P R O B L È M E S

P39, R1. R. P. Boas, Jr (Providence, R. I.) a signalé la réponse suivante:

The answer to the problem is "no". In fact, if $f(t)$ and $g(t)$ are integrable in $(0, t_0)$ and $\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau = 0$ for almost all t in $(0, c)$, then $f(t) = 0$ for almost all t in $(0, a)$ and $g(t) = 0$ for almost all t in $(0, b)$, where $a + b = c$ [1]).

It would be interesting to have a proof independent of the theory of functions of a complex variable.

I, 3, p. 240. Providence, January 12, 1949

---

[1]) See E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier Integrals*, Oxford 1937, p. 327, M. M. Crum, Quarterly Journal of Mathematics (Oxford Series) 12 (1941), p. 108-111, and J. Dufresnoy, Comptes rendus de l'Académie des Sciences (Paris) 225 (1947), p. 857-859.

R. SIKORSKI (VARSOVIE)

P61. Formulé dans la communication *On an unsolved problem from the theory of Boolean algebras.*

Ce fascicule, p. 28.

A. D. WALLACE (NEW ORLEANS, LOUIS.)

P62. The topology of a space can be described in terms of closure, in which case closure distributes over union:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Similarly, the topology can be described by interior, and

$$\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B),$$

so that Int distributes over intersection. For any A, B put

$$A + B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Is there a set-function which describes the topology of a space and which distributes over $+$?

New Orleans, November 12, 1949

K. BORSUK (VARSOVIE)

P63. E étant un espace localement contractile de dimension au moins $2n+1$, est-ce que tout espace métrique séparable de dimension n au plus est homéomorphe à un sous-ensemble de E?

P64. C étant un ensemble compact et acyclique, situé dans l'espace euclidien à trois dimensions $\mathcal{E}^3$, existe-t-il pour tout $\varepsilon>0$ une fonction continue f transformant C en un polytope acyclique $f(C)\subset\mathcal{E}^3$ et satisfaisant à l'inégalité $\varrho(x,f(x))<\varepsilon$ pour tout $x\varepsilon C$?

Varsovie, 21. XII. 1948

B. KNASTER (WROCŁAW)

P65. Appelons *bande* toute suite finie de carrés (intérieurs et contours), différents deux à deux, du réseau quadratique plan R, telle que l'intersection de deux carrés successifs se réduit à leur côté commun.

Quand est-il possible de remplir un domaine fermé D, composé de carrés de R, par une bande dont les carrés extrêmes sont fixés d'avance? Quelles sont leurs positions admissibles? Quand la solution devient-elle affirmative pour le même D, en remplaçant R par un réseau plus fin? Et de combien plus fin?

Prague, 2. IX. 1949

Z. MOROŃ (WROCŁAW)

P66. Est-ce que toute décomposition d'un rectangle en carrés deux à deux différents admet au moins 2 minima locaux, c'est-à-dire carrés entourés exclusivement des carrés plus grands?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 43, 31. III. 1947

P67. Est-ce que toute décomposition d'un rectangle en carrés deux à deux différents et dont les côtés ont pour longueur des entiers deux à deux relativement premiers comprend au moins un carré dont le côté a pour longueur un nombre quadratique?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 44, 31. III. 1947

P68. Existe-t-il un rectangle qui se laisse décomposer en carrés deux à deux différents de deux manières entièrement distinctes, c'est-à-dire telles qu'aucun carré ne se présente dans les deux décompositions?

Wrocław, 28. XII. 1949

Z. ZAHORSKI (ŁÓDŹ)

P69. Appelons *fonction élémentaire* (*a*) *d'ordre 1* toute fonction de deux variables complexes z_1, z_2 qui est de la forme

$$f(z_1,z_2)=f(z_1,z_2;C,\alpha,\beta)=C+\alpha\log z_1+\beta e^{z_2},$$

où C est une constante complexe finie arbitraire et les coefficients α,β ne prennent que les valeurs 0 et 1 (indépendamment l'un de l'autre).

Définissons par induction la *fonction élémentaire* (*a*) *d'ordre n* comme toute fonction de 2^n variables complexes qui résulte d'une fonction élémentaire (*a*) d'ordre $n-1$

$$f(z_1,z_2,\ldots,z_{2^{n-1}})$$

en remplaçant ses variables par des fonctions élémentaires (*a*) d'ordre 1 (pas nécessairement différentes).

Enfin, appelons *fonction élémentaire* (*a*) tout court toute fonction de k variables complexes $\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_k$ qui résulte d'une fonction élémentaire (*a*) d'ordre n, où $k\leqslant 2^n$, par la substitution

$$z_{\alpha_{i1}}=z_{\alpha_{i2}}=\ldots=z_{\alpha_{im_i}}=\zeta_i,$$

où $i=1,2,\ldots,k$, les indices α_{ij} $(j=1,2,\ldots,m_i)$ sont deux à deux différents et $m_1+m_2+\ldots+m_k=2^n$.

En particulier, en posant $z_1=z_2=\ldots=z_{2^n}=\zeta$, on a des fonctions élémentaires (*a*) d'une variable. Il est aisé de voir que les fonctions rationnelles, trigonométriques, leurs composés etc. sont des fonctions élémentaires (*a*).

Appelons *fonctions élémentaires* (*b*) celles qui sont formées par superposition d'un nombre fini de fonctions algébriques d'une ou plusieurs variables et de fonctions élémentaires (*a*).

Finalement, entendons par *fonction élémentaire* (*c*) toute fonction implicite définie par un système fini d'équations dont les membres gauches sont des fonctions élémentaires (*a*).

En désignant par K_a, K_b et K_c respectivement les classes des fonctions ainsi définies, on a évidemment $K_a \subset K_b \subset K_c$.

Considérons les fonctions élémentaires $f(z)$ d'une variable complexe pour lesquelles 0 est un point singulier tel que la fonction $f(x)$ d'une variable *réelle* a en $x=0$ les dérivées de tout ordre.

En admettant que le rayon de convergence de la série de Maclaurin

$$M(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

est positif et que $f(z)$ est une fonction élémentaire (*a*), est-ce que la fonction $\varphi(z)=M(z)$ est aussi une fonction élémentaire (a)? Et si non, est-elle élémentaire (*b*), ou au moins (*c*)?

Envisager la même question pour $\varphi(x)$ lorsque $f(z)$ est une fonction élémentaire (*b*) et (*c*).

Łódź, 10. XI. 1948

S. HARTMAN (WROCŁAW)

P70. Est-ce que pour toute fonction périodique $f(t)$ de période 1 et qui est, de même que sa première dérivée, partout continue, la suite $\{R_n\}$, où

$$R_n=\sum_{k=1}^{n}f(k\xi)-\int_0^n f(t)\,dt,$$

est bornée pour presque tout ξ, c'est-à-dire à l'exception d'un ensemble N_f de mesure nulle?

L'ensemble N_f dépend en tout cas d'une manière essentielle de la fonction f. Plus encore: on peut démontrer[2]) qu'il existe pour tout ξ une fonction f partout continue et à première dérivée partout continue (même telle que la somme des coefficients de Fourier de cette dérivée soit absolument convergente) pour laquelle $\xi \in N_f$.

Wrocław, 20. XII. 1949

[2]) Cf. S. Hartman, *Sur une méthode d'estimation des sommes de Weyl*, Studia Mathematica 12 (à paraître).