Так как $\psi(0)=0$ и $\eta_n<1/2^n$, то $|\psi(\eta_n)-\psi(0)|=a_n>\psi(1/2^n)$, $\delta(a_n)\leqslant\eta_n<1/2^n$, значит, $\tau(a_n)=1/2^n$ есть особенный почти-период функции $\psi(x)$.

В точке $x=0$ существует производная функции $\psi(x)$ равна производной функции $\varphi(x)$ в этой-же точке: $\psi'(0)=\varphi'(0)$; это следует из соотношения

$$\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}=\frac{\varphi(h)}{h}\leqslant\frac{\psi(h)-\psi(0)}{h}=\frac{\psi(h)}{h}\leqslant\frac{\varphi'(0)\cdot h}{h}=\varphi'(0)\qquad(h>0).$$

Призводная функции $\psi(x)$, очевидно, ограничена.

Изменяя незначительно функцию $\psi(x)$ в достаточно малых окрестностях тех точек, в которых она не имеет производной, мы можем, не нарушая её особенности добиться того, что производная будет существовать всюду и будет непрерывной и ограниченной в открытом интервале $(0,2)$. У периодически продолженной функции производная будет существовать всюду и будет непрерывной всюду, исключая точки $0,2,-2,4,-4,\ldots,2n,-2n,\ldots$

Полученная функция и есть пример функции обладающей требуемыми свойствами.

UN PROBLÈME CONCERNANT LE PROLONGEMENT DES FONCTIONS AUX σ-MESURES

PAR

J. ŁOŚ (WROCŁAW)

Soient $\boldsymbol{B}$ une algèbre de Boole, $\boldsymbol{X}$ un sous-ensemble de $\boldsymbol{B}$ et f une fonction réelle sur $\boldsymbol{X}$. Il serait de grand intérêt d'établir des conditions suffisantes et nécessaires pour que f se laisse prolonger à une σ-mesure sur $\boldsymbol{B}$.

Par *mesure* nous comprenons ici une fonction μ non-négative, additive et normée sur $\boldsymbol{B}$, c.-à.-d. telle que $\mu(X)\geqslant 0$, $\mu(X+Y)=\mu(X)+\mu(Y)-\mu(XY)$, $\mu(XX')=0$ et $\mu(X+X')=1$, pour $X,Y\epsilon\boldsymbol{B}$. Une mesure μ est dite *σ-mesure*, si elle est dénombrablement additive, c.-à-d. si $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(X_n)=0$ pour chaque suite $X_1\supset X_2\supset\ldots$ d'éléments de $\boldsymbol{B}$ telles que $\prod\limits_{i=1}^{\infty}X_i=0$ (0 étant élément nul de $\boldsymbol{B}$). Dans le cas où la condition de l'additivité dénombrable n'est pas exigée, on parle des mesures *simplement additives*. Dans ce travail, nous ne supposons guère que l'algèbre, sur laquelle est définie une σ-mesure, soit dénombrablement additive.

Le problème analogue pour les mesures simplement additives était examiné et résolu par Horn et Tarski[1]). Il resulte de leurs théorèmes que la condition suivante (étant évidemment nécessaire) est suffisante pour l'existence d'un prolongement de f à une telle mesure sur $\boldsymbol{B}$:

(C) Pour chaque *sous-ensemble fini* $\boldsymbol{Y}$ de $\boldsymbol{B}$ il existe une *mesure* μ sur la plus petite sous-algèbre $[\boldsymbol{Y}]_0$ de $\boldsymbol{B}$ contenant $\boldsymbol{Y}$, et telle que $\mu(X)=f(X)$ pour $X\epsilon\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}$ (autrement dit: une mesure qui est un prolongement partiel de f sur $[\boldsymbol{Y}]_0$[2])).

---

[1]) Voir Horn et Tarski [2], p. 469-477.

[2]) Cette condition est formulée dans le travail de Łoś et Ryll-Nardzewski [4]. Dans ce travail nous avons démontré aussi sans y faire usage des résultats de Horn et Tarski, que cette condition est suffisante pour le prolongement en question.

Le fait que (C) suffit pour l'existence d'un prolongement exigé est bien naturel: la propriété *d'être une mesure simplement additive sur* $\boldsymbol{B}$ est *finie*[3]) et alors, si elle peut être réalisée dans chaque partie finie de $\boldsymbol{B}$, elle peut l'être aussi dans toute l'algèbre $\boldsymbol{B}$. Mais d'autant que la propriété *d'être une mesure simplement additive sur* $\boldsymbol{B}$ est *finie*, la propriété *d'être une σ-mesure sur* $\boldsymbol{B}$ est *dénombrable*. Remplaçons alors dans la condition (C) les mots *sous-ensemble fini* par *sous-ensemble au plus dénombrable*, le mot *mesure* par *σ-mesure* et désignons la condition ainsi formée par (C_σ). Le problème suivant s'impose: la condition (C_σ) est-elle suffisante pour l'existence d'un prolongement de f à une σ-mesure sur $\boldsymbol{B}$?

La réponse est négative. Soit $\boldsymbol{B}^*$ l'algèbre de tous les sous-ensembles d'un ensemble X_0^* que nous supposerons être de puissance $\aleph_1$. Choisissons pour $\boldsymbol{X}^*$ la famille des sous-ensembles finis de X_0^* et posons $f^*(X)=0$ pour $X\epsilon\boldsymbol{X}^*$. D'un théorème bien connu de Banach et Kuratowski[4]) il résulte qu'il n'y a de σ-mesure sur $\boldsymbol{B}^*$ qui serait un prolongement de f. Mais, d'autre part, pour chaque sous-ensemble dénombrable $\boldsymbol{Y}$ de $\boldsymbol{B}^*$ on peut choisir un point $x\epsilon X_0^*$ tel que x n'appartienne à aucun ensemble fini de $[\boldsymbol{Y}]_0$. En effet, la famille $[\boldsymbol{Y}]_0$ est dénombrable, donc la somme S de tous les ensembles finis $X\epsilon[\boldsymbol{Y}]_0$ est aussi dénombrable. Puisque X_0^* est de puissance $\aleph_1$, l'ensemble X_0^*-S n'est pas vide. En posant

$$\mu(X)=0 \quad \text{si} \quad x\,\text{non-}\epsilon X \qquad \text{et} \qquad \mu(X)=1 \quad \text{si} \quad x\epsilon X,$$

on obtient un prolongement partiel de f^* à une σ-mesure sur $[\boldsymbol{Y}]_0$; ainsi la condition (C_σ) est satisfaite.

L'exemple ci-dessus montre que le problème a été mal posé. Les problèmes de prolongement des fonctions aux σ-mesures doivent être considérés, non pas pour les algèbres complètement arbitraires, mais seulement pour une algèbre étroitement liée à l'ensemble sur lequel est définie la fonction à prolonger. Cette restriction est faite dans bien d'autres problèmes; dans notre cas il est naturel d'éxiger que $\boldsymbol{B}$ soit la plus petite algèbre contenant $\boldsymbol{X}$ (c.-à-d. $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{X}]_0$). Notre problème prend alors la forme suivante:

[3]) La notion de *propriété finie* est precisée dans le travail de Łoś et Ryll-Nardzewski [3], p. 234.

[4]) Voir Banach et Kuratowski [1].

P 94. Soient $\boldsymbol{B}$ une algèbre de Boole, $\boldsymbol{X}$ un sous-ensemble de $\boldsymbol{B}$, tel que $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{X}]_0$ et f une fonction sur $\boldsymbol{X}$. Existe-t-il, sous la condition (C_σ), un prolongement de f à une mesure sur $\boldsymbol{B}$?

Dans l'exemple cité, la condition (C_σ) étant satisfaite, il existe un prolongement de f^* à une mesure sur la plus petite algèbre d'ensembles contenant $\boldsymbol{X}^*$. En effet, l'algèbre $[\boldsymbol{X}^*]_0$ ne consiste qu'en des sous-ensembles finis de X_0^* et de leurs complémentaires. Posons $\mu(X)=0=f^*(X)$ pour X fini et $\mu(X)=1$ pour X infini; on obtient ainsi un prolongement de f^* à une σ-mesure sur $[\boldsymbol{X}^*]_0$.

Il est à remarquer que sous une condition plus restreinte que (C_σ), on peut facilement démontrer l'existence du prolongement exigé. Appellons *module sur* $\boldsymbol{B}$ toute fonction $M(\varepsilon, X_1, X_2, \ldots)$ à valeurs naturels, définie pour $\varepsilon>0$ et $X_1, X_2, \ldots \epsilon \boldsymbol{B}$. Une mesure μ définie sur une sous-algèbre $\boldsymbol{B}_0$ de $\boldsymbol{B}$ est dite *σ-M-mesure* si

Pour chaque suite $X_1\supset X_2\supset X_3\supset\ldots$ *d'éléments de* $\boldsymbol{B}_0$ *telle que* $\prod_{i=1}^{\infty} X_i=0$, *l'inégalité* $n\geqslant M(\varepsilon, X_1, X_2, \ldots)$ *implique* $\mu(X_n)\leqslant\varepsilon$.

Considérons la condition (C_σ-M) formée de la condition (C) par le remplacement des mots *sous-ensemble fini* par *sous-ensemble au plus dénombrable* et du mot *mesure* par *σ-M-mesure*[5]). On prouve facilement que

S'il existe un module M, tel que la condition (C_σ-M) *est satisfaite, alors il existe un prolongement de f à une σ-M-mesure sur* $\boldsymbol{B}$.

La démonstration s'appuie sur le fait que, dans l'espace $\mathfrak{F}$ de toutes les fonctions sur $\boldsymbol{B}$ à valeurs appartenant à l'intervalle $\langle 0,1\rangle$ (cet espace envisagé comme espace-produit $\langle 0,1\rangle^{\mathfrak{m}}$, où $\mathfrak{m}=\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}$), l'ensemble $\mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$ de ces fonctions $\varphi\epsilon\mathfrak{F}$ qui sont des σ-M-mesures sur $[\boldsymbol{Y}]_0$ est un ensemble fermé. Ainsi peut-on démontrer ce théorème par un procédé analogue à celui du cas de la condition (C) et des mesures simplement additives[6]). Dans l'énoncé de notre théorème il n'est pas nécessaire d'exiger que $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{X}]_0$, le qui montre que la condition (C_σ-M) est bien rigoureuse et que le théorème ne donne pas beaucoup. Mais puisque l'existence d'un module M qui satisfait à la condition (C_σ-M) n'est pas seulement

[5]) C'est alors une condition posée non seulement sur $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{X}$, et f, mais aussi sur le module M.

[6]) Voir Łoś et Ryll-Nardzewski [4].

suffisante, mais aussi nécessaire pour l'existence du prolongement demandé, la difficulté que l'on rencontre si l'on veut (positivement) résoudre le problème **P 94** consiste à démontrer que la condition (C_σ) entraîne l'existence d'un module M satisfaisant à la condition $(C_\sigma\text{-}M)$.

TRAVAUX CITÉS

[1] S. Banach et C. Kuratowski, *Sur une généralisation du problème de la mesure*, Fundamenta Mathematicae 14 (1929), p. 127-131.

[2] A. Horn and A. Tarski, *Measures in Boolean algebras*, Transactions of the American Mathematical Society 64 (1948), p. 467-497.

[3] J. Łoś and C. Ryll-Nardzewski, *On the application of Tychonoff's theorem in mathematical proofs*, Fundamenta Mathematicae 38 (1951), p. 233-237.

[4] — *Effectivity of the representation theory of Boolean algebras*, Fundamenta Mathematicae 39, à paraître.

Państwowy Instytut Matematyczny
Institut Mathématique de l'État

NOTE ON MINIMAX SOLUTIONS OF STATISTICAL DECISION PROBLEMS

BY

A. ŠPAČEK (PRAGUE)

Given two non-void sets A and B and let $r(x,y)$ be a function defined for every $x\epsilon A$ and $y\epsilon B$, such that

(1) $$r(x,y)\geqslant 0 \quad \text{for each} \quad x\epsilon A,\ y\epsilon B,$$

(2) $$\sup_{x\epsilon A} r(x,y)<\infty \quad \text{for each } y\epsilon B.$$

It is easy to show that there exists the least σ-algebra $\mathfrak{A}$ of subsets of A such that

(3) $$r(x,y) \text{ is } \mathfrak{A}\text{-measurable for each } y\epsilon B,$$

(4) $$\inf_{y\epsilon B} r(x,y) \text{ is } \mathfrak{A}\text{-measurable.}$$

Obviously, the condition (4) may be omitted if B is enumerable.

Let Ω_1 be the set of all probability measures in $\mathfrak{A}$. Then by (1) and (3)

(5) $$0\leqslant f(\omega,y)=\int_A r(x,y)\,d\omega<\infty \quad \text{for each} \quad y\epsilon B,\ \omega\epsilon\Omega_1.$$

For each pair $\omega_1,\omega_2\epsilon\Omega$ we shall define the function

(6) $$\varrho(\omega_1,\omega_2)=\sup_{X\epsilon\mathfrak{A}}[\omega_1(X)-\omega_2(X)].$$

It is easy to show that Ω_1 is a metric space with respect to the distance function (6). If $\Omega\subset\Omega_1$, we shall denote by $\bar{\Omega}$ the closure of Ω in Ω_1. A probability measure which assumes only the values 0 and 1 will be called an *elementary probability measure* and the set of all elementary probability measures will be denoted by Ω_0. If A contains at least two elements, then Ω_1 contains no isolated points, because, if $\omega\epsilon\Omega_1$, then there exists an $\omega'\epsilon\Omega_1$ distinct from ω, and we see at once that the sequence $\{(1-2^{-j})\,\omega(X)+2^{-j}\omega'(X)\}_{j=1,2,3,\ldots}$ of pairwise distinct points of Ω_1 converges to $\omega(X)$. Obviously, Ω_0 is isolated and each two ele-