

C O M P T E S R E N D U S

SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE
SECTION DE WROCŁAW

SÉANCE DU 28 SEPTEMBRE 1948

E. Čech (Prague), *Sur les courbes de Bertrand.*

Soient dans l'espace euclidien à n dimensions \mathcal{E}^n deux courbes $C_1(t)$ et $C_2(t)$, rapportées au même paramètre t ; soient $T_1(t)$ et $T_2(t)$ leurs n -èdres de Frenet issus des points correspondants. S'il existe un mouvement à un paramètre, portant simultanément le couple $T_1(t_0)$ et $T_2(t_0)$ au couple $T_1(t)$ et $T_2(t)$ correspondant à une valeur arbitraire de t , j'appelle $C_1(t)$ et $C_2(t)$ *courbes de Bertrand*. La notion est classique pour $n=3$, mais nouvelle pour $n>3$. Pour $n=3$, on a entre les deux courbures k_1 et k_2 une relation linéaire $c_1k_1 + c_2k_2 + c_3 = 0$ à coefficients constants. Pour $n=4$, on a deux relations linéaires entre les trois courbures k_1 , k_2 et k_3 . C'est un exemple très particulier de recherches fort variées que l'on peut faire dans un espace kleinéen quelconque.

L'auteur signale un cadre complet des formules relatives au cas $n=4$.

SÉANCE DU 22 OCTOBRE 1948

S. Hartman, *Remarques sur les suites $\{(\sin n)^n\}$ et $\{(\cos n)^n\}$* (voir *Sur une condition supplémentaire dans les approximations diophantiques*, ce fascicule, p. 48-51, en particulier p. 50 et 51).

R. S. Ingarden, *Interpretation of the phase difference angle and its application to A. C. measurements by means of the oscillograph* (voir *Acta Physica Polonica* 9 (1948), p. 149-150).

SÉANCE DU 29 OCTOBRE 1948

H. Spencer-Jones (Cambridge), *Measuring of sun distance.*

Principes et méthodes employées pour mesurer la distance du Soleil depuis l'antiquité jusqu'à nos jours. Procédés les plus récents; quelques résultats de l'auteur.

K. Kuratowski (Varsovie), *Sur l'espace des transformations homéomorphes.*

Démonstration du théorème suivant de l'auteur:

X étant un F_σ dans un espace compact et Y étant compact, l'ensemble des transformations homéomorphes de X en sous-ensembles de Y est un G_δ dans l'espace de toutes les transformations continues de X en sous-ensembles de Y (la convergence des fonctions continues étant conçue comme convergence uniforme).

Le théorème reste vrai en remplaçant les homéomorphies par les transformations biunivoques et continues.

En modifiant légèrement un raisonnement de Roberts ¹⁾, l'auteur montre que la thèse du théorème est en défaut lorsqu'on substitue à X l'ensemble des nombres irrationnels et à Y le carré (ou l'ensemble de Cantor).

SÉANCE DU 5 NOVEMBRE 1948

M. Warmus, *Sur l'évaluation des aires planes à l'aide des réseaux de rhombes.*

Généralisation aux systèmes de coordonnées obliques (avec des unités de longueur égales sur les deux axes) des résultats antérieurs de l'auteur ²⁾ concernant l'estimation des différences entre l'aire d'une région plane et le nombre des points aux coordonnées entières couverts par elle, suivant la longueur de sa frontière.

J. G.-Mikusiński, *Une nouvelle justification du calcul opératoire* (voir Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, à paraître).

SÉANCE DU 19 NOVEMBRE 1948

M. Nosarzewska, *Sur la convergence uniforme pour quelques classes de fonctions.*

Convenons de dire qu'un ensemble est η -dense lorsque toute sphère de rayon η contient au moins un point de cet ensemble.

Soit $\{f_k(p)\}_{k=1,2,\dots}$ une suite de fonctions à valeurs réelles, définies pour les points p d'un espace euclidien à n dimensions. Convenons de dire que cette suite *approche ponctuellement* la

¹⁾ Voir J. H. Roberts, *A problem in dimension theory*, American Journal of Mathematics 70 (1948), p. 126.

²⁾ Voir Colloquium Mathematicum 1 (1948), p. 45-46 et 343.

fonction $f(p)$ lorsque, quels que soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe, à partir d'un indice k_0 suffisamment grand, un ensemble η -dense $E(k)$ tel que

$$|f_k(p) - f(p)| < \varepsilon \text{ pour tout } p \in E(k).$$

La même suite de fonctions peut donc approcher ponctuellement une infinité des fonctions fort différentes.

Cette notion est ainsi bien plus générale que les notions de convergence, notamment que celles de convergence sur un ensemble dense dans l'espace et de convergence asymptotique. Toutefois, le théorème connu concernant la classe des fonctions monotones d'une variable réelle subsiste lorsqu'on y atténue l'hypothèse de la convergence en n'admettant que l'approximation ponctuelle:

Théorème 1. Si une suite de fonctions monotones, définies dans un intervalle ouvert, approche ponctuellement dans cet intervalle une fonction continue, elle y converge uniformément dans l'intérieur ³⁾.

En cherchant de déterminer d'autres classes de fonctions pour lesquelles des convergences au sens possiblement faible entraîneraient déjà leur convergence uniforme dans l'intérieur, considérons d'abord les fonctions convexes et leur généralisation étudiée par Beckenbach ⁴⁾.

Soit Φ une classe de fonctions réelles continues dans un intervalle ouvert I de nombres réels, assujettie à la condition suivante: pour tout couple de points $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ où $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$, il existe une et une seule fonction $\varphi(x) \in \Phi$ telle que $\varphi(x_1) = y_1$ et $\varphi(x_2) = y_2$.

Désignons cette fonction par $\varphi[x; x_1, y_1; x_2, y_2]$.

Appelons *convexe par rapport à la classe Φ* toute fonction réelle $f(x)$ qui satisfait à la condition:

$$x_1 \leq x \leq x_2 \text{ entraîne } f(x) \leq \varphi[x; x_1, f(x_1); x_2, f(x_2)],$$

quels que soient x, x_1 et x_2 de I .

On a le théorème suivant:

³⁾ C'est-à-dire sur tout intervalle fermé situé dans l'intérieur; cf. Colloquium Mathematicum 1 (1948), p. 145.

⁴⁾ E. F. Beckenbach, *Generalized convex functions*, Bulletin of the American Mathematical Society 43 (1937), p. 363-371.

Théorème 2. Si une suite de fonctions réelles, définies dans un intervalle ouvert borné et convexes par rapport à la classe Φ , satisfait dans cet intervalle à l'une au moins des trois conditions suivantes:

- (i) elle y approche ponctuellement une fonction continue,
- (ii) elle y converge au sens habituel dans un ensemble dense,
- (iii) elle y converge asymptotiquement,

alors elle y converge uniformément dans l'intérieur.

On a un théorème analogue avec les différences d'ordre supérieur à 2:

Théorème 3. Si une suite de fonctions réelles, définies dans un intervalle ouvert, bornées dans leur ensemble dans un sous-intervalle et ayant des différences non-négatives d'ordre $p \geq 2$ donné satisfait dans cet intervalle à l'une au moins des conditions (i)-(iii), elle y converge uniformément dans l'intérieur.

Les théorèmes 1 et 2 ont leurs analogues pour les fonctions à valeurs réelles, définies aux points d'un espace euclidien à n dimensions.

La propriété énoncée par le théorème 1 pour les fonctions monotones d'une variable se présente également pour les fonctions de $n > 1$ variables, monotones par rapport à chacune d'elles.

De même pour le théorème 2: si une suite de fonctions de n variables est bornée en tout point d'un intervalle ouvert à n dimensions et chacune de ces fonctions, considérée comme fonction de sa i -ème variable, est convexe par rapport à la classe Φ_i (pour $i=1, 2, \dots, n$), chacune des conditions (i)-(iii) y entraîne la convergence uniforme dans l'intérieur.

Les démonstrations s'appuient sur le théorème auxiliaire suivant:

Théorème 4. Pour qu'une suite de fonctions $\{f_k(p)\}_{k=1,2,\dots}$ définies dans un intervalle ouvert I converge uniformément dans l'intérieur vers une fonction continue $f(p)$, il faut et il suffit que, quel que soient $\varepsilon > 0$ et $p_0 \in I$, il existe un $\eta > 0$ et un K tels que

$$|p - p_0| < \eta \text{ entraîne } |f_k(p) - f(p_0)| < \varepsilon \text{ pour tout } p \in I \text{ et } k > K.$$

Les fonctions sous-harmoniques ne jouissent d'aucune des propriétés envisagées: aucune des convergences connues n'entraîne

pour elles une convergence plus forte, pas plus que l'approximation ponctuelle d'une fonction continue n'en entraîne aucune des convergences connues. Les exemples convenables montrent que, pour ces fonctions, la convergence ordinaire en tout point n'entraîne pas de convergence uniforme, la convergence partout, sauf en un point, n'entraîne pas la convergence partout, la convergence asymptotique n'entraîne pas la convergence en un point et l'approximation ponctuelle d'une fonction continue n'entraîne ni la convergence en un point, ni la convergence asymptotique.

SÉANCE DU 26 NOVEMBRE 1948

W. Sierpiński (Varsovie), *Sur une définition des espaces complets* (Proceedings of the Benares Mathematical Society, à paraître).

W. Sierpiński (Varsovie), *Sur un problème de A. Mostowski.*

Etant donnés deux nombres cardinaux m et n , écrivons $m \leq *n$ lorsque $m=0$ ou que tout ensemble de puissance n est somme de m ensembles non-vides et disjoints.

Considérons deux propositions suivantes:

P. On a pour tout couple m, n de nombres cardinaux l'implication

$$[(m \leq *n)(n \leq *m)] \rightarrow (m = n).$$

L. Il existe un ensemble linéaire non mesurable au sens de Lebesgue.

A. Mostowski a posé le problème de démontrer sans l'axiome du choix l'implication

$$(1) \quad P \rightarrow L.$$

La réponse est affirmative. En effet, considérons encore la proposition suivante:

Q. Aucun ensemble de puissance \aleph_1 n'est somme de plus que \aleph_1 ensembles non vides et disjoints.

⁵ D'après A. Lindenbaum et A. Tarski, Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, 19 (1926), p. 301.

L'implication $Q \rightarrow L$ se laissant démontrer sans l'axiome du choix ⁹⁾, il suffit, pour établir (1) sans cet axiome, de démontrer sans lui l'implication

$$(2) \quad P \rightarrow Q.$$

Admettons donc la proposition P et supposons que la proposition Q soit fausse, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble de puissance n , somme de

$$(3) \quad m > n$$

ensembles non vides et disjoints. On a donc $m \leq *n$ d'après la définition de la relation $\leq *$ et en même temps $n \leq *m$ (puisque $n < m$ entraîne évidemment $n \leq *m$ d'après la même définition).

Il en résulte en vertu de P que $m = n$, contrairement à (3).

L'implication (2), et par conséquent l'implication (1), se trouvent ainsi établies sans l'axiome du choix.

La question analogue posée par E. Marczewski à la suite de ce résultat, à savoir s'il est possible de déduire de la proposition P sans l'axiome du choix l'existence d'un ensemble linéaire dépourvu de la propriété de Baire, se résout également par affirmative. La démonstration est analogue.

SÉANCE DU 3 DÉCEMBRE 1948

H. Steinhaus, *Remarques sur le contrôle de la qualité par échantillons tirés au hasard.*

L'examen statistique de la qualité des articles produits en masse est entendu comme celui des pièces tirées au hasard d'une livraison, chacune des pièces étant à qualifier comme bonne ou défectueuse. Il semble au premier abord qu'un tel examen ne soit pas applicable à une livraison homogène d'une marchandise de nature continue, telle que la houille, l'essence, le caoutchouc etc. On procède donc dans ces cas par l'examen de laboratoire, en employant toutefois le mot *échantillon* d'accord avec la langue quotidienne, mais dans un sens tout à fait différent de celui qu'il a dans la théorie statistique du contrôle par tirage au hasard.

Pourtant, on peut se servir, même dans de tels cas, des notions et des tables dressées pour le contrôle par pièces, si l'on considère comme pièce l'unité de consommation de la marchandise en question.

⁹⁾ Voir W. Sierpiński, *Fundamenta Mathematicae* 34 (1947), p. 160.

C'est ainsi qu'une pièce d'essence est, par exemple, le travail par heure d'un tracteur qui la consomme, tiré au hasard, une pièce de charbon est le parcours d'une locomotive tirée au hasard, etc. (pour le détail voir *Normes statistiques du contrôle de la qualité*, éditées par le Comité Polonais des Normes).

SÉANCE DU 10 DÉCEMBRE 1948

J. G.-Mikusiński, *Une notion d'espace complet pour les espaces \mathcal{L} de Fréchet.*

Définition générale qui embrasse comme cas particuliers celles de l'espace complet métrique et de l'espace complet topologique linéaire, qui sont — comme on le sait — différentes.

SÉANCE DU 14 JANVIER 1949

H. Steinhaus, *Sur les suites aléatoires* (voir du même auteur *Sur les fonctions indépendantes* (VIII), *Studia Mathematica* 11 (1950), p. 133-144, en particulier p. 142-144).

Il s'agit de trouver une propriété qui permette de distinguer une suite numérique „aléatoire” d'une suite engendrée par une „loi”.

On définit la fréquence de l'inégalité $a_n < a$ dans la suite $\{a_n\}$ comme

$$F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(k),$$

où $\varphi(k) = 1$ ou 0 , suivant que $a_k < a$ ou non. On suppose que cette limite existe pour tout a , sauf tout au plus pour un ensemble dénombrable. On dit alors que la suite $\{a_n\}$ est *mesurable*.

Soit $G(a)$ la fonction analogue à $F(a)$, mais relative à la suite mesurable $\{b_n\}$. Soit enfin $H(a, \beta)$ la fréquence des inégalités simultanées $a_n < a$ et $b_n < \beta$. On dit que les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont *indépendantes* l'une de l'autre si l'on a $H(a, \beta) = F(a)G(\beta)$ pour tous les a et β pour lesquels $F(a)$ et $G(\beta)$ existent.

On définit une *suite aléatoire* $\{a_n\}$ par la condition qu'elle soit mesurable et que $\{a_n\}$ et $\{a_{n+k}\}$ soient indépendantes pour tous les entiers k non nuls. Cette définition *autonome* permet d'éviter les difficultés inhérentes aux définitions *hétéronomes*.

H. Greniewski (Warsaw), *On some systems of propositions.*

1. Every deductive system consists of primitive propositions or propositional functions (postulates), and of secondary propositions (theorems, lemmata) resulting therefrom.

2. Beside the notion of a deductive system that of a reductive system may easily be formed. The building of a reductive system consists in giving a list of primitive propositions (as in a deductive system); however, it is not the consequences, but the reasons that are searched for: namely, such self-consistent set of secondary propositions is built from which primitive propositions are to result.

Reductive reasoning is as a rule more frequently used in natural sciences than in mathematics, but it can sometimes be met with in mathematics too (e.g. in solving of equations or sets of equations).

3. The relation of inference incessantly met with in mathematics is the certain inference (if every reason is true, then every consequence is also true). There seems indispensable to introduce into methodology a probable inference, e.g. a relation which, though often met with in practical reasoning pertaining to everyday life, has as yet no correct definition.

A new variation of the notion of deductive system and of reductive system might be imagined, a variation in which certain inference is replaced by a probable (or, in particular cases, an almost certain) one.

4. Each of the known deductive systems, and each of the (as a rule unconsciously) built reductive systems consists exclusively of true propositions (or propositional functions that are universally true, i. e. true for all permissible substitutions). Every true proposition and every negation of it is a declarative proposition.

Mathematicians are usually interested only in declarative propositions, leaving aside other types of propositions, e.g. interrogations (studied by K. Ajdukiewicz, A. Hofstadter, and J. C. C. McKinsey) and imperatives (studied by E. Mally, W. Dubislav, J. Jorgensen, K. Menger, A. Hofstadter, and J. C. C. McKinsey).

It seems that deductive and reductive systems of propositions, consisting not of declarative propositions, but of imperatives, can be built.

5. The author lays stress on a certain new (or rather little studied as yet) type of systems of propositions, namely *teleological systems*.

S is a *teleological system* if and only if all the three following conditions are fulfilled:

- (1) S consists exclusively of imperatives,
- (2) S is a reductive system,
- (3) Secondary propositions of S are built by means of the probable inference.

Building and studying of teleological systems seems interesting on the account that the notion of teleological system is a formalized analogon of the well-known in practice, but inexact, notion of *plan of action* (or rather a teleological system is a mental simplification of what in practice is called a plan of action, like a geometrical solid is a mental simplification of a material body).

The author briefly outlines the problems which the methodology of teleological systems is likely to solve.

SÉANCE DU 21 JANVIER 1949

E. Čech (Prague), *Sur la notion de contact*.

Généralisations de la notion de déformation projective d'une variété, basées sur la considération des homographies réalisant, pour tout couple de points correspondants, le contact analytique du premier ordre dans toutes les directions et, en même temps, le contact analytique du second ordre dans certaines directions distinguées. Relations de ces recherches à quelques résultats classiques de la géométrie projective différentielle.

SÉANCE DU 4 FÉVRIER 1949

M. Krzyżański (Cracovie), *Un problème aux limites relatif aux équations du type elliptique*.

Considérons l'équation linéaire du type elliptique

$$(1) \quad \mathcal{E}[u] = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f,$$

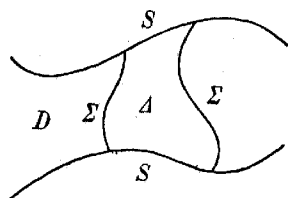
la forme $\sum_{i,j=1}^m a_{ij} \lambda_i \lambda_j$ étant supposée définie positive et $a_{ij}(P)$, $b_j(P)$, $c(P)$, $f(P)$ étant des fonctions continues de point, définie dans un domaine fermé *non-borné* D .

Cherchons une solution $u(P)$ de l'équation (1), qui soit *birégulière* (c'est-à-dire continue avec ses dérivées d'ordre 1 sur D et admettant des dérivées continues d'ordre 2 à l'intérieur de D) et qui satisfasse sur la frontière $\text{Fr}(D)$ de D à la condition suivante:

$$(2) \quad \mathcal{L}[u] = a \frac{du}{dl} + \beta u = g,$$

$a(Q)$, $\beta(Q)$ et $g(Q)$ étant des fonctions continues sur $\text{Fr}(D)$ et $l(Q)$ désignant la direction d'une demi-droite issue du point $Q \in \text{Fr}(D)$ et contenant un segment QP situé entièrement dans D .

Soit Δ un domaine fermé *borné*, situé dans D et dont la frontière $\text{Fr}(\Delta)$ se compose de deux parties (voir figure):



$$S = \text{Fr}(D) \cdot \text{Fr}(\Delta)$$

et

$$\Sigma = \text{Fr}(D) - S.$$

On a le lemme suivant:

Si $a > 0$, $\beta < 0$, $c < 0$ et l'un de deux cas se présente:

$$1^\circ f \geq 0 \text{ et } g \geq 0, \quad 2^\circ f \leq 0 \text{ et } g \leq 0,$$

une solution de (1), *birégulière* dans Δ et satisfaisant à la condition (2) sur S ne peut atteindre que sur Σ sa borne supérieure positive dans le cas 1° , et sa borne inférieure négative dans le cas 2° .

Ce lemme permet d'établir un théorème d'existence et d'unicité, qui est analogue à un théorème établi par l'auteur dans son travail antérieur⁷⁾ et qui s'applique en particulier à la couche D non-bornée

$$-X \leq x_m \leq X, \quad -\infty < x_i < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

J. G.-Mikusiński, *Sur une équation fonctionnelle*.

Il est facile de montrer, en admettant la continuité et la monotonie stricte de la fonction $f(x, a)$, où $-\infty < x < \infty$ et $-\infty < a < \infty$, que toute solution de l'équation fonctionnelle

$$f[f(x, a), \beta] = f(x, a + \beta)$$

⁷⁾ M. Krzyżański, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei 4, Serie 8 (1948), p. 408-416.

se laisse écrire dans la forme

$$f(x, a) = \Omega[\omega(x) + a],$$

où ω est une fonction continue croissante et Ω est la fonction inverse de ω .

Le même théorème reste encore vrai lorsque l'équation en question et la fonction f sont considérées dans un domaine de la forme $E_{(x,a)}\{x \geq x_0, a < 0\}$ et que la valeur de f croît avec x pour a fixe et croît indéfiniment avec a pour x fixe.

SÉANCE DU 11 FÉVRIER 1949

A. Wilkoński, *Sur les modules des racines de certaines équations algébriques* (à paraître dans ce volume).

SÉANCE DU 18 FÉVRIER 1949

H. Steinhaus, *Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique* (en préparation pour Colloquium Mathematicum).

On sait que la convergence presque partout d'une suite $\{f_n(t)\}$ vers $f(t)$ entraîne sa convergence asymptotique vers la même limite, tandis que l'implication inverse n'est pas vraie. Or, on peut affaiblir la convergence ordinaire $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ en permettant de supprimer dans la suite $\{a_n\}$ une suite partielle de fréquence nulle; si l'on peut le faire de manière que la suite $\{a'_n\}$ qui reste soit convergente vers A (c'est-à-dire que l'on ait encore $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = A$), convenons d'écrire

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{stat } a_n = A.$$

La convergence asymptotique

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n f_n(t) = f(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

étant définie par la condition

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E_t \{|f(t) - f_n(t)| > \varepsilon\} = 0 \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0,$$

donc par la convergence ordinaire d'une suite numérique, on peut affaiblir (2) en remplaçant dans (3) \lim par $\lim \text{stat}$.

La notion de convergence asymptotique se trouvera alors modifiée de la même manière que la convergence ordinaire l'a été auparavant; on l'écrira

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{stat } f_n(t) = f(t).$$

L'expression

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{stat } f_n(t) = f(t) \text{ presque partout}$$

s'entend par elle-même: elle veut dire que, pour tout t fixe, la suite numérique $\{f_n(t)\}$ converge vers le nombre $f(t)$ au sens (1), excepté pour un ensemble de t de mesure nulle.

Admettons que $f_n(t)$ est une fonction mesurable de t pour tout n fixe et que $\{f_n(t)\}$ est une suite numérique mesurable⁸⁾ pour tout t fixe de l'intervalle $a \leq t \leq b$. Sous ces hypothèses les expressions (4) et (5) sont équivalentes.

E. Marczewski, *Sur un théorème de Tychonoff*.

Quelques remarques sur les produits cartésiens d'espaces topologiques.

J. Perkal, *Sur une propriété de la circonférence*.

Démonstration du théorème suivant:

Si une courbe simple fermée n'a que tout au plus deux points communs avec toute courbe superposable avec elle, elle est une circonférence.

SÉANCE DU 4 MARS 1949

C. Ryll-Nardzewski (Lublin), *Sur les fonctionnelles linéaires dans les espaces du type (B_0)* .

Etude de quelques propriétés des distributions au sens de L. Schwartz⁹⁾, les résultats formulés pour le cas de dimension 1 se laissant généraliser à celui de $n \geq 1$ dimensions.

Les distributions sont des fonctionnelles linéaires continues, définies dans l'espace D de fonctions de classe C_∞ s'annulant hors d'un intervalle borné (variable), avec une notion convenable de convergence.

⁸⁾ Voir ce fascicule, p. 69.

⁹⁾ L. Schwartz, *Généralisation de la notion de fonction...*, Annales de l'Université de Grenoble (1945) et *Théorie des distributions*, ibidem (1948).

L'espace D a plusieurs propriétés des espaces du type (B_0) , bien qu'il n'en soit pas un. Elles permettent d'établir, par exemple, la formule pour la forme générale des distributions qui est la suivante:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} x^{(kn)}(t) \varphi_n(t) dt,$$

où $a_n < a_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, les $\varphi_n(t)$ étant des fonctions continues.

L. Schwartz s'occupe dans ses travaux de la convergence forte des suites de distributions. On peut montrer qu'elle équivaut à leur convergence faible.

Mikusiński¹⁰⁾ a donné une autre définition des distributions. On peut montrer qu'elle équivaut à la définition primitive de L. Schwartz.

SÉANCE DU 11 MARS 1949

T. Banachiewicz (Cracovie), *Sur quelques opérations avec les cracoviens*¹¹⁾.

Parmi les opérations spécifiques et en même temps très importantes, relatives aux cracoviens, il y a lieu de faire remarquer la décomposition, toujours possible, d'un cracovien non-zéro en deux facteurs élémentaires, en particulier l'extraction de la racine carrée d'un cracovien symétrique. Ces opérations sont surtout utiles dans la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires. Elle est réellement calculable sans difficulté — contrairement à celle avec les déterminants — et plus générale, car

¹⁰⁾ J. G.-Mikusiński, *Sur la méthode de généralisation de Laurent Schwartz et sur la convergence faible*, Fundamenta Mathematicae 35 (1948), p. 235-239.

¹¹⁾ Cf. T. Banachiewicz, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Série A, 1938, p. 134 et 393-404, Acta Astronomica, Série c, 4 (1939), p. 26, Ciel et Terre, 1942, N° 2, L'Enseignement Mathématique 39 (1948), Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie 41 (1948), Rocznik Astronomiczny Obserwatorium Krakowskiego, 1949, N° 20, p. 87-95 (en polonais et en interlingua), Przegląd Geodezyjny 4 (1949), p. 133-138 et le livre de T. Kochmański, *Zarys rachunku krakowianowego (Précis du calcul cracovien)*, Publications de l'Office Central des Mesures du Pays, Varsovie 1948.

elle ne dépend aucunement de la nullité ou non-nullité du déterminant du système. La solution en question fait intervenir la notion de quotient de deux cracoviens.

L'extraction de la racine carrée conduit aussi à une solution aisée du problème bien connu de Lagrange, relatif à la réduction d'une forme quadratique à la somme (algébrique) de carrés des expressions linéaires.

La résolution cracovienne des équations symétriques à l'aide de la décomposition en deux facteurs fait ressortir une très grande imperfection de l'algorithme classique de Gauss, connu sous le nom de la méthode des moindres carrés. Libre de la confusion que comportent les notations de cette méthode, la résolution cracovienne rend le calcul d'ajustement (compensation) accessible aux cercles autrement vastes des chercheurs dans les sciences mathématiques et appliquées.

L'auteur fait remarquer que la désignation *méthode de la racine carrée* (square-root method) qu'on rencontre aux États Unis d'Amérique pour la forme matricielle de la méthode cracovienne découverte par lui en 1938, n'est pas à sa place quand on emploie les matrices; car les matrices symétriques n'admettent même pas de racines triangulaires, dont il s'agit dans le problème.

SÉANCE DU 18 MARS 1949

T. Wazewski (Cracovie), *Sur un algorithme pour résoudre les équations linéaires* (à paraître dans les Annales de la Société Polonaise de Mathématique).

R. Sikorski (Varsovie), *On the inducing of homomorphisms by mappings* (voir Fundamenta Mathematicae 36 (1949), p. 7-22).

SÉANCE DU 25 MARS 1949

E. Marczewski, *Sur une classe de mesures dénombrablement additives* (partie d'un travail en préparation).

Un nouveau critère pour l'additivité dénombrable de la mesure, applicable en particulier aux produits cartésiens.

J. Łoś, *Sur le prolongement de la mesure* (voir J. Łoś et E. Marczewski, *Extensions of measure*, Fundamenta Mathematicae 36 (1949), p. 267-276).

SÉANCE DU 29 MARS 1949

E. Čech (Prague), *Sur la notion de plan*.

Si l'on veut définir le plan en partant des axiomes de O. Veblen, il est avantageux de commencer par définir l'angle BAC comme le lieu des demi-droites issues du point A et rencontrant le segment BC . En considérant l'angle opposé au sommet, on prouve aisément que l'angle est indépendant du choix des points B et C sur les demi-droites AB et AC . Alors, on définit le plan comme la réunion de quatre angles: BAC , B_1AC , BAC_1 et B_1AC_1 (le point A étant situé sur les segments BB_1 et CC_1) et on démontre l'invariance de la notion de plan en envisageant deux couples de demi-plans opposés.

W. Ślebodziński, *Quelques remarques sur le „Programme d'Erlangen” de F. Klein*.

Pour réaliser le programme d'Erlangen de F. Klein, on peut s'appuyer sur les notions de la géométrie textile de W. Blaschke.

Considérons, par exemple, le cas du groupe général de transformations à deux variables. Comme repères de la géométrie fondée sur ce groupe peuvent servir les réseaux formés de trois familles de courbes du plan. Au moyen d'une transformation du groupe général on peut réduire les équations des familles d'un réseau (R) à la forme suivante

$$dx=0, \quad dy=0, \quad dy=p(x,y) dx.$$

Ce réseau n'est invariant que par la transformation identique du groupe général. On peut lier d'une façon invariante avec le réseau (R) une connexion affine dont la structure est définie au moyen des équations

$$dr^1 + rv^1 = 0, \quad dr^2 + rv^2 = 0$$

et qui correspond au groupe linéaire

$$\bar{u} = ku + a, \quad \bar{v} = kv + b.$$

Dans le cas d'un groupe des transformations unimodulaires à deux variables, on peut employer comme repère un système formé de deux familles de courbes dont les équations peuvent être ramenées à la forme suivante:

$$dx=0, \quad dy=p(x,y) dx.$$

A cet objet géométrique s'attache d'une façon invariante la connexion affine déterminée par les équations

$$dv^1 - rv^1 = 0, \quad dv^2 + rv^2 = 0.$$

Elle correspond au groupe linéaire

$$\bar{u} = ku + a, \quad \bar{v} = \frac{1}{k}v + b.$$

La même méthode peut être appliquée à tout groupe infini.
