P R O B L È M E S

P59, R1. Voici les remarques de H. Steinhaus (Wrocław): Le problème a été mal posé. La relation

$$\text{(R)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{x_1(t)+\ldots+x_n(t)}{n} = p \qquad \text{pour presque tous les } t,$$

résulte, d'après Kolmogoroff [1]), de l'indépendance en bloc des fonctions équivalentes (c'est-à-dire aux distributrices égales) $x_i(t)$, en supposant l'existence de premiers moments $p=\int_0^1 x_1(t)\,dt$. L'énoncé du problème rappelle les démonstrations usuelles, n'employant que l'indépendance à quatre, cela veut dire celle de tout système x_j, x_k, x_l, x_m extrait de $\{x_i(t)\}$. Or, ces démonstrations tirent parti de l'existence de quatrièmes moments $\int_0^1 x_i^4(t)dt$, donc, a fortiori, de deuxièmes moments $\int_0^1 x_i^2(t)dt$; d'après un théorème de Banach sur la moyenne des fonctions orthogonales (que j'ai généralisé aux suites incomplètes) [2]) la relation (R) résulte alors déjà de l'indépendance de paires x_j, x_k. La question, si le nombre 4 peut etre remplacé par 3 (indépendance de triplets), ne se pose donc dans le cas ou l'on ignore l'existence des moments d'ordre 2, car alors on ne sait même pas, si l'hypothèse de l'indépendance à quatre engendre (R); cette question ne se pose non plus dans le cas de deuxièmes moments finis, car alors l'indépendance de paires implique déjà (R). Il ne pourrait donc, dans l'état actuel de nos connaissances sur la loi forte des grands nombres (R), être question de triplets.

I, 4, p. 335 et 336. Wrocław, 27. X. 1950

[1]) Cf. p. ex. P. R. Halmos, *Measure Theory,* New York 1950, p. 205, (7).

[2]) S. Banach, *Sur la valeur moyenne des fonctions orthogonales,* Bulletin de l'Académie Polonaise, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Série A, Année 1919 (1920), p. 66-72, en particulier p. 69.

A. RÉNYI, C. RÉNYI ET J. SURÁNYI (BUDAPEST)

P 71. Formulé dans la communication *Sur l'indépendance de domaines simples dans l'espace euclidien à n dimensions.*

Ce fascicule, p. 135.

P 72. Formulé ibidem.

P 73. Formulé ibidem.

W. SIERPIŃSKI (VARSOVIE)

P 74. φ et ψ étant deux types d'ordre tels que $\varphi^2=\psi^2$, a-t-on nécessairement $\varphi=\psi$?

P 75. Existe-t-il une suite infinie d'ensembles ordonnés dénombrables $E_1, E_2, \ldots$, telle que, m et n étant deux nombres naturels distincts, l'ensemble E_m ne contienne aucun sous-ensemble semblable (au sens de l'ordre) à E_n?

P 75, R 1. On peut démontrer que la solution négative de ce problème implique l'hypothèse de R. Fraïssé [3]), d'après laquelle il n'existe aucune suite infinie descendante d'ensembles dénombrables $H_1 \supset H_2 \supset \ldots$, telle que l'ensemble H_1 soit ordonné et que, pour tout n naturel, l'ensemble H_n ne soit pas semblable (au sens de l'ordre) à un sous-ensemble de l'ensemble H_{n+1}.

Varsovie, 16. III. 1950

[3]) Voir R. Fraissé, *Sur la comparaison des types d'ordres*, Comptes Rendus (Paris) 226 (1948), p. 1330-1331.

R. SIKORSKI (WARSAW)

P 76. For every $t \epsilon T$ ($\overline{\overline{T}} > \aleph_0$) let $\mathfrak{X}_t$ be a Hausdorff space. Let $\boldsymbol{U}$ be the class of all sets (Cartesian products) $P_{t\epsilon T} G_t$ where G_t is an open subset of $\mathfrak{X}_t$ and the set $E_{t\epsilon T}(G_t \neq \mathfrak{X}_t)$ is finite. Analogously let $\boldsymbol{U}^*$ be the class of all sets $P_{t\epsilon T} G_t$ where G_t is open in $\mathfrak{X}_t$ and the set $E_{t\epsilon T}(G_t \neq \mathfrak{X}_t)$ is at most denumerable.

The set $P_{t\epsilon T}\mathfrak{X}_t$ with $\boldsymbol{U}$ as the class of neighbourhoods is a Hausdorff space (the usual topological product of the spaces $\mathfrak{X}_t$) denoted by $\mathfrak{X}$. The set $P_{t\epsilon T}\mathfrak{X}_t$ with $\boldsymbol{U}^*$ as the class of neighbourhoods is another Hausdorff space denoted by $\mathfrak{X}^*$.

If a set $X \subset P_{t\epsilon T}\mathfrak{X}_t$ is of the first category in the space $\mathfrak{X}^*$, is it necessarily of the first category in the space $\mathfrak{X}$ also?

P 76, R 1. The case when the spaces $\mathfrak{X}_t$ are bicompact and totally disconnected is the most interesting for the author. The problem is in this case closely related to some problems of Cartesian multiplication of Boolean algebras [4]). The affirmative answer is then equivalent to the statement that the minimal σ^*-product [5]) of Boolean algebras is the least element in the partly ordered set L^* [6]).

P 77. $\mathfrak{S}$ is a totally disconnected bicompact Hausdorff space. $\boldsymbol{Z}$ is the least σ-field (i. e. a σ-additive and complementative class of subsets of $\mathfrak{S}$) containing all sets which are simultaneously open and closed in $\mathfrak{S}$. $\boldsymbol{N}^0$ is the class of all nowhere dense sets $X \subset \mathfrak{S}$ such that $X = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \ldots$, where X_n is both open and closed in $\mathfrak{S}$ ($n=1,2,\ldots$). $\boldsymbol{N}$ is the σ-ideal [7]) generated by $\boldsymbol{N}^0$, i. e. the class of all subsets of sets $Z_1+Z_2+Z_3+\ldots$, where $Z_n \epsilon \boldsymbol{N}^0$ for $n=1,2,\ldots$

Let a set $Q \subset \mathfrak{S}$ be of the second category (i. e. Q is not the sum of a sequence of nowhere dense sets) such that $Q \epsilon \boldsymbol{Z}$. Does always an open set $G \neq 0$ exist such that $G - Q \epsilon \boldsymbol{N}$?

P 77, R 1. This problem is closely connected with the paper quoted above [4]). The affirmative answer is equivalent to the statement that the minimal σ-extension [8]) of a Boolean algebra $\boldsymbol{A}$ is the least (in the sense of the ordering relation $\leqslant$ defined there [9])) σ-extension of $\boldsymbol{A}$.

Warsaw, September 10, 1950

P 78. Is every Hausdorff space having a countable open basis, a continuous interior image of a separable metric space? (A mapping is *interior* if it transforms open sets into open sets [10])).

Warsaw, November 2, 1950

[4]) See R. Sikorski, *Cartesian products of Boolean algebras*, Fundamenta Mathematicae 37 (1950), p. 25-54.

[5]) Ibidem, p. 46.

[6]) Ibidem, p. 45. See also p. 51, footnote [50]).

[7]) A class $\boldsymbol{I}$ of subsets of a set X is a σ-ideal if it is σ-additive and hereditary (i. e. $X \subset Y \epsilon \boldsymbol{I}$ implies $X \epsilon \boldsymbol{I}$).

[8]) Ibidem, p. 33.

[9]) Ibidem, p. 51 (theorem 13.2) and p. 45.

[10]) This problem is closely related with the author's paper *Remarks on Closure Algebras* to appear in Fundamenta Mathematicae 38 (1951).

A. D. WALLACE (NEW ORLEANS, Louis.)

P 79. Let X and Y be Banach spaces and let f be a continuous function on X to Y such that, if U is open, then so also is $f(U)$. Assume moreover that

(1) For each real p there is a real q such that $\|x\|>q$ implies $\|f(x)\|>p$.

Under what conditions can one assert that $f(X)=Y$?

P 79, R 1. Taking $X=Y=$complex numbers and $f(x)=\exp x$ it is clear that something beyond continuity and openness is necessary. On the other hand one has the desired conclusion in case both the cases (i) f is additive [11]) or (ii) X is finite dimensional. Since the conditions hold for $f+y_0$ if they hold for f it is enough to show that f attains the value Θ. To this end let $m=$ g. l. b. $\|f(x)\|$ and select q so that (1) holds with $p=m$. Now the closed solid sphere of radius q about Θ is compact and f is continuous so there is an x_0 for which $\|f(x_0)\|=m$. Under the assumption that m is positive we note that $f(x)$ is open and contains a point of the boundary of the sphere of radius m about Θ and hence an interior point, contrary to the fact that $\|f(X)\|$ cannot be less than m.

Professor B. J. Pettis remarks that if "continuous" is replaced by "weakly continuous", the result holds when X is weakly compact, with only minor changes in the proof.

New Orleans, November 12, 1949

[11]) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1932, p. 38.

S. MAZUR (VARSOVIE)

P 80. Soit F une famille de fonctions réelles continues, définies dans l'intervalle $I=\langle 0,1\rangle$ et satisfaisant aux conditions:

1° pour tout a et b réels et pour tout couple $f(x), g(x)$ de fonctions appartenant à F, la fonction $af(x)+bg(x)$ appartient à F;

2° si une suite de fonctions qui appartiennent à F converge partout dans I vers une fonction continue, celle-ci appartient à F;

3° pour chaque suite $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de nombres appartenant à I et chaque suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de nombres réels, il existe une fonction $f \epsilon F$, telle que $f(t_j)=x_j$ pour $j=1,2,\ldots,n$.

La famille F contient-elle toutes les fonctions réelles, continues dans I?

Varsovie, 15. X. 1949

J. DIEUDONNÉ (NANCY)

Dans le problème qui suit, les mots „espace compact" sont pris au sens de N. Bourbaki, et signifient donc „espace de Hausdorff bicompact" dans la terminologie de Alexandroff-Urysohn. Une *mesure de Radon* sur un espace compact E est une mesure positive μ, pour laquelle tous les ensembles compacts ont une mesure finie, et telle en outre que, pour tout ensemble compact $K\subset E$, le nombre $\mu(K)$ est la borne inférieure des mesures des ensembles ouverts $U\supset K$.

P 81. Soient E et F deux espaces compacts non métrisables, λ et μ deux mesures de Radon sur E et F respectivement. On définit une mesure de Radon ν sur l'espace produit $E\times F$ par la condition que, si A est ouvert dans E et B est ouvert dans F, $\nu(A\times B)=\lambda(A)\cdot\mu(B)$. Si N est un ensemble de mesure nulle dans $E\times F$, existe-t-il pour tout $\varepsilon>0$ un ensemble ouvert dans $E\times F$ de mesure $<\varepsilon$, contenant N, et réunion *dénombrable* d'ensembles ouverts de la forme $A\times B$, où A est ouvert dans E et B ouvert dans F?

Nancy, 16. XII. 1949

J. G.-MIKUSIŃSKI (WROCŁAW)

P 82. Soient $a(t)$, $b(t)$ deux fonctions continues pour $t\geqslant 0$, dont l'une au moins n'est pas identiquement nulle et $f(\lambda,t)$, $g(\lambda,t)$ deux fonctions qui possèdent des dérivées partielles f_λ, g_λ continues dans le domaine $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, $t\geqslant 0$. En utilisant un théorème de Titchmarsh sur le produit de composition [12]), il est facile de démontrer que l'identité

$$(1)\qquad \int_0^t [a(t-\tau)f(\lambda,\tau)+b(t-\tau)g(\lambda,\tau)]\,d\tau=0$$

entraîne

$$(2)\qquad \int_0^t [f_\lambda(\lambda,t-\tau)g(\lambda,\tau)-f(\lambda,t-\tau)g_\lambda(\lambda,\tau)]\,d\tau=0.$$

Peut on affirmer que, réciproquement, l'identité (2) entraîne l'existence de deux fonctions a et b dont l'une au moins n'est pas nulle identiquement et telles que (1) ait lieu?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 103, 5. V. 1950

[12]) E. C. Titchmarsh, *The zeros of certain integral functions*, Proceedings of the London Mathematical Society 25 (1926), p. 286, Theorem VII.

P83. L'équation $x^2 = a$ est-elle toujours soluble dans le corps des opérateurs [13]?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 104, 5. V. 1950

[13]) Celui-ci a été défini dans le travail: J. G.-Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica 11 (1949), p. 41-70, en particulier p. 43-44.

S. HARTMAN (WROCŁAW)

Posons pour tout couple f, g de fonctions complexes définies sur tout l'axe réel:

$$\varrho\,(f,g) = \sup_{-\infty<x<+\infty} |f(x)-g(x)|,$$

$$\varrho_p(f,g) = \left\{ \sup_{-\infty<x<+\infty} \int_x^{x+1} |f(t)-g(t)|^p\,dt \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p \geqslant 1),$$

$$\varrho_p^B(f,g) = \left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)-g(t)|^p\,dt \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p \geqslant 1).$$

Une fonction f est dite *uniformément presque périodique* (u. p. p.), ou *presque périodique de classe* S^p (p. p. S^p), ou bien *presque périodique de classe* B^p (p. p. B^p) lorsqu'elle est la limite d'une suite de polynômes $w_n(x) = \sum_{k=1}^{N_n} a_k^{(n)} e^{i\lambda_k^{(n)}x}$ ($a_k^{(n)}$ étant complexes et $\lambda_k^{(n)}$ — réels) selon la métrique ϱ, ϱ_p, ϱ_p^B respectivement.

P84. On sait que, f étant u. p. p. et $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ étant une fonction bornée sur la droite, g est u. p. p. [14]). En remplaçant l'hypothèse sur g par une évaluation plus faible de la valeur absolue de cette fonction, voir si g est presque périodique dans un sens plus large. En particulier constater, si l'hypothèse $\varrho_p^B(0,g) < +\infty$ implique que g est p. p. B^p.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 87, 6. VII. 1949

[14]) Cf. H. Bohr, *Fastperiodische Funktionen*, Ergebnisse der Mathematik I, Berlin 1932, p. 50-52.

P85. On sait [15]) que, $\sum_\lambda a_\lambda e^{i\lambda x}$ étant la série de Fourier d'une fonction f qui est p. p. S^1, et $\sum_\lambda \frac{a_\lambda}{i\lambda} e^{i\lambda x}$ la série de Fourier d'une fonction g qui est u. p. p., on a $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \text{const.}$ En remplaçant l'hypothèse que g est u. p. p. par celle que g est p. p. B^2 (ou, ce qui est équivalent, que $\sum \left|\frac{a_\lambda}{\lambda}\right|^2 < \infty$), voir quel est le rapport entre $g(x)$ et $\int_0^x f(t)\,dt$; en particulier constater, si $\int_0^x f(t)\,dt$ est alors aussi p. p. B^2. Il en résulterait que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left| g(x) - \int_0^x f(t)\,dt - \text{const} \right|^2 dx = 0.$$

Nouveau Livre Écossais, Probl. 88, 6. VII. 1949

[15]) Cf. S. Hartman, *Sur une méthode d'estimation de moyennes de Weyl pour les fonctions périodiques et presque périodiques*, Studia Mathematica 12 (à paraître) et P. D. Marke, *Bidrag til Teorien for Integration og Differentiation af vilkaarlig orden*, København, 1942, p. 115.