SUR LES REPRÉSENTATIONS DES NOMBRES NATURELS PAR DES PUISSANCES À BASE ET EXPOSANT NATURELS

PAR

JAN MYCIELSKI (WROCŁAW)

Les nombres naturels seront désignés par les minuscules de l'alphabet latin, les fonctions par les majuscules latines et les lettres grecques.

Soit $\Theta(n)$ le nombre des diviseurs naturels du nombre n. Soient $\sigma(n)$ et $\iota(n)$ la somme et le produit de ces diviseurs.

Nous nous occuperons des représentations d'un nombre donné $n\geqslant 2$ dans la forme k^s. Soit $\gamma(n)$ le nombre de ces représentations:

$$(1)\qquad n=a_1^{b_1},\ n=a_2^{b_2},\ \ldots,\ n=a_{\gamma(n)}^{b_{\gamma(n)}}.$$

Supposons qu'elles soient ordonnées de manière que

$$n=a_1>a_2>\ldots>a_{\gamma(n)},$$

et, par conséquent,

$$1=b_1<b_2<\ldots<b_{\gamma(n)}.$$

Posons

$$\tau(n)=b_1+b_2+\ldots+b_{\gamma(n)},$$
$$\chi(n)=b_1b_2\ldots b_{\gamma(n)},$$
$$\psi(n)=a_1+a_2+\ldots+a_{\gamma(n)},$$
$$\omega(n)=a_1a_2\ldots a_{\gamma(n)}.$$

Le but de ce travail est la démonstration de l'égalité suivante (Théorème 5):

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\tau(n)-1}{n}=\frac{\pi^2}{6}+1,$$

ainsi que celle de quelques autres relations, liées aux fonctions définies tout à l'heure.

1. *Théorème 1. La suite*

$$(2)\qquad b_1,b_2,\ldots,b_{\gamma(n)}$$

comprend tous les diviseurs naturels du nombre $b_{\gamma(n)}$.

Démonstration. Soit $r|b_{\gamma(n)}$. Nous avons

$$b_{\gamma(n)}=qr,$$

et, par conséquent,

$$n=a_{\gamma(n)}^{b_{\gamma(n)}}=(a_{\gamma(n)}^q)^r.$$

Puisque cette représentation du nombre n doit figurer dans la suite (1), le nombre r est un terme de la suite (2).

Il nous faut encore démontrer que $b_i|b_{\gamma(n)}$ pour $i=1,2,\ldots,\gamma(n)$.

Evidemment, $b_1=1|b_{\gamma(n)}$, et comme

$$a_{\gamma(n)}^{b_{\gamma(n)}}=n,$$

nous avons

$$a_{\gamma(n)}^{b_{\gamma(n)}/b_i}=\sqrt[b_i]{n}=a_i.$$

Puisque, d'après la définition du nombre $a_{\gamma(n)}$, chaque racine de ce nombre, à exposant naturel et plus grand que 1, est irrationnelle, nous concluons que $b_i|b_{\gamma(n)}$ également pour $i>1$.

Corollaire 1.

$$(3)\qquad \gamma(n)=\Theta(b_{\gamma(n)}),$$
$$(4)\qquad \tau(n)=\sigma(b_{\gamma(n)}),$$
$$(5)\qquad \chi(n)=\iota(b_{\gamma(n)}).$$

Ce corollaire résulte immédiatement du théorème 1.

Corollaire 2.

$$\gamma(n)=\Theta\big((\chi(n))^{2/\gamma(n)}\big),$$
$$\tau(n)=\sigma\big((\chi(n))^{2/\gamma(n)}\big),$$
$$\chi(n)=\iota\big((\chi(n))^{2/\gamma(n)}\big).$$

Démonstration. En vertu de l'égalité connue

$$(\iota(m))^2=m^{\Theta(m)},$$

il vient

$$(\iota(b_{\gamma(n)}))^2=b_{\gamma(n)}^{\Theta(b_{\gamma(n)})},$$

et, par suite, en appliquant les formules (3) et (5),

$$(6)\qquad b_{\gamma(n)}=(\chi(n))^{2/\gamma(n)}.$$

En substituant cette valeur de $b_{\gamma(n)}$ dans les formules (3), (4) et (5), nous en tirons le corollaire 2.

Posons

$$\alpha(n) = \frac{\tau(n)}{(\chi(n))^{2/\gamma(n)}}. \tag{7}$$

Théorème 2.

$$\omega(n) = n^{\alpha(n)}.$$

Démonstration. On a

$$a_1 a_2 \ldots a_{\gamma(n)} = \sqrt[b_1]{n} \cdot \sqrt[b_2]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[b_{\gamma(n)}]{n},$$

donc

$$\omega(n) = n^{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_{\gamma(n)}}}. \tag{8}$$

La suite (2) étant celle de tous les diviseurs du nombre $b_{\gamma(n)}$, la suite

$$\frac{b_{\gamma(n)}}{b_1}, \frac{b_{\gamma(n)}}{b_2}, \ldots, \frac{b_{\gamma(n)}}{b_{\gamma(n)}}$$

est également celle (inversement ordonnée) de tous les diviseurs de ce nombre. L'égalité (8) implique donc que

$$(\omega(n))^{b_{\gamma(n)}} = n^{b_{\gamma(n)} + \ldots + b_1} = n^{\tau(n)}$$

et par suite

$$\omega(n) = n^{\tau(n)/b_{\gamma(n)}}.$$

En substituant dans cette égalité la valeur de $b_{\gamma(n)}$ d'après la formule (6) et en tenant compte de (7), nous obtenons le théorème 2.

2. *Théorème 3.*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\gamma(n) - 1}{n} = 1.$$

(Evidemment $\gamma(n) - 1$ est égal au nombre des représentations du nombre n dans la forme k^s, moins la représentation triviale n^1.)

Démonstration. Remarquons que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\gamma(n) - 1}{n} = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

En effet, nous avons, du côté droit de l'égalité, exactement $\gamma(n) - 1$ fractions au dénominateur égal à n, dont la somme est $(\gamma(n) - 1)/n$. Les termes consécutifs $(\gamma(n) - 1)/n$ du côté gauche de l'égalité sont donc sommes de ceux des termes $1/k^s$ pour lesquels $k^s = n$. Le théorème 3 résulte maintenant facilement de l'égalité

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1. \tag{9}$$

Posons $\beta(n) = \sqrt{n}$ si n est carré d'un nombre naturel et $\beta(n) = 0$ s'il ne l'est pas.

Théorème 4.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\psi(n) - n}{n^x} \begin{cases} = \infty & \textit{pour} \quad x = 1, \\ < \infty & \textit{pour} \quad x > 1; \end{cases} \tag{10}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\psi(n) - n - \beta(n)}{n} = 1. \tag{11}$$

(Le nombre $\psi(n) - n$ est somme de tous les $k < n$ pour lesquels il existe un s tel que $k^s = n$; omettant dans cette somme $k = \sqrt{n}$, nous avons $\psi(n) - n - \beta(n)$).

Démonstration. Comme dans la démonstration du théorème 3, il s'agit de vérifier que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\psi(n) - n}{n^x} = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{k}{k^{sx}},$$

et que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\psi(n) - n - \beta(n)}{n} = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{s=3}^{\infty} \frac{k}{k^s}.$$

En effet, les termes consécutifs de gauche dans ces égalités sont, respectivement, sommes de ceux des termes k/k^{sx} ou k/k^s pour lesquels $k^s = n$.

Comme

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{k}{k^{sx}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{2x-1} - k^{x-1}} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^x} \qquad (x \geqslant 1),$$

la formule (10) est évidente; la formule (11) résulte de l'égalité

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{s=3}^{\infty} \frac{k}{k^s} = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{k^s},$$

dans laquelle la série double à droite est égale à 1 en vertu de (9).

Théorème 5.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\tau(n)-1}{n}=\frac{\pi^2}{6}+1.$$

(Le nombre $\tau(n)-1$ est somme de tous les s supérieurs à 1 et pour lesquels il existe un k tel que $k^s=n$).

Démonstration. Il est facile de vérifier que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\tau(n)-1}{n}=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{s}{k^s}.$$

Nous avons alors

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{s}{k^s}=-\sum_{k=2}^{\infty}k\left(\frac{d}{du}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{u^s}\right)_{u=k}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2k-1}{k(1-k)^2}=\frac{\pi^2}{6}+1,$$

ce qui termine la démonstration.

3. Nous trouverons maintenant quelques formules de sommation pour les fonctions γ, ψ et τ.

Posons

$$T(n)=\gamma(2)+\gamma(3)+\ldots+\gamma(n),$$

et remarquons que $T(n)$ désigne alors le nombre des solutions de l'inégalité

$$2\leqslant k^s\leqslant n. \tag{12}$$

Cette inégalité implique pour s la condition suivante:

$$1\leqslant s\leqslant [\log_2 n], \tag{13}$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Le nombre k, vérifiant l'inégalité (12), peut admettre, pour certain s, les valeurs

$$2,3,\ldots,[\sqrt[s]{n}], \tag{14}$$

et la somme des nombres $[\sqrt[s]{n}]-1$, pour s vérifiant l'inégalité (13), est égale à $T(n)$. Nous avons

$$T(n)=\sum_{s=1}^{[\log_2 n]}([\sqrt[s]{n}]-1), \tag{15}$$

d'où

$$T(n)=\sum_{s=1}^{[\log_2 n]}[\sqrt[s]{n}]-[\log_2 n]. \tag{16}$$

Cette formule peut servir à calculer les valeurs de la fonction T, car elle n'a, dans la somme de droite, que $[\log_2 n]$ facteurs.

Nous pouvons obtenir aussi

$$T(n)=\sum_{r=2}^{n}[\sqrt[r]{n}]=\sum_{r=2}^{n}[\log_r n]. \tag{17}$$

La première de ces égalités est une simplification de la formule (15). En effet, si $s>[\log_2 n]$, on a $[\sqrt[s]{n}]-1=0$. Il résulte donc de (15) que

$$T(n)=\sum_{s=1}^{n}([\sqrt[s]{n}]-1)=\sum_{s=1}^{n}[\sqrt[s]{n}]-n=\sum_{s=2}^{n}[\sqrt[s]{n}].$$

Déduisons maintenant la seconde des égalités (17). L'inégalité (12) implique, pour tout k,

$$2\leqslant k\leqslant n. \tag{18}$$

Pour k fixé dans (12), le nombre s admet les valeurs

$$1,2,\ldots,[\log_k n] \tag{19}$$

et alors $\sum_{k=2}^{n}[\log_k n]=T(n)$, puisqu'il y a $[\log_k n]$ nombres dans (19).

Nous trouverons maintenant des formules pour les fonctions définies comme suit:

$$K(n)=\psi(2)+\psi(3)+\ldots+\psi(n),$$
$$S(n)=\tau(2)+\tau(3)+\ldots+\tau(n).$$

Remarquons que $K(n)$ désigne la somme de tous les k qui figurent dans les divers couples des nombres k,s satisfaisant à (12). En effet, $K(n)$ est somme des nombres par les puissances desquelles l'on représente tous les nombres de la suite $2,3,\ldots,n$. Il en résulte que $K(n)$ s'obtiendra en sommant les nombres (14) et ensuite les sommes ainsi engendrées pour tous les s vérifiant (13).

En sommant les nombres (14), il vient

$$2+3+\ldots+[\sqrt[s]{n}]=\frac{1}{2}([\sqrt[s]{n}]^2+[\sqrt[s]{n}])-1.$$

En sommant ensuite les côtés droits de ces égalités selon les s vérifiant (13), nous avons

$$K(n)=\sum_{s=1}^{[\log_2 n]}\left(\frac{1}{2}([\sqrt[s]{n}]^2+[\sqrt[s]{n}])-1\right),$$

donc

$$K(n) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{[\log_2 n]} ([\sqrt[s]{n}]^2 + [\sqrt[s]{n}]) - [\log_2 n].$$

De la même manière, en sommant les nombres (19) et ensuite les sommes ainsi obtenues pour tous les k satisfaisant à (18), il vient

$$S(n) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} ([\log_k n]^2 + [\log_k n]).$$

SUR LA SOLUTION D'UNE CONGRUENCE EN NOMBRES COMPOSÉS

PAR

K. MATULEWICZ (GÓRA ŚLĄSKA)

Les recherches sur la congruence $2^n \equiv 2 \pmod{n}$, poursuivies depuis plusieurs siècles, se rattachent au problème de trouver un théorème réciproque de celui de Fermat d'après lequel, a étant un entier quelconque et n étant un nombre premier, on a

(1) $$a^n \equiv a \pmod{n}.$$

D'après Lehmer[1]), les Chinois, qui ont trouvé ce théorème pour $a=2$, ont aussi formulé, il y a 25 siècles, le théorème réciproque que voici:

(*) *Si $2^n - 2$ est divisible par n, le nombre n est premier.*

Dickson[2]) cite les travaux de plus de 25 auteurs, écrits entre 1675 et 1913, sur la congruence (1). En 1830, un auteur anonyme a trouvé l'exemple $2^{341} \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 341)$, où $341 = 11 \cdot 31$, qui contredit le théorème (*).

Sierpiński a démontré que la congruence $2^n \equiv 2 \pmod{n}$ est satisfaite pour tout n qui est d'une des deux formes suivantes:

(a) $n = 2^{2^k} + 1$, où k est un nombre naturel quelconque[3]),

(b) $n = 2^k - 1$, si $2^k \equiv 2 \pmod{k}$, où k est un nombre impair[4]).

Toutes les solutions de la congruence

$$2^n \equiv 2 \pmod{n}$$

---

[1]) D. H. Lehmer, *On the converse of Fermat's theorem*, The American Mathematical Monthly 43 (1936), p. 347-354.

[2]) L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, I, Washington 1934, p. 91-96.

[3]) W. Sierpiński, *Teoria liczb*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1950, p. 61.

[4]) Ibidem, p. 66, exercice 15; voir aussi W. Sierpiński, *Remarque sur une hypothèse des Chinois concernant les nombres* $(2^n - 2)/n$, Colloquium Mathematicum 1 (1947), p. 9.