ОБ ОСОБЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

H. FAST (ВРОЦЛАВ)

Настоящая статья содержит дальнейшую разработку вопросов, которым была посвящена статья опубликованная мною совместно с S. Hartman'ом и H. Steinhaus'ом [1]). Эту статью обозначаю в дальнейших ссылках через HSF.

1. В начале напомним некоторые определения данные в HSF.

Определение 1. ε-почти-периодом функции $f(x)$, определённой на всей числовой прямой и непрерывной, называется каждое число $\tau(\varepsilon)$, которое удовлетворяет неравенству

$$|f(x+\tau(\varepsilon))-f(x)|<\varepsilon$$

для всякого действительного x.

Определение 2. Модулем равномерной непрерывности $\delta(\varepsilon)$ равномерно непрерывной функции $f(x)$ называется точная верхняя грань тех чисел δ, для которых из

$$|x'-x''|<\delta \quad \text{следует} \quad |f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Определение 3. Пусть $f(x)$ непрерывная периодическая функция с основным периодом равным ω; ε-почти-период $\tau(\varepsilon)$ функции $f(x)$ называется *неособенным*, если существует такое целое число n, что

$$n\omega-\delta(\varepsilon)<\tau(\varepsilon)<n\omega+\delta(\varepsilon).$$

В противном случае почти-период $\tau(\varepsilon)$ называется *особенным*.

Определение 4. Непрерывная периодическая функция называется *неособенной*, если существует такое $\varepsilon_0>0$, что для $\varepsilon<\varepsilon_0$ всякий почти-период $\tau(\varepsilon)$ неособенный. В противном случае функция называется *особенной*.

---

[1]) S. Hartman, H. Steinhaus et H. Fast, *Sur les presque-périodes des fonctions périodiques*, Colloquium Mathematicum 1 (1948), p. 297-304.

2. Вопрос о существовании особенных функций был решён H. Steinhaus'ом, который построил пример такой функции (HSF, стр. 300). Мною было там-же доказано, что всякая кусочно монотонная непрерывная периодическая функция неособенная.

Другое достаточное условие неособенности даётся следующей теоремой:

Теорема. Если периодическая функция имеет непрерывную производную, то она неособенная.

Прежде чем приступить к доказательству, сделаем два общих замечания.

(а) Если периодическая функция $f(x)$ имеет всюду непрерывную производную, то выражение

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{при} \quad h\to 0$$

стремится равномерно относительно x на всей числовой прямой к $f'(x)$. В самом деле, для достаточно малого $|h|$ и некоторой точки ξ_h между x и $x+h$, имеем

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|=|f'(\xi_h)-f'(x)|<\varepsilon.$$

(б) Если функция $g(x)$ равномерно непрерывна на всей числовой прямой и $\sup g(x)=m>0$, то существует такое число $l>0$, что для каждой точки x_0, в которой $g(x_0)>m/2$, функция $g(x)$ положительна в интервале $\langle x_0,x_0+l\rangle$. Это следует непосредственно из равномерной непрерывности функции $g(x)$.

Перейдём теперь к доказательству теоремы. Пусть $f(x)$ непрерывная периодическая функция с основным периодом равным ω. Пусть $m=\sup|f'(x)|$; очевидно $m>0$, так как мы рассматриваем лишь функции не равные тождественно постоянной. Согласно замечанию (а) существует такое число $h_0>0$, что для произвольного положительного $h<h_0$ и всякого $x\epsilon\langle 0,\omega\rangle$

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\frac{m}{4},$$

откуда тем более

$$(1)\qquad \left|\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}-|f'(x)|\right|<\frac{m}{4} \qquad (0<h<h_0;x\epsilon\langle 0,\omega\rangle).$$

Поскольку $f'(x)$ непрерывная функция, существует такое число x', что $|f'(x')|=m$. Из (1) следует

$$\frac{|f(x'+h)-f(x')|}{h}>m-\frac{m}{4}=\frac{3}{4}m,$$

откуда тем более

$$\sup_x\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}=n(h)>\frac{3}{4}m.$$

Пусть в точке ξ_h

$$\frac{|f(\xi_h+h)-f(\xi_h)|}{h}=n(h).$$

Из неравенства (1) при $x=\xi_h$ получаем

$$\Big|n(h)-|f'(\xi_h)|\Big|<\frac{m}{4},$$

откуда

$$|f'(\xi_h)|>n(h)-\frac{m}{4}>\frac{3}{4}m-\frac{m}{4}=\frac{m}{2}.$$

Согласно замечанию (б), существует такое число $l>0$, что для всякого положительного $h<h_0$, имеет место неравенство $|f'(x)|>0$ в интервале $\langle\xi_h,\xi_h+l\rangle$, следовательно, в этом интервале функция $f(x)$ монотонная (даже строго монотонная).

В доказательстве можем, согласно HSF, п. 1^0 (стр. 298), ограничиться рассмотрением почти-периодов заключённых в интервале $\langle 0,\omega/2\rangle$. Согласно HSF, п. 2^0 (стр. 298), выберем настолько малое число ε_0, чтобы при $\varepsilon<\varepsilon_0$ было $0<\tau(\varepsilon)<l/2$. Тогда из леммы HSF, п. 3^0 (стр. 302), следует, что

$$\sup|f(x+\delta(\varepsilon))-f(x)|=|f(\xi_{\delta(\varepsilon)}+\delta(\varepsilon))-f(\xi_{\delta(\varepsilon)})|=\varepsilon.$$

Окончание доказательства аналогично доказательству из HSF, п. 4^0 (стр. 303), причём интервал $\langle x_0,x_0+l\rangle$ играет здесь ту-же роль, какую играет в HSF, п. 4^0, кратчайший из интервалов монотонности рассматриваемой там функции.

3. Условий приведённой теоремы нельзя ослабить: построим *пример особенной функции, производная которой существует*

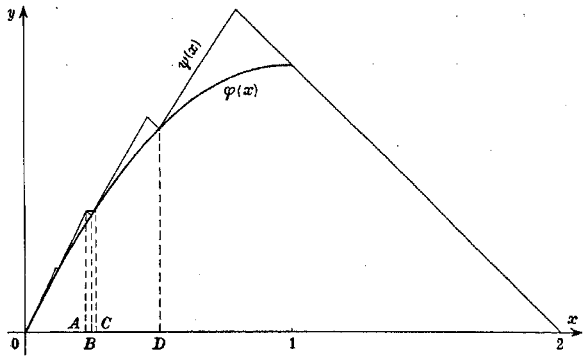
всюду, есть ограничена и имеет лишь одну точку разрыва в каждом интервале длины равной основному периоду [2]).

Пусть

$$\varphi(x)=2x-x^2,$$

$$\psi(x)=\begin{cases}0 & \text{для}\quad x=0,\\ \min\left\{2^nx\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right),\ \varphi\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\frac{1}{2^{n-1}}-x\right\} & \text{для}\quad x\in\left\langle\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right\rangle\end{cases}$$

$$(n=0,1,2,\ldots).$$



Функцию $\psi(x)$ продолжаем периодически на всю прямую и получаем непрерывную периодическую функцию с периодом равным 2. Докажем, что она особенная.

Пусть a_n наибольшее значение функции $\psi(x)$ в интервале $\langle 1/2^{n+1},1/2^n\rangle$. Из построения видно, что a_n положительно и стремится к нулю.

Покажем, что для достаточно большого n число $1/2^n$ есть a_n-почти-период для $\psi(x)$. Для этого нужно оценить величину

$$\left|\psi\left(x+\frac{1}{2^n}\right)-\psi(x)\right|.$$

[2]) В примере Steinhaus'а производная не ограничена и не существует в точке 0.

Из определения функции $\psi(x)$ легко усмотреть, что для $x\,\epsilon\langle 1/2^{k+1},\ 1/2^k\rangle$, $k=1,2\ldots,n-1$, имеем неравенство

$$\left|\psi\left(x+\frac{1}{2^n}\right)-\psi(x)\right|\leqslant\max\left\{\frac{1}{2^n},2^k\cdot\varphi\left(\frac{1}{2^k}\right)\cdot\frac{1}{2^n}\right\}= \tag{2}$$
$$=\max\left\{\frac{1}{2^n},\varphi\left(\frac{1}{2^k}\right)\cdot\frac{1}{2^{n-k}}\right\}.$$

Приняв ещё раз во внимание определение функции $\psi(x)$, мы убеждаемся, что для $x\,\epsilon\langle 0,\ 1/2^n\rangle$

$$\psi\left(x+\frac{1}{2^n}\right)\leqslant\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)2^n\cdot\left(x+\frac{1}{2^n}\right)=\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)\cdot 2^n x+\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right), \tag{3}$$

а выпуклость к верху функции $\varphi(x)$ даёт

$$2^n\cdot\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)\cdot x\leqslant\varphi(x)\leqslant\psi(x)\qquad\text{для}\quad x\,\epsilon\left\langle 0,\frac{1}{2^n}\right\rangle. \tag{4}$$

Покажем теперь, что при достаточно большом n, для $x\leqslant 1/2^n$

$$\psi\left(x+\frac{1}{2^n}\right)>\psi(x). \tag{5}$$

Пусть n настолько большое, что при $x<1/2^n$

$$\varphi'(x)>1. \tag{6}$$

Примем сначала, что $x<1/2^{n+1}$. Пусть $1/2^{k+1}\leqslant x<1/2^k$ для $k\geqslant n+1$.

Пусть далее η_k та точка интервала $\langle 1/2^{k+1},1/2^k\rangle$, в которой $\psi(\eta_k)=\alpha_k$; тогда $\psi(x)\leqslant\psi(\eta_k)$. Кроме этого имеем $x+1/2^n>1/2^{k-1}$, следовательно

$$\psi\left(x+\frac{1}{2^n}\right)>\psi\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)=\varphi\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Поэтому

$$\psi\left(x+\frac{1}{2^n}\right)-\psi(x)\geqslant\varphi\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)-\psi(\eta_k). \tag{7}$$

Неравенство (5) следует из (6), (7) и из определения функции $\psi(x)$.

Пусть теперь $1/2^{n+1}\leqslant x\leqslant 1/2^n$. Воспользуемся обозначениями указанными на чертеже: $A=\eta_n$, $B=1/2^n$, $D=1/2^{n-1}$, C — та точка интервала BD, в которой $\psi(x)$ равна α_n. Имеем

$$x+\frac{1}{2^n}\geqslant\frac{3}{2^{n+1}}=\overline{OB}+\frac{1}{2}\overline{BD}. \tag{8}$$

На основании (6) имеем

$$\overline{BC}<\overline{AB}<\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{BD}.$$

Отсюда и из (8) следует $x+1/2^n>\overline{OC}$, откуда получаем (5).

Из неравенств (3) и (4), учитывая (5), имеем

$$\left|\psi\left(x+\frac{1}{2^n}\right)-\psi(x)\right|= \tag{9}$$
$$=\psi\left(x+\frac{1}{2^n}\right)-\psi(x)\leqslant\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)=\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)\qquad\text{для}\quad x\,\epsilon\left\langle 0,\frac{1}{2^n}\right\rangle.$$

Принимая во внимание, что

$$\varphi\left(\frac{1}{2^k}\right)\cdot\frac{1}{2^{n-k}}<\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)\qquad(k=1,2,\ldots n-1),$$

неравенства (2) и (9) дают вместе

$$\left|\psi\left(x+\frac{1}{2^n}\right)-\psi(x)\right|\leqslant\max\left\{\frac{1}{2^n},\ \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)\right\}$$

для $x\,\epsilon\langle 0,1\rangle$ и достаточно больших n.

Так как $\varphi'(0)=2$, следовательно, для достаточно большого n будет $\varphi(1/2^n)>1/2^n$ и тогда окончательно получаем

$$\left|\psi\left(x+\frac{1}{2^n}\right)-\psi(x)\right|\leqslant\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)<\alpha_n\qquad\text{для}\quad x\,\epsilon\langle 0,1\rangle. \tag{10}$$

Для x из интервала $\langle 1,2\rangle$ неравенство (10) будет, как видно, тоже исполняться для периодически продолженной функции $\psi(x)$, если только n достаточно велико.

Окончательно, неравенство (10) исполнено для всех x и достаточно больших n, а это и значит, что числа $1/2^n$ являются α_n-почти-периодами функции $\psi(x)$ для достаточно больших n.

Так как $\psi(0)=0$ и $\eta_n<1/2^n$, то $|\psi(\eta_n)-\psi(0)|=a_n>\psi(1/2^n)$, $\delta(a_n)\leqslant\eta_n<1/2^n$, значит, $\tau(a_n)=1/2^n$ есть особенный почти-период функции $\psi(x)$.

В точке $x=0$ существует производная функции $\psi(x)$ равна производной функции $\varphi(x)$ в этой-же точке: $\psi'(0)=\varphi'(0)$; это следует из соотношения

$$\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}=\frac{\varphi(h)}{h}\leqslant\frac{\psi(h)-\psi(0)}{h}=\frac{\psi(h)}{h}\leqslant\frac{\varphi'(0)\cdot h}{h}=\varphi'(0) \qquad (h>0).$$

Призводная функции $\psi(x)$, очевидно, ограничена.

Изменяя незначительно функцию $\psi(x)$ в достаточно малых окрестностях тех точек, в которых она не имеет производной, мы можем, не нарушая её особенности добиться того, что производная будет существовать всюду и будет непрерывной и ограниченной в открытом интервале $(0,2)$. У периодически продолженной функции производная будет существовать всюду и будет непрерывной всюду, исключая точки $0,2,-2,4,-4,\ldots,2n,-2n,\ldots$

Полученная функция и есть пример функции обладающей требуемыми свойствами.

UN PROBLÈME CONCERNANT LE PROLONGEMENT DES FONCTIONS AUX σ-MESURES

PAR

J. ŁOŚ (WROCŁAW)

Soient $\boldsymbol{B}$ une algèbre de Boole, $\boldsymbol{X}$ un sous-ensemble de $\boldsymbol{B}$ et f une fonction réelle sur $\boldsymbol{X}$. Il serait de grand intérêt d'établir des conditions suffisantes et nécessaires pour que f se laisse prolonger à une σ-mesure sur $\boldsymbol{B}$.

Par *mesure* nous comprenons ici une fonction μ non-négative, additive et normée sur $\boldsymbol{B}$, c.-à.-d. telle que $\mu(X)\geqslant 0$, $\mu(X+Y)=\mu(X)+\mu(Y)-\mu(XY)$, $\mu(XX')=0$ et $\mu(X+X')=1$, pour $X,Y\epsilon\boldsymbol{B}$. Une mesure μ est dite *σ-mesure*, si elle est dénombrablement additive, c.-à-d. si $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(X_n)=0$ pour chaque suite $X_1\supset X_2\supset\ldots$ d'éléments de $\boldsymbol{B}$ telles que $\prod\limits_{i=1}^{\infty}X_i=0$ (0 étant élément nul de $\boldsymbol{B}$). Dans le cas où la condition de l'additivité dénombrable n'est pas exigée, on parle des mesures *simplement additives*. Dans ce travail, nous ne supposons guère que l'algèbre, sur laquelle est définie une σ-mesure, soit dénombrablement additive.

Le problème analogue pour les mesures simplement additives était examiné et résolu par Horn et Tarski[1]). Il resulte de leurs théorèmes que la condition suivante (étant évidemment nécessaire) est suffisante pour l'existence d'un prolongement de f à une telle mesure sur $\boldsymbol{B}$:

(C) Pour chaque *sous-ensemble fini* $\boldsymbol{Y}$ de $\boldsymbol{B}$ il existe une *mesure* μ sur la plus petite sous-algèbre $[\boldsymbol{Y}]_0$ de $\boldsymbol{B}$ contenant $\boldsymbol{Y}$, et telle que $\mu(X)=f(X)$ pour $X\epsilon\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}$ (autrement dit: une mesure qui est un prolongement partiel de f sur $[\boldsymbol{Y}]_0$[2])).

---

[1]) Voir Horn et Tarski [2], p. 469-477.

[2]) Cette condition est formulée dans le travail de Łoś et Ryll-Nardzewski [4]. Dans ce travail nous avons démontré aussi sans y faire usage des résultats de Horn et Tarski, que cette condition est suffisante pour le prolongement en question.