iii) if K contains exclusively the functions (*) and (⁑)?

New Scottish Book, Probl. 106, 6. V. 1950

M. KATĚTOV (PRAGUE)

P 96. Let P be a normal space[1]). Do there always exist, for any decreasing sequence of closed sets $F_n\subset P$ such that

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_n = 0,$$

open sets $G_n\supset F_n$ such that

$$\prod_{n=1}^{\infty} G_n = 0\,?$$

New Scottish Book, Probl. 107, 26. VI. 1950

P 97. Is every perfectly normal space[1]) fully normal[2])?

New Scottish Book, Probl. 108, 31. VI. 1950

P 98. What conditions are necessary and sufficient in order that a Banach space be fully normal[2]) under its weak topology? (Every reflexive Banach space is so; nevertheless, it seems that it is not even known whether every Banach space is normal under its weak topology).

New Scottish Book, Probl. 110, 31. VI. 1950

[1]) A space is called *normal* if for every closed and disjoint sets A and B there exists an open set G such that $A \subset G$ and $\overline{G} \cdot B = 0$. A space is callep *perfectly normal* if it is normal and every closed subset of it is G_δ. Cf. e. g. C. Kuratowski, *Topologie I*, 2me édition, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1948, p. 123.

[2]) A space P is called *fully normal* if it is normal and for every open covering (V_α) of P there exists an open covering (W_β) of P such that for every $x \in P$ the reunion of W_β's such that $x \in W_\beta$ is contained in some V_α. Cf. e. g. A. H. Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society 54 (1948), p. 977-982.

R. SIKORSKI (WARSAW)

P 99. Let S be Stone's (bicompact, totally disconnected Hausdorff) space constructed for a Boolean σ-algebra $\boldsymbol{A}$ (i.e. S is the space of all prime ideals of $\boldsymbol{A}$). Let $\boldsymbol{Z}$ be the least σ-field (i. e. a σ-additive and complementative class of subsets of S) containing all sets which are simultaneously open and closed in S. Let $\boldsymbol{N}^0$ be the class of all nowhere dense sets $X \subset S$ such that

$$X = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \ldots,$$

where X_n is together open and closed in S $(n=1,2,3,\ldots)$; and let $\boldsymbol{N}$ be the σ-ideal generated by $\boldsymbol{N}^0$ (i. e. the class of all subsets of sets $Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots$, where $Z_n \in \boldsymbol{N}^0$, $n=1,2,3,\ldots$).

Suppose h is a σ-homomorphism (i. e. a σ-additive and complementative transformation) of the Boolean σ-algebra $\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{N}$ (isomorphic to $\boldsymbol{A}$) into another Boolean σ-algebra $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{I}$, where $\boldsymbol{X}$ and $\boldsymbol{I}$ are respectively a σ-field and a σ-ideal of subsets of a set $\mathscr{X}$.

Does a point mapping φ of $\mathscr{X}$ into S exist such that

$$\varphi^{-1}(Z) \in \boldsymbol{X} \quad \text{and} \quad h([Z]) = [\varphi^{-1}(Z)] \quad \text{for every } Z \in \boldsymbol{Z}?$$

$[Z]$ denotes here the element (coset) in $\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{N}$ determined by the set Z, and analogously $[\varphi^{-1}(Z)]$ denotes the element in $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{I}$ determined by the set $\varphi^{-1}(Z)$.

The affirmative answer to this question will be a generalization of a previous result of the author[3]).

Warsaw, September 10, 1950

[3]) R. Sikorski, *A theorem on the structure of homomorphisms*, Fundamenta Mathematicae 36 (1949), p. 245-247.

B. KNASTER (WROCŁAW)

P 100. Appelons avec Kuratowski *propriété de Janiszewski* et désignons par (J) la propriété suivante d'un espace topologique E:

C_1 et C_2 étant des sous-continus de E (c'est-à-dire des sous-ensembles fermés dans E et connexes) et leur partie commune $C_1 \cdot C_2$ n'étant pas connexe, il en est de même du complémentaire de leur somme (c'est-à-dire de l'ensemble $E-(C_1+C_2)$)[4]).

Est-il vrai que tout espace connexe ayant la propriété (J) et dans lequel le complémentaire de tout point est connexe a pour image biunivoque et continue la surface sphérique?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 170, 29. X. 1951

[4]) La propriété (J) a été établie par Z. Janiszewski en 1913 pour le plan (en n'admettant que des continus compacts) ou — ce qui revient au même — pour la surface sphérique (sans cette restriction). C. Kuratowski a démontré en 1929 que, réciproquement, si E est compact, connexe, localement connexe, pourvu de la propriété (J) et le complémentaire de tout point y est connexe, E est homéomorphe à la surface sphérique (à 2 dimensions); c'est donc une caractérisation topologique de la surface sphérique (voir de cet auteur *Topologie II*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1950, p. 353, 354 et 374).

K. ZARANKIEWICZ (VARSOVIE)

P 101. Soit R_n, où $n>3$, un réseau plan formé de n^2 points rangés en n lignes et n colonnes.

Trouver le plus petit nombre naturel $k_2(n)$ tel que tout sous-ensemble de R_n formé de $k_2(n)$ points contienne 4 points situés simultanément dans 2 lignes et dans 2 colonnes de ce réseau.

D'une façon générale, trouver le plus petit nombre naturel $k_j(n)$ tel que tout sous-ensemble de R_n formé de $k_j(n)$ points contienne j^2 points situés simultanément dans j lignes et dans j colonnes de ce réseau.

Varsovie, 22. VIII. 1951

A. GÖTZ ET A. RYBARSKI (WROCŁAW)

P 102. L'arc d'une surface convexe joignant deux points A et B est dit *le plus court chemin entre A et B*, si sa longueur est égale à la limite inférieure des longueurs de tous les arcs joignant ces points[5]). Il y a des cas où deux points d'une surface

[5]) A. D. Aleksandrov, *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей*, Москва-Ленинград 1948, p. 15.

peuvent être joints par plusieurs arcs qui sont des chemins les plus courts (par exemple deux points diamétralement opposés d'une sphère). La sphère est-elle la seule surface qui jouit de la propriété suivante: s'il y a entre deux points plusieurs arcs qui sont des chemins les plus courts, il y en a une infinité? (On exclut, bien entendu, le cas où la propriété demandée est satisfaite dans le vide).

Nouveau Livre Écossais, Probl. 147, 12. IV. 1951

H. STEINHAUS (WROCŁAW)

P 103. L'ensemble plan Z n'est pas vide et toutes les distances entre ses points surpassent 1. L'ensemble E est non-vide et borné. $T(E)$ désigne un déplacement de E (en d'autres mots $T(E)$ est congruent avec E). Est-il vrai qu'il existe toujours un T tel que la puissance de EZ diffère de celle de $T(E)Z$?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 138, 7. III. 1951

P 104. Soit $\{s_n\}$ une suite limitable-A, ce qui veut dire qu'il existe une limite finie $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\sum\limits_{h=1}^{\infty} s_n x^n$. Soit $s_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} s_k$.

Peut-on démontrer que la suite $\{s_n^{(1)}\}$ est limitable-A?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 153, 24. V. 1951

P 105. Les fonctions $f_n(t)$ étant indépendantes (au sens stochastique) deux à deux, est-il vrai que l'on ait

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(t) = \text{const. presque partout,}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(t) = \text{const. presque partout?}$$

Nouveau Livre Écossais, Probl. 154, 24. V. 1951

Remarques faites pendant la correction d'épreuves.

P96, R1. Ce problème a été posé aussi par C. H. Dowker, *On countably paracompact spaces,* Canadian Journal of Mathematics 3 (1951), p. 219-224.

P97, R1. Ce problème a été posé et résolu négativement par R. H. Bing, *Metrisation of topological spaces,* Canadian Journal of Mathematics 3 (1951), p. 175-186, Example 4.